

Příklady na této stránce vyřešte. Odpověď včetně stručného zdůvodnění vždy napište do připravené mezery. Odevzdává se pouze tento čistopis (případné koncepty ne).

1. (2 body) Jsou dány body $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, n$, uložené jako sloupce do matice $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3 \times n}$. Najděte body $(x'_i, y'_i, z'_i) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, n$ (uložené podobně do matice $\mathbf{X}'$) ležící v rovině procházející počátkem tak, aby výraz $\sum_{i=1}^n ((x_i - x'_i)^2 + (y_i - y'_i)^2 + (z_i - z'_i)^2)$ byl minimální. Napište postup (posloupnost kroků, ale nemá to být počítačový kód), jak takové body najít.

Typická úloha na prokládání bodů podprostorem.

Jeden způsob řešení: Najdeme hledanou rovinu (reprezentovanou buď orton. bází nebo orton. bází jejího ortog. doplňku) a pak na ní promítneme dané body:

- Uděláme redukované SVD $\mathbf{X} = \mathbf{USV}^T$ (nebo spektrální rozklad $\mathbf{XX}^T = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$, což dá stejnou matici $\mathbf{V}$).
- Označíme sloupce matice $\mathbf{V}$ jako $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Pak $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ je orton. báze hledané roviny a $\mathbf{v}_3$ je její normalizovaný normálový vektor (orton. báze jejího ortog. doplňku).
- Promítneme body ve sloupcích $\mathbf{X}$ na tuto rovinu, tedy $\mathbf{X}' = \mathbf{P}\mathbf{X}$ kde $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2][\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]^T = \mathbf{I} - \mathbf{v}_3\mathbf{v}_3^T$ je ortog. projektor na rovinu.

Druhé možné řešení: úlohu formulujeme jako low-rank matrix approximation: minimalizuj $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|$ z.p. $\text{rank } \mathbf{X}' \leq 2$. Řešení najdeme dle Eckart-Youngovy věty: spočteme (redukované) SVD $\mathbf{X} = \mathbf{USV}^T$, vynulujeme nejmenší diag. prvek matice $\mathbf{S}$, a potom je $\mathbf{X}' = \mathbf{USV}^T$.

2. (1 bod) Najděte vzorec pro směrovou derivaci funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ (kde $\mathbf{A}$ nemusí být symetrická) v bodě $\mathbf{b}$ ve směru $\mathbf{v}$. Protože funkce f je diferencovatelná na celém $\mathbb{R}^n$ (je to kvadr. forma), hledaná směrová derivace je $f_{\mathbf{v}}(\mathbf{b}) = f'(\mathbf{b})\mathbf{v}$, viz věta ze skript. Zpaměti známe vzoreček pro totální derivaci kvadr. formy: $(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})' = \mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$. Tedy $f_{\mathbf{v}}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{v}$.
3. Máme funkci $f(x, y) = y + 1$ a množinu $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x + y \geq 0\}$.

- (1 bod) Načrtněte množinu X a několik vrstevnic funkce f .
Množina X je půlka kružnice, nad přímkou $x + y = 0$ (což je přímka jdoucí počátkem šikmo z levo-hora do pravo-dola). Vrstevnice f jsou vodorovné přímky.
- (1 bod) Najděte všechny extrémy funkce f na množině X . U každého extrému určete, zda je globální/lokální, volný/vázaný, minimum/maximum.

Z náčrtku (bez počítání) vidíme, že úloha má tři extrémy:

- Globální maximum v bodě $(x, y) = (0, 1)$ (nejvyšší bod půlkružnice).
- Globální minimum v bodě $(x, y) = (1, -1)/\sqrt{2}$ (nejnižší bod půlkružnice).
- Lokální (ale ne globální) minimum v bodě $(x, y) = (-1, 1)/\sqrt{2}$ (levý koncový bod půlkružnice).

Všechny extrémy jsou vázané množinou X (funkce f nemá volné extrémy, tj. extrémy na $\mathbb{R}^2$).

4. Máme funkci $f(x, y, z) = xyz$.

- (1 bod) Najděte první derivaci (Jacobiho matici) funkce.
 $f'(x, y, z) = [yz \ xz \ xy]$. Je to matice s jediným řádkem, tj. z $\mathbb{R}^{1 \times 3}$. Tedy pokud napíšete (zy, xy, xy) , je to chyba neb to je vektor z $\mathbb{R}^3$ (dle konvence z §2.2 skript).
- (1 bod) Najděte Taylorův polynom prvního stupně funkce v bodě $(0, 1, 2)$. Polynom zjednodušte (zjednodušení se hodnotí).

Hledaný polynom je $T_{\mathbf{x}_0}^1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ kde jsme označili $\mathbf{x} = (x, y, z)$ a $\mathbf{x}_0 = (0, 1, 2)$. To je rovno

$$0 + [2 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ y - 1 \\ z - 2 \end{bmatrix} = 2x.$$

5. (1 bod) Hledáme $x \in \mathbb{R}$ splňující rovnost $x^3 - x = 5$. Napište vzorec pro iteraci Newtonovy metody pro tuto úlohu. Učebnicové použití Newtonovy metody na řešení soustav rovnic (zde jediné rovnice). Řešíme rovnici $g(x) = 0$ kde $g(x) = x^3 - x - 5$. Iterace bude $x := x - g(x)/g'(x) = x - (x^3 - x - 5)/(3x^2 - 1)$.

Odpovědi na následující kvízové příklady VYZNAČTE DO TABULKY KŘÍŽKY. V každém příkladu je právě jedna odpověď správně. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce nechte prázdný. Chcete-li odstranit již vyznačený křížek, políčko s křížkem zcela zaplňte modrou barvou.

(Za správnou odpověď je 1 bod, za chybnou odpověď mínus čtvrt bodu, za chybějící odpověď 0 bodů.)

V kvízových příkladech dole je vždy první odpověď správná.

- Singulární čísla matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5 \times 8}$ jsou 1, 0.4, 0.2, 0.2 a 0.1. Nechť $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{5 \times 8}$ je mezi všemi maticemi hodnosti 2 ta nejbližší (ve Frobeniově normě) k matici $\mathbf{A}$. Čemu je rovno $\|\mathbf{A} - \mathbf{X}\|$, kde $\|\cdot\|$ zde značí Frobeniobu normu?
 - 0.3
Je to $\|(0.1, 0.2, 0.2)\| = \sqrt{0.1^2 + 0.2^2 + 0.2^2} = 0.3$, Euklid. norma vektoru jehož složky jsou tři nejmenší singulární čísla. To plyne z výrazu (7.12) ve skriptech a ze vztahu vlastních čísel matice $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ a sing. čísel matice $\mathbf{X}$. Třeba rozmyslet.
 - 0.5
 - 0.25
 - nelze z uvedených údajů určit
- Il (e) žádná z uvedených možností
- Vnitřek množiny $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x + y \geq 0\}$ je množina
 - prázdná
Protože množina je část kružnice (stejná jako v jednom z počítačích příkladů), dle definice vnitřních bodů (skripta) nemá žádné vnitřní body.
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x + y > 0\}$
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x + y > 0\}$
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x + y \geq 0\}$
- Il (e) žádná z uvedených možností
- Nechť $n > 1$. Funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ daná vzorcem $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ má na množině $[-1, 1]^n$
 - právě jedno lokální minimum a více než jedno globální maximum
Lok. minimum (zároveň je globální, to ale tuto možnost nevylučuje) je v počátku, je volné. Globální maxima jsou vázaná, ve všech rozích hyperkrychle $[-1, 1]^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_i \leq 1 \forall i\}$.
 - právě jedno lokální minimum, více než jedno lokální maximum a právě jedno globální maximum
 - více než jedno lokální minimum
 - sedlový bod
- Il (e) žádná z uvedených možností
- Chceme dané body $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^2$, tvořící sloupce matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times m}$, proložit kružnicí tak, aby součet čtverců vzdáleností bodů ke kružnici byl minimální. Optimální kružnici lze nalézt takto:
 - žádná z uvedených možností
Najít globální optimum úlohy (a to je zde úkolem) je obtížné (jak psáno v návodu příslušné domácí úlohy), žádný z jednoduchých postupů nefunguje. Konkrétně, odpovědi (b,c) jsou úplné nesmysly, k (e) lze snadno najít protipříklad (body ležící na malém výseku kružnice), (d) by znamenalo že lze převést na lineární úlohu nejmenších čtverců.
 - Střed kružnice je levý singulární vektor matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times m}$ odpovídající nejmenšímu singulárnímu číslu.
 - Střed kružnice je levý singulární vektor matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times m}$ odpovídající největšímu singulárnímu číslu.
 - Úlohu lze převést na tvar $\min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{P}\mathbf{u} - \mathbf{q}\|$ kde $\mathbf{P}, \mathbf{q}$ jsou jednoduché výrazy obsahující vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$.
- fI (e) Střed kružnice bude v těžišti bodů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$.
- Nechť $\mathbf{x}$ je stacionární bod funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tedy $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Nechť Hessova matice $f''(\mathbf{x})$ má všechna vlastní čísla nezáporná a aspoň jedno vlastní číslo nulové. Pak
 - v bodě $\mathbf{x}$ funkce může nebo nemusí mít lokální minimum
Tato odpověď (ve spojení s otázkou) přesně (ve smyslu matematické logiky) znamená toto: existuje aspoň jedna funkce s uvedenými vlastnostmi která má v bodě $\mathbf{x}$ lok. minimum, a existuje aspoň jedna (jiná) funkce s uvedenými vlastnostmi která nemá v bodě $\mathbf{x}$ lok. minimum. Toto tvrzení dokážeme, že najdeme příklady (stačí funkce jedné proměnné), např. $f(x) = x^2$ a $f(x) = x^3$. Motivace jsou podmínky 2. řádu na volné extrémy (skripta).
 - v bodě $\mathbf{x}$ má funkce lokální minimum
 - v bodě $\mathbf{x}$ nemá funkce lokální minimum
 - v bodě $\mathbf{x}$ má funkce sedlový bod
- Il (e) všechny směrové derivace funkce v bodě $\mathbf{x}$ jsou kladné
- Nechť $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jsou diferencovatelné funkce. Nechť $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ je lokální extrém funkce f za podmínky $g(\mathbf{x}) = 0$. Pak
 - žádná z uvedených možností
 - neplatí když $\nabla f(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$ a $\nabla g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, což nastane když $\mathbf{x}^*$ není regulární bod funkce g (což se v zadání nepředpokládá).
 - neplatí když $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$ a $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, což nastane když f má v $\mathbf{x}^*$ volný lok. extrém.

(d) neplatí, neb $\mathbf{x}^*$ může být lok. extrém f za podm. $g(\mathbf{x}) = 0$ i když $\mathbf{x}^*$ není regulární bod g (i když tam nefunguje metoda Lagr. multiplikátorů, my ale nepředpokládáme že musí fungovat) viz příklady ve skriptech.

(e) neplatí, neb to, zda je daný stacionární bod lok. extrém vázaný rovností, závisí jak na úč. funkci tak na omezení (určitě to neplatí z žádné věty ve skriptech)

(b) Existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}^*)$.

(c) Existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $\nabla g(\mathbf{x}^*) = \lambda \nabla f(\mathbf{x}^*)$.

(d) $\mathbf{x}^*$ je regulární bod funkce g .

fl (e) Hessova matice $f''(\mathbf{x}^*)$ je pozitivně nebo negativně semidefinitní.

7. Která metoda je nejvhodnější na hledání lokálního minima funkce $f(x, y) = (x + y)^2 + (x - \sin y)^2 + (y + \cos x)^2$?

(a) Gaussovu-Newtonovu metoda

Funkce je součet čtverců funkcí, hodí se na ni tedy metoda na toto určená (viz skripta). Newtonova a gradientní metoda jsou také použitelné, ale mají pro tento typ funkcí méně výhodné vlastnosti (viz skripta a přednášky). Odpověď (d) je nesmysl, protože soustava $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$ nemá closed-form řešení (neb bude obsahovat transcendentní funkce a zároveň proměnné x, y), zkuste si ji napsat a řešit!

(b) Newtonovu metoda

(c) gradientní metoda

(d) řešení soustavy rovnic $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$ pomocí eliminace proměnných

ll (e) žádná z uvedených metod není použitelná