

Příklady na této stránce vyřešte. Odpověď včetně stručného zdůvodnění vždy napište do připravené mezery. Odevzdává se pouze tento čistopis (případné koncepty ne).

1. (1 bod) Máme soustavu rovnic

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{y}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

kde $\mathbf{C}$ je čtvercová, $\mathbf{A}$ je obdélníková široká a $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou neznámé vektory. Najděte řešení soustavy. Zajímá nás jen hodnota $\mathbf{x}$, hodnota $\mathbf{y}$ nás nezajímá a musíme ho tedy ze soustavy eliminovat. Výsledek bude jediný vzorec pro výpočet $\mathbf{x}$ pomocí $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C}$, který neobsahuje $\mathbf{y}$. Předpokládejte přitom, že všechny potřebné inverze existují.

První rovnici přepíšeme jako $\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}$, což je ekvivalentní úprava, neb dle předpokladu inverze $\mathbf{C}$ existuje a tedy $\mathbf{C}$ je regulární. Dosadíme za $\mathbf{x}$ do druhé rovnice, vyjádříme $\mathbf{y}$ a dosadíme zpět do rovnice pro $\mathbf{x}$. Výsledek je $\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}$.

2. Zkoumáme závislost výšky dítěte na výšce rodičů. Máme k dispozici vzorek této závislosti pro n dětí, tj. máme trojice $(v_i, m_i, o_i) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, n$, kde v_i je výška dítěte, m_i výška jeho matky a o_i výška jeho otce. Závislost jsme se rozhodli modelovat regresní funkcí $v = a + bm + co + d(m^2 - 1) + e(o^2 - 1)$, kde v, m, o je po řadě výška dítěte, jeho matky a jeho otce. Hledáme optimální parametry $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ této regresní funkce z daných dat ve smyslu nejmenších čtverců.

- a) (1 bod) Tuto optimalizační úlohu zformulujte jako $\min_{a,b,c,d,e \in \mathbb{R}} f(a, b, c, d, e)$, tedy napište vzorec pro účelovou funkci f .

Typická úloha lineární regrese: je $f(a, b, c, d, e) = \sum_{i=1}^n [a + bm_i + co_i + d(m_i^2 - 1) + e(o_i^2 - 1) - v_i]^2$.

- b) (1 bod) Úlohu řešíme tak, že ji převedeme na řešení soustavy lineárních rovnic. Napište tuto soustavu v maticové formě.

Funkci f přepíšeme do maticového tvaru jako $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$, kde

$$\mathbf{x} = (a, b, c, d, e), \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & m_1 & o_1 & m_1^2 - 1 & o_1^2 - 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & m_n & o_n & m_n^2 - 1 & o_n^2 - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = (v_1, \dots, v_n)$$

Dle věty ve skriptech je $\mathbf{x}$ minimem této funkce právě když splňuje normální rovnici $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$.

3. Máme podprostor $U = \text{span}\{(1, 2, 0), (0, 1, -1)\}$ a vektor $\mathbf{x} = (-1, 1, 0)$.

- a) (1 bod) Najděte libovolnou bázi podprostoru $U^\perp$.

Báze je např. $\{(-2, 1, 1)\}$, najdeme řešením homogenní lineární soustavy $(1, 2, 0)^T\mathbf{y} = 0$, $(0, 1, -1)^T\mathbf{y} = 0$.

- b) (1 bod) Najděte ortogonální projekci vektoru $\mathbf{x}$ na podprostor $U^\perp$.

Nechť $\mathbf{y}$ je normalizovaný vektor tvořící bázi $U^\perp$, tj. $\mathbf{y} = (-2, 1, 1)$. Pak projektor na $U^\perp$ je $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{y}\mathbf{y}^T}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}$. Ort. projekce bodu $\mathbf{x}$ na $U^\perp$ je tedy $\mathbf{P}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{x}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{x}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}\mathbf{y}$. Všimněte si: vyhlí jsme se explicitnímu výpočtu matice $\mathbf{y}\mathbf{y}^T$, lépe použít asociativitu maticového násobení a nejdříve spočítat skalární součin $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$.

Numericky: $\frac{\mathbf{y}^T\mathbf{x}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}} = \frac{1}{2}$, tedy kýžená projekce je $\frac{1}{2}\mathbf{y} = (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

- c) (1 bod) Najděte vzdálenost bodu $\mathbf{x}$ od podprostoru U .

To je délka ortog. projekce na $U^\perp$, tj. $\|(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\| = \sqrt{3/2} = \sqrt{6}/2 = 3/\sqrt{6}$.

4. Máme funkci $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$.

- a) (1 bod) Napište funkci ve tvaru $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \alpha$, kde $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ je symetrická, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Doplněním na čtverec získáme $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha = 1$.

- b) (1 bod) Najděte minimum a maximum funkce f , pokud existují. Pokud některé z nich neexistuje, napište to.

Vlastní čísla $\mathbf{A}$ jsou $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, tedy $\mathbf{A}$ je indefinitní (lze zjistit i jiným způsobem než přes vlastní čísla), tedy stacionární bod je sedlo. Minimum ani maximum proto neexistuje.

Odpovědi na následující kvízové příklady VYZNAČTE DO TABULKY KŘÍŽKY. V každém příkladu je právě jedna odpověď správně. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce nechte prázdný. Chcete-li odstranit již vyznačený křížek, políčko s křížkem zcela zaplňte modrou barvou. (Za správnou odpověď je 1 bod, za chybnou odpověď mínus čtvrt bodu, za chybějící odpověď 0 bodů.)

V kvízových příkladech dole je vždy první odpověď správná.

1. Máme soustavu rovnic $(1 - \alpha)\mathbf{Ax} = \mathbf{By}$ s neznámými $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k \times m}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ jsou dané matice.
 - (a) Tato soustava není lineární. Je to soustava polynomiálních rovnic druhého stupně.
 - (b) Tato soustava není lineární. Není to soustava polynomiálních rovnic.
 - (c) Tato soustava je lineární homogenní.
 - (d) Tato soustava je lineární nehomogenní.
- II (e) Žádná z uvedených možností.

Jedná se o polynomiální soustavu 2. stupně, neb levá strana každé rovnice má monomy 1. stupně x_i a monomy druhého stupně (bilineární) $-\alpha x_i$. Kvůli těm bilineárním členům soustava není lineární.

2. Který z následujících výroků platí pro každou obdelníkovou úzkou matici $\mathbf{A}$ a každou ortogonální matici $\mathbf{B}$ (s takovými rozměry, že součin $\mathbf{AB}$ existuje)?
 - (a) $\text{rng}(\mathbf{AB}) = \text{rng} \mathbf{A}$
 - (b) $\text{rng}(\mathbf{AB}) \subseteq \text{rng} \mathbf{B}$
 - (c) $\text{null}(\mathbf{AB}) \supseteq \text{null} \mathbf{A}$
 - (d) $\text{null}(\mathbf{AB}) = \text{null} \mathbf{B}$
- II (e) žádná z uvedených možností

Možnosti (a) a (b) nejdou už kvůli rozměrům matic. Možnost (d) neplatí, protože matice $\mathbf{A}$ je libovolná (např. může být nulová).

3. Lineární zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ **nemůže** být isometrie, jestliže

- (a) $n > m$
- (b) $n \neq m$
- (c) $n < m$
- (d) $n = 1$
- (e) $m = n$

Zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{Ux}$ je isometrie iff $\mathbf{U}$ má ortonormální sloupce. Z toho plyne, že musí být $m \geq n$.

4. Optimální hodnota úlohy $\max\{\|\mathbf{Cx}\|^2 \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1\}$ při dané matici $\mathbf{C}$ je rovna

- (a) největšímu vlastnímu číslu matice $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$
- (b) nejmenšímu vlastnímu číslu matice $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$
- (c) největšímu vlastnímu číslu matice $\mathbf{C}$
- (d) nule

- II (e) žádná z uvedených možností

To je speciální případ prokládání bodů podprostorem (PCA), v tomto případě jednorozměrným. Nebo můžeme napsat $\|\mathbf{Cx}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$ a máme úlohu na nejmenší stopu s maticí $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$.

5. Pro podprostory $X = \text{span}\{(0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ a $Y = \text{span}\{(0, 0, -2), (3, 0, 0)\}$ platí

- (a) $X \cap Y \neq \{\mathbf{0}\}$
- (b) $X \cap Y = \{\mathbf{0}\}$
- (c) $X \perp Y$
- (d) $Y = X^\perp$

- II (e) žádná z uvedených možností

Zjevně mají společný vektor $(1, 0, 0)$.

6. Je dána matice $\mathbf{A}$ s lineárně nezávislými sloupci. Ortogonální projektor na podprostor $(\text{rng} \mathbf{A})^\perp$ je

- (a) $\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$
- (b) $\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{A}^T$
- (c) $\mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}$
- (d) $(\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T)^\perp$

- II (e) žádná z uvedených možností

Projektor na $\text{rng} \mathbf{A}$ je $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$, tedy projektor na $(\text{rng} \mathbf{A})^\perp$ je $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ (obojí je ve skriptech).

7. Jsou dány $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Chceme najít minimum funkce $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ jako $\mathbf{x}^* = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$. Bohužel zjistíme, že matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ je singulární. Co to znamená?

- (a) Úloha má nekonečný počet optimálních řešení, které jsou právě řešeními normální rovnice $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$.
(b) Úloha nemá optimální řešení.
(c) Úloha je nepřipustná.
(d) Úloha má optimální řešení, které ale nelze najít vyřešením normální rovnice $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$.
II (e) žádná z uvedených možností

Věta ve skriptech říká, že $\mathbf{x}$ je minimum funkce f iff $\mathbf{x}$ je řešením normální rovnice (soustava rovnic) $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ a ta má vždy řešení (bez jakýchkoliv podmínek na $\mathbf{A}, \mathbf{b}$). Jelikož je matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ singulární (tedy má netriviální nulový prostor) a soustava má řešení, soustava musí mít nekonečný počet řešení.