

Optimalizace

Lokální extrémý vázané rovnostmi

Tomáš Kroupa, Mirko Navara

15. 4. 2026

FEL ČVUT

Úloha s omezeními ve tvaru rovností

Hledáme extrémy funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ **vázané rovnostmi**

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

($m < n$, „málo“), neboli $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Úloha

min $f(\mathbf{x})$

za podmíněk $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Předpokládáme f, \mathbf{g} **spojitě diferencovatelné**.

A. Když máme štěstí, podaří se nám z každé omezující rovnice vyjádřit jednu proměnnou, dosadíme ji a zbyte hledání **volného** extrému funkce $n - m$ proměnných. Nebo se nám obecněji podaří prostor možných řešení vyjádřit pomocí menšího počtu jiných volných proměnných.

B. Když štěstí nemáme, pomůžeme si jinak.

Ve skutečnosti nás nemusí zajímat zobrazení \mathbf{g} , ale množina všech přípustných řešení úlohy s omezeními ve tvaru rovností:

$$X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Tu lze popsat různými soustavami rovnic. Nezmění se, pokud omezení vynásobíme regulární maticí \mathbf{R} na

$$\mathbf{R}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Fyzikální model úlohy

Skalární kritérium f si můžeme představit jako „energii“ nebo „potenciál“.

Jeho derivaci f' můžeme interpretovat jako „sílu“.

V optimu (tedy stacionárním bodě) nás „nikam netáhne“.

(Nemáme „setrvačnost“.)¹

Přidáme-li omezení, můžeme se pohybovat jen v rámci množiny X , i když nás derivace f' „táhne“ jinam.

Ve fyzice se to modeluje další silou, kterou způsobují omezující podmínky. Podmínka $g_i(\mathbf{x}) = 0$ vytváří složku ve směru $g'_i(\mathbf{x})$, jejíž velikost je určena (Lagrangeovým) koeficientem λ_i .

V optimu **má být** „výslednice sil“ nulová, tj.

$$\mathbf{0} = f'(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g'_i(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}'(\mathbf{x}), \text{ kde } \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m).$$

¹Metoda sdružených gradientů něco jako „setrvačnost“ imituje.

Speciální případy 2

- **afinní** kritérium, **afinní** omezení - není co řešit,
- **obecné** kritérium, **afinní** omezení - to bude rozcvička a inspirace,
- **afinní** kritérium, **obecné** omezení - ponecháme jako speciální případ následujícího:
- **obecné** kritérium, **obecné** omezení - to je cíl.

Speciální případ: **afinní** omezení

Úloha

$$\min \quad f(\mathbf{x})$$

$$\text{za podmíněk} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{d} = \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$.

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{C}, \text{ neboli } \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T.$$

Tvrzení

Pro každý lokální extrém \mathbf{x} této úlohy existuje $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ tak, že

$$f'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \underbrace{\mathbf{g}'(\mathbf{x})}_{\mathbf{C}} = \mathbf{0}, \quad \text{tj.}$$

$$f'(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}, \quad \text{neboli } \nabla f(\mathbf{x}) = -\mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda}.$$

Lagrangeovy multiplikátory

Vektor λ bude (i v obecnějším případě) vektor **Lagrangeových multiplikátorů**.

Jejich hodnoty poslouží jen během výpočtu, na jeho konci nás nezajímají.

Na jejich znaménku nezáleží; můžeme si je vynásobit jakýmkoli nenulovým číslem (i každý jiným).

Mohli bychom je i vynásobit **regulární** maticí \mathbf{R} a použít $\mathbf{R}\lambda$ místo λ ; množina řešení takto upravených omezení se tím nezmění.

Ještě speciálnější případ:

Úloha na nejmenší normu řešení nehomogenní soustavy

Úloha

$$\min \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{x},$$

$$\text{za podmíněk} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \mathbf{x} - \mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

Podmínky optimality (s využitím předchozích)

$$\underbrace{f'(\mathbf{x})^T}_{\mathbf{x}} = \nabla f(\mathbf{x}) = -\mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{d}.$$

Má-li \mathbf{C} lineárně nezávislé řádky, pak podmínka optimality je $\mathbf{x} = \mathbf{C}^+ \mathbf{d} = \mathbf{C}^T \underbrace{(\mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{-1}}_{-\boldsymbol{\lambda}} \mathbf{d}$ (kolmý průmět počátku; \mathbf{C}^+ je *pravá* pseudoinverze).

Méně speciální případ:

Lineární úloha nejmenších čtverců s lineárními omezeními

Úloha

$$\min \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}),$$

$$\text{za podmíněk} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{Cx} - \mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

Podmínky optimality (s využitím předchozích)

$$\underbrace{f'(\mathbf{x})^T}_{\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} - \mathbf{A}^T \mathbf{b}} = -\mathbf{C}^T \lambda,$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} + \mathbf{C}^T \lambda = \mathbf{A}^T \mathbf{b},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}.$$

Obecně: Metoda Lagrangeových multiplikátorů

Vyjdeme z lineární aproximace vazebních podmínek

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{y}) &\approx \underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{x})}_0 + \mathbf{g}'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{g}'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ &= \underbrace{\mathbf{g}'(\mathbf{x})}_{\mathbf{C}} \mathbf{y} - \underbrace{\mathbf{g}'(\mathbf{x})\mathbf{x}}_{\mathbf{d}} = \mathbf{C}\mathbf{y} - \mathbf{d}. \end{aligned}$$

Jako dříve, zavedeme **Lagrangeovy multiplikátory**

$\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ a budeme řešit soustavu rovnic

$$f'(\mathbf{x}) + \lambda^T \underbrace{\mathbf{C}}_{\mathbf{g}'(\mathbf{x})} = \mathbf{0},$$

To lze interpretovat také jako hledání stacionárních bodů (a volných extrémů) **Lagrangeovy funkce** $L: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(\mathbf{x}, \lambda) := f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Dvě interpretace Lagrangeových multiplikátorů

Lagrangeovy multiplikátory můžeme chápat jako

- argumenty Lagrangeovy funkce $L: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \mapsto L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

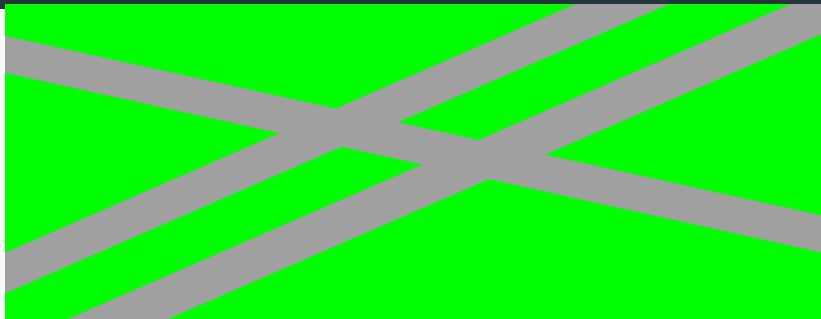
kde $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = (x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$,

- parametry funkce $\lambda L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \lambda L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$.

$$L'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = (f'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{g}'(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})^\top),$$

$$\lambda L'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{g}'(\mathbf{x}).$$

Rovnoběžky a kolmice



Na obrázku je afinní projekce 3 silnic v rovině.

Dovedeme poznat, které jsou rovnoběžné? Ano.

Dovedeme poznat, které jsou kolmé? **Ne!**

Závěr: Je jednoznačné, které směry jsou **tečné** k omezením, ale nikoli, které jsou k nim **kolmé** (normálové). Ty závisí na volbě souřadnic, v nichž úlohu řešíme. Kolmost nemusí mít jasný význam, pokud např. neznámé mají různý fyzikální rozměr.

$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ je množina všech přípustných řešení.

Definice

Vektor $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ je **tečný k množině** X v bodě $\mathbf{x} \in X$, pokud je v \mathbf{x} tečným vektorem nějaké hladké křivky ležící v X .

Tečný prostor $T_{\mathbf{x}} :=$ prostor vektorů tečných k X v bodě \mathbf{x} .

$$\forall \mathbf{t} \in T_{\mathbf{x}} \forall i : \mathbf{t} \perp \mathbf{g}'_i(\mathbf{x})^T = \nabla g_i(\mathbf{x}),$$

jinak by \mathbf{t} nebyl tečný k vrstevnici funkce g_i . Stručněji

$$T_{\mathbf{x}} \subseteq \text{null } \mathbf{g}'(\mathbf{x}).$$

Často je $T_{\mathbf{x}}$ lineární (a obvykle $\dim T_{\mathbf{x}} = n - m$), ale nemusí být.

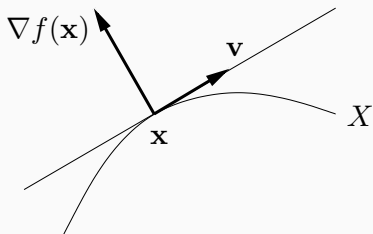
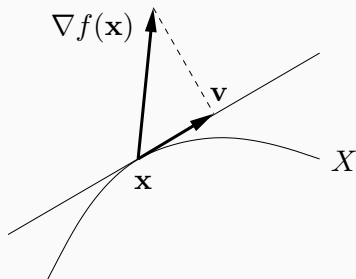
Příklad: $\mathbf{g}(x, y) = x \cdot y$ v bodě $(0, 0)$; $X = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R} = T_{\mathbf{x}}$.

Lagrangeova funkce na **tečném prostoru**

Nechť funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v \mathbf{x} **vázaný extrém** na X .

$$\forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}} : \mathbf{v} \perp f'(\mathbf{x})^T = \nabla f(\mathbf{x}),$$

jinak by ze směrů $\pm \mathbf{v}$ byl jeden vzestupný a jeden sestupný.



Lagrangeova funkce na **tečném prostoru**

Nechť funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v \mathbf{x} **vázaný extrém** na X .

$$\forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}} : \mathbf{v} \perp f'(\mathbf{x})^T = \nabla f(\mathbf{x}),$$

jinak by ze směrů $\pm \mathbf{v}$ byl jeden vzestupný a jeden sestupný.

Stručněji $T_{\mathbf{x}} \perp f'(\mathbf{x})^T$, též

$$T_{\mathbf{x}} \subseteq \text{null } f'(\mathbf{x}),$$

což spolu s předchozím

$$T_{\mathbf{x}} \subseteq \text{null } \mathbf{g}'(\mathbf{x}),$$

dává

$$T_{\mathbf{x}} \subseteq \text{null}(f'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}'(\mathbf{x})) = \text{null } \boldsymbol{\lambda}^T L'(\mathbf{x})$$

pro všechna $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$. Tedy $\boldsymbol{\lambda}^T L'(\mathbf{x})$ má **nulovou derivaci** ve všech směrech z **tečného prostoru** (i jeho lin. obalu).

Prostor generovaný gradienty omezení

$$\begin{aligned}G_{\mathbf{x}} &:= \text{span}\{\mathbf{g}'_1(\mathbf{x})^T, \dots, \mathbf{g}'_m(\mathbf{x})^T\} = \text{span}\{\nabla g_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x})\} = \\&= \text{rng } \mathbf{g}'(\mathbf{x})^T = \text{rng } \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \\&= \{\mathbf{g}'(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m\} \\&= \{\mathbf{v} \in X \mid \exists \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{v} = \mathbf{g}'(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda}\} \subseteq T_{\mathbf{x}}^{\perp}.\end{aligned}$$

$G_{\mathbf{x}}$ je lineární prostor parametrizovaný Lagrangeovými multiplikátory.

$\dim G_{\mathbf{x}} \leq m$, $G_{\mathbf{x}} \perp T_{\mathbf{x}}$, tedy $G_{\mathbf{x}} \subseteq T_{\mathbf{x}}^{\perp}$, ale může být $G_{\mathbf{x}} \subsetneq T_{\mathbf{x}}^{\perp}$ (a to bude problém).

Lagrangeova funkce na prostoru generovaném gradienty omezení

$$G_{\mathbf{x}} := \text{span}\{\mathbf{g}'_1(\mathbf{x})^T, \dots, \mathbf{g}'_m(\mathbf{x})^T\} = \{\mathbf{g}'(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m\} \subseteq T_{\mathbf{x}}^{\perp}.$$

Jestliže $f'(\mathbf{x})^T \in G_{\mathbf{x}}$, pak pro $\mathbf{v} := -f'(\mathbf{x})^T \in G_{\mathbf{x}}$

$$\lambda L'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

pro nějaké $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$; λL má nulovou derivaci ve všech směrech

$$\mathbf{t} \in T_{\mathbf{x}},$$

$$\mathbf{v} \in G_{\mathbf{x}}, \quad \text{a tedy i}$$

$$\uparrow \quad c\mathbf{t} + d\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}} + G_{\mathbf{x}}, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Jestliže $T_{\mathbf{x}} + G_{\mathbf{x}} = \mathbb{R}^n$, pak řešení \mathbf{x} je stacionární bod funkce λL .

Regulární body

Odvodili jsme postup pro hledání vázaných extrémů v bodech $\mathbf{x} \in X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$, splňujících $T_{\mathbf{x}} + G_{\mathbf{x}} = \mathbb{R}^n$, kde

$T_{\mathbf{x}}$ = prostor vektorů tečných k X v bodě \mathbf{x} ,

$G_{\mathbf{x}} = \text{span}\{g'_1(\mathbf{x})^T, \dots, g'_m(\mathbf{x})^T\}$.

Potřebnou podmínku zformulujeme pro obecné body:

Definice

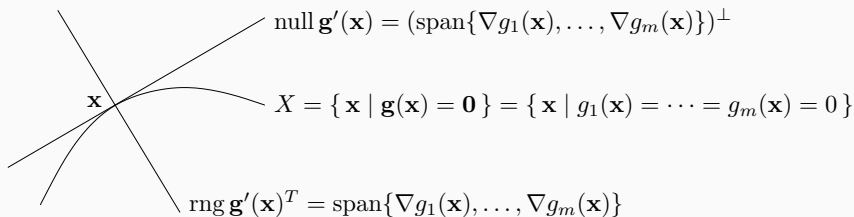
Bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je **regulární bod zobrazení $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$** , jestliže zobrazení \mathbf{g} je v bodě \mathbf{x} spojitě diferencovatelné a Jacobiho matice $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$ má lineárně nezávislé řádky.

- Stačí pouze \mathbf{x} , \mathbf{g} .
- Nepotřebujeme f .
- Nestačí \mathbf{x} , X .

Tečný a ortogonální prostor v regulárních bodech

V regulárním bodě $\mathbf{x} \in X$ zobrazení \mathbf{g} je:

- **tečný prostor** $T_{\mathbf{x}} = \text{null } \mathbf{g}'(\mathbf{x})$
- **ortogonální prostor** $T_{\mathbf{x}}^{\perp} = (\text{null } \mathbf{g}'(\mathbf{x}))^{\perp} = \text{rng } \mathbf{g}'(\mathbf{x})^T = G_{\mathbf{x}}$



Podmínky prvního řádu pro vázané extrémy

$$\lambda L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Věta

Nechť funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jsou spojitě diferencovatelné v regulárním bodě \mathbf{x} zobrazení \mathbf{g} . Jestliže \mathbf{x} je lokální extrém funkce f za podmínky $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_m$, pak existuje $\lambda \in \mathbb{R}^m$, splňující

$$\lambda L'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_n,$$

neboli

$$L'(\mathbf{x}, \lambda) = (f'(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}'(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})^T) = \mathbf{0}_{n+m}.$$

Podmínky **druhého** řádu pro **volné** extrémy (opakování)

Věta

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in X$ je vnitřní bod množiny X a $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná v \mathbf{x} . Je-li \mathbf{x} stacionární bod funkce f , pak:

$f''(\mathbf{x})$ je pozitivně definitní

↓ ↗

\mathbf{x} je lokální minimum

↓ ↗

$f''(\mathbf{x})$ je pozitivně semidefinitní

Matice \mathbf{C} je **pozitivně definitní na lineárním podprostoru Y** , jestliže $\forall \mathbf{x} \in Y \setminus \{\mathbf{0}\} : \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} > 0$.

Podmínky druhého řádu pro vázané extrém

Věta

Nechť $\mathbf{x} \in X$ a funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jsou dvakrát diferencovatelné v \mathbf{x} . Nechť \mathbf{x} je regulární bod zobrazení \mathbf{g} a stacionární bod Lagrangeovy funkce $\lambda L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Pak

$\lambda L''(\mathbf{x})$ je pozitivně definitní na $\text{null } \mathbf{g}'(\mathbf{x})$

⇓ ✗

\mathbf{x} je vázané minimum f

⇓ ✗

$\lambda L''(\mathbf{x})$ je pozitivně semidefinitní na $\text{null } \mathbf{g}'(\mathbf{x})$

kde $\lambda L''(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{x},\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} L(\mathbf{x}, \lambda) = f''(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i''(\mathbf{x})$.

Na $L_{\lambda,\lambda}(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} L(\mathbf{x}, \lambda)$, $L_{\mathbf{x},\lambda}(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x} \partial \lambda} L(\mathbf{x}, \lambda)$ nezáleží.

Co s body, které nejsou regulární?

V optimu **musí být** „výslednice sil“ nulová.

Pokud $T_x + G_x \subsetneq \mathbb{R}^n = T_x + T_x^\perp$, potřebujeme ještě „jinou sílu“, která to zajistí; je kolmá na T_x , ale není z G_x , takže Lagrangeovy multiplikátory to neřeší.

- Pokud je neregulárních bodů málo, vyzkoušíme je všechny.
- Pokud je některé $g'_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, zkusme ho rozložit na součin a vyšetřit každý činitel zvlášť.
- Chybějící tečné vektory můžeme najít sami a zpracovat stejně jako gradienty omezujících funkcí.
- Místo toho můžeme odvodit jiné omezující funkce, určující stejný obor X .

Speciální případ: **afinní** omezení (opak.)

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \mathbf{x} - \mathbf{d}, \quad \mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{C}, \quad \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T.$$

1. Jsou-li řádky matice \mathbf{C} (neboli $\nabla g_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x})$) **lineárně nezávislé**, pak jsou všechny body regulární.
2. Jsou-li řádky matice \mathbf{C} (neboli $\nabla g_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x})$) **lineárně závislé**, pak není žádný bod regulární a záleží na \mathbf{d} :
 - $X = \emptyset$: není co řešit.
 - $X \neq \emptyset$: můžeme z $[\mathbf{C} \ \mathbf{d}]$ vynechat LZ řádky a pokračovat dle bodu 1, nebo na to nedbat a řešit původní soustavu

$$f'(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}, \quad \text{neboli } \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda}, \\ \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{d}.$$

(To **pro nelineární podmínky nelze**.)

Pro velký počet omezujících funkcí je těžké zajistit nebo ověřit regularitu.

Můžeme doufat, že množina bodů, v nichž je regularita porušena, je „řídká“, takže i když přes ni projdeme, nezůstaneme v ní.

Alternativa: Metoda projektovaných gradientů

Někdy dovedeme k libovolnému bodu z \mathbb{R}^n *snadno* najít „nejbližší“ přípustný z X („projekci“ na X), např. pro

$$X_1 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} = \{\mathbf{x} \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i \leq x_i \leq b_i\},$$

$$X_2 = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| \leq r\},$$





$$X_3 = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = r\}.$$

Pak můžeme střídat kroky:

1. Postup ve směru $\nabla f(\mathbf{x})$ bez respektování omezujících podmínek.
2. Projekce na X .

Problém: V blízkosti extrému nás 1. krok zavádí dál od cíle.

Reference

-  T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 8). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 17. 10. 2022. https://cw.fel.cvut.cz/wiki/_media/courses/b0b33opt/opt.pdf
-  S. Boyd, L. Vandenberghe. *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press, 2018.
-  J. Hamhalter a J. Tišer. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. FEL ČVUT, 2005.
<https://math.fel.cvut.cz/en/people/tiser/dipocet.pdf>
-  M. Navara. *Matematika spojitého světa*. Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2011.
https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/MSS/MSS_print.pdf