Pravděpodobnost, proč je to tak těžké?

Tomáš Svoboda and Petr Pošík

Vision for Robots and Autonomous Systems, Center for Machine Perception
Department of Cybernetics
Faculty of Electrical Engineering, Czech Technical University in Prague

11. března 2026

Pravděpodobnost (nejistota) je všude

- Pravděpodobnost srážek zítra je 70%.
- Jakou mám šanci vyhrát v loterii?
- Mám pozitivní test na nemoc X, jsem opravdu nemocný?
- Svědectví jsou X, Y, a Z, je obviněný vinen?
- Nezaměstnanost se změnila o X, jaká bude inflace?
- Jak se bude vyvíjet cena akcií?
- Vybraná akce je X, o kolik se robot pohne?
- Jaká je pravděpodobnost, že na fotce je osoba XY?
- Jak dlouho mi bude trvat cesta, když pojedu tramvají?
- ...

Potřebujeme matematický popis ...

Co se naučíme

- Náhodný vs. deterministický pokus
- Náhodný jev jako jeho výsledek; prostor jevů
- Náhodná proměnná a její očekáváná hodnota

(Náhodný) pokus, jev

Pokus :

- Zjednodušeně: pozorování nějaké vlastnosti světa
- Děj či procedura, která
  - může být libovolněkrát konzistentně opakována a
  - má jednoznačně definovanou množinu možných výsledků.
- Deterministický pokus má jediný možný výsledek.
- Náhodný pokus má více možných výsledků.
- Neznáme výsledek *před* vykonáním náhodného pokusu. Po pokusu, je vše již jasné, nejistota mizí.

⚠ Náhodný jev je výsledek náhodného pokusu.

Jaká je pravděpodobnost náhodného jevu?

(Náhodný) pokus, jev

Pokus :

- Zjednodušeně: pozorování nějaké vlastnosti světa
- Děj či procedura, která
  - může být libovolněkrát konzistentně opakována a
  - má jednoznačně definovanou množinu možných výsledků.
- **Deterministický pokus** má jediný možný výsledek.
- **Náhodný pokus** má více možných výsledků.
- Neznáme výsledek *před* vykonáním náhodného pokusu. Po pokusu, je vše již jasné, nejistota mizí.

⚠ **Náhodný jev** je výsledek náhodného pokusu.

Jaká je pravděpodobnost náhodného jevu?

(Náhodný) pokus, jev

Pokus :

- Zjednodušeně: pozorování nějaké vlastnosti světa
- Děj či procedura, která
  - může být libovolněkrát konzistentně opakována a
  - má jednoznačně definovanou množinu možných výsledků.
- **Deterministický pokus** má jediný možný výsledek.
- **Náhodný pokus** má více možných výsledků.
- Neznáme výsledek *před* vykonáním náhodného pokusu. Po pokusu, je vše již jasné, nejistota mizí.

⚠ **Náhodný jev** je výsledek náhodného pokusu.

Jaká je pravděpodobnost náhodného jevu?

Náhodný pokus: Jeden hod hrací kostkou

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů :

1	3	5
2	4	6

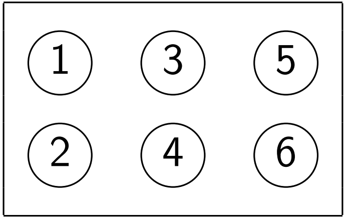
Náhodné jevy (výsledky pokusů) :

- A - číslo 6, $P(A) = ?$
- B - liché číslo, $P(B) = ?$
- C - číslo větší než 2, $P(C) = ?$
- D - číslo větší než 6, $P(D) = ?$

Think twice, DALL-E!

Náhodný pokus: Jeden hod hrací kostkou

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů :



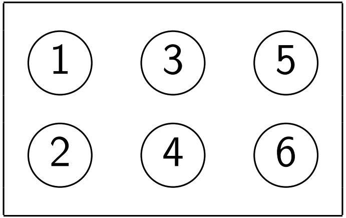
Think twice, DALL-E!

Náhodné jevy (výsledky pokusů) :

- A - číslo 6, $P(A) = ?$
- B - liché číslo, $P(B) = ?$
- C - číslo větší než 2, $P(C) = ?$
- D - číslo větší než 6, $P(D) = ?$

Náhodný pokus: Jeden hod hrací kostkou

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů :



Náhodné jevy (výsledky pokusů) :

- A - číslo 6, $P(A) = ?$
- B - liché číslo, $P(B) = ?$
- C - číslo větší než 2, $P(C) = ?$
- D - číslo větší než 6, $P(D) = ?$

Think twice, DALL-E!

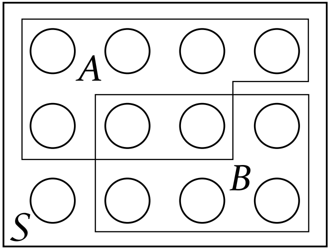
(Náhodné) jevy

Elementární jevy jsou *všechny možné, vzájemně se vylučující výsledky* nějakého experimentu.

Množinu elementárních jevů označme $\mathcal{S}$.

Náhodný jev A je jakákoli podmnožina množiny elementárních jevů, $A \subseteq \mathcal{S}$.

- Jev A nastal, pokud výsledek experimentu patří do A.
- Jevem je jakýkoli výrok o výsledku experimentu, pro který můžeme rozhodnout, zda nastal či nikoli.



Náhodný pokus 1: Házíme třikrát mincí (Head/Tails)

(Náhodný) Jev – výsledek náhodného pokusu

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů . Jak je velká?

A 3^2

B 2^3

C $2 \cdot 3$

D ∞

(Náhodné) Jevy :

- A - $3\times$ panna (hlava), $P(A) = ?$
- B - $3\times$ stejný symbol, $P(B) = ?$
- C - alespoň jeden orel (tail), $P(C) = ?$ …

Náhodný pokus 1: Házíme třikrát mincí (Head/Tails)

(Náhodný) Jev – výsledek náhodného pokusu

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů . Jak je velká?

A 3^2

B 2^3

C $2 \cdot 3$

D ∞

(Náhodné) Jevy :

- A - $3\times$ panna (hlava), $P(A) = ?$
- B - $3\times$ stejný symbol, $P(B) = ?$
- C - alespoň jeden orel (tail), $P(C) = ?$ ...

Náhodný pokus 1: Házíme třikrát mincí (Head/Tails)

(Náhodný) Jev – výsledek náhodného pokusu

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů. Jak je velká?

A 3^2

B 2^3

C $2 \cdot 3$

D ∞

(Náhodné) Jevy:

- A - $3\times$ panna (hlava), $P(A) = ?$
- B - $3\times$ stejný symbol, $P(B) = ?$
- C - alespoň jeden orel (tail), $P(C) = ?$ …

Náhodný pokus 1: Házíme třikrát mincí (Head/Tails)

(Náhodný) Jev – výsledek náhodného pokusu

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů. Jak je velká?

A 3^2

B 2^3

C $2 \cdot 3$

D ∞

(Náhodné) Jevy:

- A - $3\times$ panna (hlava), $P(A) = ?$
- B - $3\times$ stejný symbol, $P(B) = ?$
- C - alespoň jeden orel (tail), $P(C) = ?$ ...

Náhodný pokus 1: Házíme třikrát mincí (Head/Tails)

(Náhodný) Jev – výsledek náhodného pokusu

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů. Jak je velká?

A 3^2

B 2^3

C $2 \cdot 3$

D ∞

(Náhodné) Jevy :

- A - $3\times$ panna (hlava), $P(A) = ?$
- B - $3\times$ stejný symbol, $P(B) = ?$
- C - alespoň jeden orel (tail), $P(C) = ? \ldots$

Proč nám nestačí pracovat přímo s jevy?

Pokus: hodíme třikrát mincí. Prostor elementárních jevů:

$$\mathcal{S} = \{\underbrace{HHH,\ HHT,\ HTH,\ HTT,\ THH,\ THT,\ TTH,}_{\text{alespoň jedna hlava – 7 prvků}}\ TTT\}$$

Chceme popsat jevy jako:

- *Padly právě 2 hlavy* $\Rightarrow$ jev $\{HHT, HTH, THH\}$
- *Padl sudý počet hlav* $\Rightarrow$ jev $\{TTT, HHT, HTH, THH\}$
- *Padlo více hlav než orlů* $\Rightarrow$ jev $\{HHH, HHT, HTH, THH\}$

Problém

Každý takový jev musíme definovat jako *výčet prvků* $\mathcal{S}$. Pro složitější pokusy (hod 10 kostkami, 1000 měření senzoru . . .) to je **krajně nepraktické**.

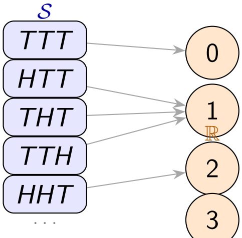
Potřebujeme způsob, jak jevy popsat **číslem**.

Náhodná veličina je funkce – ale proč se jmenuje veličina?

Definujme funkci X:

$$X(s) = \text{počet hlav v } s$$

$s \in \mathcal{S}$	$X(s)$
TTT	0
HTT, THT, TTH	1
HHT, HTH, THH	2
HHH	3



Formální definice

Náhodná veličina X na pravděpodobnostním prostoru $(\mathcal{S}, P)$ je **funkce**

$$X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}.$$

Proč se tedy říká „veličina"?

Historický důvod: X se chová jako číslo – můžeme ji sčítat, násobit, počítat její průměr ...

Ale *před* provedením pokusu nevíme, jakou hodnotu X nabyde. Proto je **„náhodná"**.

Zdroj záměny:
X sama o sobě je deterministická funkce.
Náhodnost přichází ze *vstupu* – z výsledku pokusu s.

Tři věci, které X může znamenat

Zápis	**Co to je**	**Příklad**
X	Celá funkce $X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ (před pokusem)	„Počet hlav při hodu 3 mincemi"
$X(s)$	Konkrétní hodnota funkce pro výsledek s (po pokusu)	$X(HTH) = 2$
$P(X = k)$	Pravděpodobnost jevu $\{s \in \mathcal{S} : X(s) = k\}$	$P(X = 2) = \frac{3}{8}$

Správně

„Náhodná veličina X nabývá hodnoty 2 s pravděpodobností $\frac{3}{8}$."

Zápis: $P(X = 2) = \frac{3}{8}$

Pozor – časté chyby

$X = 2$ **není** pravda/nepravda – je to *jev* (množina výsledků).

$X(s)$ je číslo, X je funkce – nejsou to totéž!

Příklady náhodných veličin

- Doba jízdy z domova do školy.
- Čekací doba na autobus.
- Počet zákazníků v obchodě daný den.
- Srážkový úhrn.
- Počet chyb v programu.
- ...

Příklady náhodných veličin

- Doba jízdy z domova do školy.
- Čekací doba na autobus.
- Počet zákazníků v obchodě daný den.
- Srážkový úhrn.
- Počet chyb v programu.
- ...

Diskrétní náhodná veličina

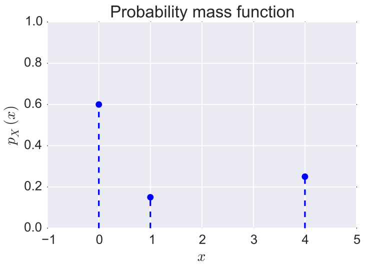
Náhodná veličina X je **diskrétní**, pokud hodnoty $X(s)$ přes všechny $s \in \mathcal{S}$ tvoří buď

- konečnou množinu hodnot $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nebo
- nekonečnou, ale spočetnou množinu $a_1, a_2, \ldots$

Podpora (Support) n.v. X: $\mathcal{S}_X = \{x \in \mathbb{R} : P(X = x) > 0\} = \{a_1, a_2, \ldots\}$

Pravděpodobností funkce (rozdělení pravděpodobnosti) diskrétní n.v. X je funkce p_X definovaná jako

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{s \in \mathcal{S} : X(s) = x\}).$$



Diskrétní náhodná veličina

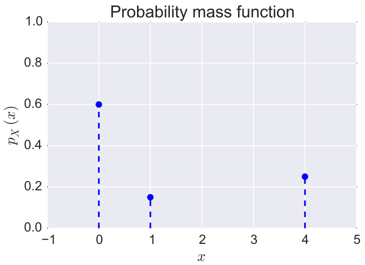
Náhodná veličina X je **diskrétní**, pokud hodnoty $X(s)$ přes všechny $s \in \mathcal{S}$ tvoří buď

- konečnou množinu hodnot $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nebo
- nekonečnou, ale spočetnou množinu $a_1, a_2, \ldots$

Podpora (Support) n.v. X: $\mathcal{S}_X = \{x \in \mathbb{R} : P(X = x) > 0\} = \{a_1, a_2, \ldots\}$

Pravděpodobností funkce (rozdělení pravděpodobnosti) diskrétní n.v. X je funkce p_X definovaná jako

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{s \in \mathcal{S} : X(s) = x\}).$$



Diskrétní náhodná veličina

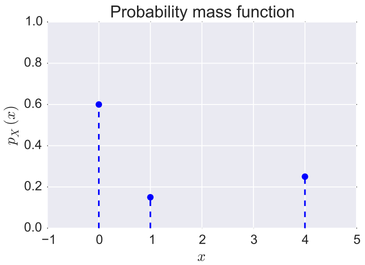
Náhodná veličina X je **diskrétní**, pokud hodnoty $X(s)$ přes všechny $s \in \mathcal{S}$ tvoří buď

- konečnou množinu hodnot $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nebo
- nekonečnou, ale spočetnou množinu $a_1, a_2, \ldots$

Podpora (Support) n.v. X: $\mathcal{S}_X = \{x \in \mathbb{R} : P(X = x) > 0\} = \{a_1, a_2, \ldots\}$

Pravděpodobností funkce (rozdělení pravděpodobnosti) diskrétní n.v. X je funkce p_X definovaná jako

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{s \in \mathcal{S} : X(s) = x\}).$$



Spojitá náhodná veličina – přehled

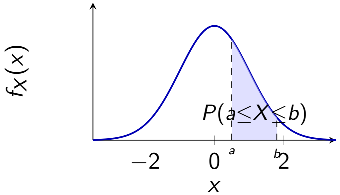
Náhodná veličina X je **spojitá**, pokud existuje funkce $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ taková, že pro každý interval $\langle a, b \rangle$:

$$P(a \leq X \leq b) \; = \; \int_a^b f_X(x) \, \mathrm{d}x.$$

f_X se nazývá **hustota pravděpodobnosti** (probability density function, PDF).

Klíčové vlastnosti:

- $f_X(x) \geq 0$ pro všechna x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \, \mathrm{d}x = 1$
- $P(X = x) = 0$ pro každé konkrétní x



Příklady: doba jízdy tramvají, naměřená vzdálenost, šum senzoru.

Spojitá náhodná veličina – přehled

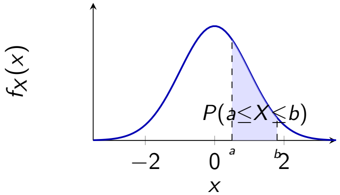
Náhodná veličina X je **spojitá**, pokud existuje funkce $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ taková, že pro každý interval $\langle a, b \rangle$:

$$P(a \leq X \leq b) \; = \; \int_a^b f_X(x) \, \mathrm{d}x.$$

f_X se nazývá **hustota pravděpodobnosti** (probability density function, PDF).

Klíčové vlastnosti:

- $f_X(x) \geq 0$ pro všechna x
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \, \mathrm{d}x = 1$
- $P(X = x) = 0$ pro každé konkrétní x



Příklady: doba jízdy tramvají, naměřená vzdálenost, šum senzoru.

Střední (očekávaná) hodnota náhodné veličiny

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{S}_X} x \cdot P(X = x)$$

Příklad: Hod kostkou, X = číslo na kostce.

$$\mathrm{E}[X] = 1 \cdot \tfrac{1}{6} + 2 \cdot \tfrac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \tfrac{1}{6} = 3{,}5$$

Vlastnosti:

- $\mathrm{E}[r] = r, \quad \mathrm{E}[rX + s] = r\,\mathrm{E}[X] + s$
- $\mathrm{E}[X + Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$ (linearita, vždy platí)
- $\mathrm{E}[X \cdot Y] = \mathrm{E}[X] \cdot \mathrm{E}[Y]$ (pouze pro *nezávislé* X, Y)

Proč nás střední hodnota zajímá?
Střední hodnota je **nejlepší jednočíselný odhad** výsledku před provedením pokusu – minimalizuje střední kvadratickou chybu.

Střední (očekávaná) hodnota náhodné veličiny

$$E[X] = \sum_{x \in \mathcal{S}_X} x \cdot P(X = x)$$

Příklad: Hod kostkou, X = číslo na kostce.

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

Vlastnosti:

- $E[r] = r, \quad E[rX + s] = r\,E[X] + s$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$ (linearita, vždy platí)
- $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$ (pouze pro *nezávislé* X, Y)

⚠ Proč nás střední hodnota zajímá?
Střední hodnota je **nejlepší jednočíselný odhad** výsledku před provedením pokusu – minimalizuje střední kvadratickou chybu.

Střední (očekávaná) hodnota náhodné veličiny

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{S}_X} x \cdot P(X = x)$$

Příklad: Hod kostkou, X = číslo na kostce.

$$\mathrm{E}[X] = 1 \cdot \tfrac{1}{6} + 2 \cdot \tfrac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \tfrac{1}{6} = 3{,}5$$

Vlastnosti:

- $\mathrm{E}[r] = r, \quad \mathrm{E}[rX + s] = r\,\mathrm{E}[X] + s$
- $\mathrm{E}[X + Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$ (linearita, vždy platí)
- $\mathrm{E}[X \cdot Y] = \mathrm{E}[X] \cdot \mathrm{E}[Y]$ (pouze pro *nezávislé* X, Y)

⚠ Proč nás střední hodnota zajímá?
Střední hodnota je **nejlepší jednočíselný odhad** výsledku před provedením pokusu – minimalizuje střední kvadratickou chybu.

Střední hodnota – součet dvou kostek

Součet obou kostek: $S = X_1 + X_2$

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Přímý výpočet (zdlouhavý):

$$\mathrm{E}[S] = 2 \cdot \tfrac{1}{36} + 3 \cdot \tfrac{2}{36} + \cdots + 12 \cdot \tfrac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

Linearita – mnohem rychlejší!

$$\mathrm{E}[S] = \mathrm{E}[X_1 + X_2] = \mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[X_2] = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$$

Linearita platí **vždy** – X_1, X_2 nemusí být nezávislé.

Literatura, další zdroje

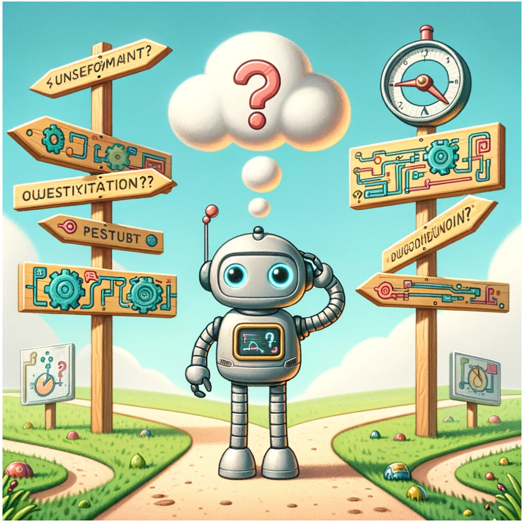
Klasické české čtení [2], na domácí stránce https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/ mnoho dalších zajímavých studijních materiálů.

[1] Joseph K. Blitzstein and Jessica Hwang.
Introduction to Probability.
CRC Press, 2nd edition, 2019.
http://probabilitybook.net/.

[2] Mirko Navara.
Pravděpodobnost a matematická statistika.
ČVUT v Praze, Praha, 2007.
https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/.

[3] N. Silver.
Signál a šum.
Paseka, 2014.

Zbytek prezentace použijte dle potřeby . . .



Jevy a jejich kombinace

Důležité jevy:

- Jistý jev : $\mathcal{S}$, 1
- Nemožný jev : $\emptyset$, 0

Kombinace jevů:

- Konjunkce (A a B): $A \cap B$
- Disjunkce (A nebo B): $A \cup B$
- Jev opačný k A: $A^c = \mathcal{S} \setminus A$
- $A \Rightarrow B$: $A \subseteq B$
- Jevy neslučitelné : $A_1, \ldots, A_n : \bigcap\limits_{i \leq n} A_i = \emptyset$
- Jevy po dvou neslučitelné = vzájemně se vylučující : $A_1, \ldots, A_n : \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$

Jevy a jejich kombinace

Důležité jevy:

- Jistý jev : $\mathcal{S}$, 1
- Nemožný jev : $\emptyset$, 0

Kombinace jevů:

- Konjunkce (A a B): $A \cap B$
- Disjunkce (A nebo B): $A \cup B$
- Jev opačný k A: $A^c = \mathcal{S} \setminus A$
- $A \Rightarrow B$: $A \subseteq B$
- Jevy neslučitelné : $A_1, \ldots, A_n : \bigcap_{i \leq n} A_i = \emptyset$
- Jevy po dvou neslučitelné $=$ vzájemně se vylučující : $A_1, \ldots, A_n : \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$

Úplný systém jevů

Úplný systém jevů je každá množina jevů $B_1, \ldots, B_n$, které se vzájemně vylučují a současně $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \mathcal{S}$.

- Množina elemenárních jevů $\mathcal{S}$ je z definice úplný systém jevů.
- Jevy $\{C, C^c\}$ tvoří úplný systém jevů: $C \cap C^c = \emptyset$ and $C \cup C^c = \mathcal{S}$.

Proč je úplný systém jevů důležitý koncept?

Úplný systém jevů

Úplný systém jevů je každá množina jevů $B_1, \ldots, B_n$, které se vzájemně vylučují a současně $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \mathcal{S}$.

- Množina elemenárních jevů $\mathcal{S}$ je z definice úplný systém jevů.
- Jevy $\{C, C^c\}$ tvoří úplný systém jevů: $C \cap C^c = \emptyset$ and $C \cup C^c = \mathcal{S}$.

Proč je úplný systém jevů důležitý koncept?

Interpretace pravděpodobnosti

Frekventistická :

- Relativní četnost jevu po mnoha opakováních náhodného pokusu.

Bayesovská :

- Stupeň důvěry v to, že jev nastane.
- Umožňuje nám přiřadit pravděpodobnosti k výrokům typu "kandidát A vyhraje volby" nebo "podezřelý X je vinen", ačkoli nemůžeme opakovat stejné volby nebo stejný zločin stále dokola.

Vlastnosti pravděpodobnostní funkce

Pro jakoukoli platnou pravděpodobnostní funkci musí platit:

- $P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$ (z definice)
- $P(\emptyset) = 0$; $P(\mathcal{S}) = 1$ (axiomy)
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Pokud $A \subseteq B$, pak $P(A) \leq P(B)$
- Pokud $A \subseteq B$, pak $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
- Pokud $A \cap B = \emptyset$, pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (*aditivita*)
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Příklad 3: Pravděpodobnost částí

Vybereme-li z populace náhodně jednoho člověka, pak pro něj platí:

- Trpí nemocí X a je mladší 18 let s pravděpodobností 0.01.
- Trpí nemocí X a je mu/jí mezi 18 a 65 lety s pravděpodobností 0.05.
- Trpí nemocí X a je starší 65 let s pravděpodobností 0.09.

Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný člověk má nemoc X?

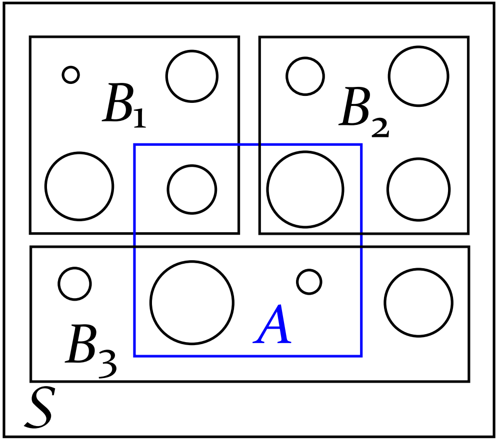
Vlastnostni pravděpodobnostní funkce (pokr.)

Pokud je $\{B_1, \ldots, B_n\}$ úplný systém jevů, pak pro jakýkoli jev $A \subseteq \mathcal{S}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) .$$

Konkrétně, pro úplný systém jevů $\{C, C^c\}$

$$P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap C^c) .$$



Nezávislé jevy

Vzpomínáte na čerpadla u elektrárny? Chtěli bychom, aby byla nezávislá!

Jevy A a B jsou nezávislé právě tehdy, když

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Jsou-li A a B nezávislé, pak

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$,
- a páry A, B^c a A^c, B a A^c, B^c jsou také nezávislé.

Nezávislé jevy

Vzpomínáte na čerpadla u elektrárny? Chtěli bychom, aby byla nezávislá!

Jevy A a B jsou nezávislé právě tehdy, když

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Jsou-li A a B nezávislé, pak

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$,
- a páry A, B^c a A^c, B a A^c, B^c jsou také nezávislé.

Nezávislé jevy

Vzpomínáte na čerpadla u elektrárny? Chtěli bychom, aby byla nezávislá!

Jevy A a B jsou nezávislé právě tehdy, když

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Jsou-li A a B nezávislé, pak

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$,
- a páry A, B^c a A^c, B a A^c, B^c jsou také nezávislé.

Nezávislost jevů: hod dvěma mincemi

- A - na první minci padla hlava
- B - na druhé minci padla hlava
- C - na mincích padly různé symboly

Které skupiny jevů jsou nezávislé?

A žádná skupina jevů

B dvojice (A, B), (B, C), (A, C)

C dvojice (A, B), (B, C), (A, C) i trojice (A, B, C)

D pouze trojice (A, B, C)

Nezávislost jevů: hod dvěma mincemi

- A - na první minci padla hlava
- B - na druhé minci padla hlava
- C - na mincích padly různé symboly

Které skupiny jevů jsou nezávislé?

A žádná skupina jevů

B dvojice (A, B), (B, C), (A, C)

C dvojice (A, B), (B, C), (A, C) i trojice (A, B, C)

D pouze trojice (A, B, C)

Vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti

- $P(\mathcal{S}|B) = 1$, $P(\emptyset|B) = 0$.
- $P(A|A) = 1$, $P(A^c|A) = 0$.
- Pokud $B \subseteq A$, pak $P(A|B) = 1$.
- Pokud $P(A \cap B) = 0$, pak $P(A|B) = 0$.
- Pokud $A_1, \ldots, A_n$ jsou vzájemně se vylučující jevy, pak $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \middle| B\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)$.
- Jevy A, B jsou nezávislé právě tehdy, když $P(A|B) = P(A)$ (pokud je $P(A|B)$ definována).

Věta o úplné pravděpodobnosti

Nechť $B_1, \ldots, B_n$ je úplný systém jevů vzhledem k $\mathcal{S}$ (tj., B_i jsou vzájemně neslučitelné a jejich sjednocením je $\mathcal{S}$) s $P(B_i) > 0$ pro všechna i.
Pak

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$