LGR — Sémantika predikátové logiky

Matěj Dostál

Úloha 1. Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{R\}, \quad ar(R) = 2 \\ \mathsf{Func} &= \{f\}, \quad ar(f) = 1 \\ \mathsf{Kons} &= \emptyset \end{aligned}$$

Uvažujte formuli φ:

$$\forall x \; R(f(x), y)$$

1. Nalezněte interpretaci jazyka $\mathcal{L}$ a kontext proměnných ρ tak, aby v dané interpretaci a kontextu proměnných byla formule φ *pravdivá*.
2. Nalezněte interpretaci jazyka $\mathcal{L}$ a kontext proměnných ρ tak, aby v dané interpretaci a kontextu proměnných byla formule φ *nepravdivá*.

Úloha 2. Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{P\}, \quad ar(P) = 2 \\ \mathsf{Func} &= \emptyset \\ \mathsf{Kons} &= \emptyset \end{aligned}$$

Uvažujte formuli φ:

$$\forall x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge (P(x, z) \Rightarrow P(z, x)))$$

Ve kterých z následujících intepretací je φ pravdivá?

1. Universem U je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$. Predikátový symbol P interpretujeme následovně:

$$[\![P]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\}.$$

2. Universem U je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$. Predikátový symbol P interpretujeme následovně:

$$[\![P]\!] = \{(m, 2 \cdot m) \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

3. Universem U je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$. Predikátový symbol P interpretujeme následovně:

$$[\![P]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n + 1\}.$$

Úloha 3. Uvažujme jazyk z předchozí úlohy. Nalezněte model sentence $\forall x \neg P(x, x)$. Nalezněte interpretaci, která není modelem dané sentence.

Úloha 4. Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{R\}, \quad ar(R) = 2 \\ \mathsf{Func} &= \emptyset \\ \mathsf{Kons} &= \emptyset \end{aligned}$$

Uvažujte formuli φ:

$$\forall x \forall y \exists z (R(x, y) \Rightarrow R(y, z))$$

1. Uvažujme interpretaci s universem $A = \{a, b, c, d\}$, kde

   $$[\![R]\!] = \{(b, c), (b, b), (b, a)\}.$$

   Je v této interpretaci φ pravdivá? Pečlivě zdůvodněte svou odpověď.

2. Uvažujme interpretaci s universem $A = \{a, b, c\}$, kde

   $$[\![R]\!] = \{(b, c), (a, b), (c, b)\}.$$

   Je v této interpretaci φ pravdivá? Pečlivě zdůvodněte svou odpověď.

Úloha 5. Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{P, Q\}, \quad ar(P) = ar(Q) = 1 \\ \mathsf{Func} &= \emptyset \\ \mathsf{Kons} &= \emptyset \end{aligned}$$

Uvažujte sentenci φ:

$$\varphi = \forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)).$$

1. Rozhodněte, zda je φ splnitelná.

2. Rozhodněte, zda je φ tautologie.

Úloha 6. Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{S\}, \quad ar(P) = 1 \\ \mathsf{Func} &= \{+\}, \quad ar(+) = 2 \\ \mathsf{Kons} &= \emptyset \end{aligned}$$

Dovolme si mírnou relaxaci syntaxe a zapisujme funkční symbol $+$ infixně, nikoli prefixně. To znamená, jsou-li t_1 a t_2 termy, píšeme $t_1 + t_2$ místo formálně správného $+(t_1, t_2)$.

1. Rozhodněte, zda je splnitelná množina sentencí

$$S = \{\forall x \forall y (x + y = y + x),\ \forall x (S(x) \Rightarrow S(x + x))\}$$

2. Rozhodněte, zda je sentence

$$\varphi = \neg \exists x (x + x = x)$$

   sémantickým důsledkem množiny sentencí S.

Úloha 7. Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{R\}, \quad ar(R) = 2 \\ \mathsf{Func} &= \emptyset \\ \mathsf{Kons} &= \emptyset \end{aligned}$$

Mějme tři sentence

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \forall x R(x, x) \\ \varphi_2 &= \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow R(y, x)) \\ \varphi_3 &= \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z)) \end{aligned}$$

Ukažte, že žádná z daných třech sentencí není sémantickým důsledkem ostatních dvou.

Úloha 8. Ať φ, ψ a χ jsou sentence nějakého jazyka predikátové logiky.

1. Pokud $\varphi \models \psi$, je nutně pravda, že $\neg\varphi \not\models \psi$?

2. Pokud $\varphi \wedge \chi \models \psi$, je nutně pravda, že $\varphi \models \psi$ a $\chi \models \psi$?

3. Pokud $\varphi \models \psi$ nebo $\chi \models \psi$, je nutně pravda, že $\varphi \vee \chi \models \psi$?