Příklady k procvičení přirozené dedukce v predikátové logice

Kvantifikátor	Zavedení kvantifikátoru	Eliminace kvantifikátoru
$\forall x$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\vdots \\ \varphi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x \varphi}\ \mathrm{i}\forall x$	$\dfrac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]}\ \mathrm{e}\forall x$
$\exists x$	$\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi}\ \mathrm{i}\exists x$	$\dfrac{\exists x \varphi \qquad \boxed{\begin{array}{ll} x_0 : & \varphi[x_0/x] \\ & \vdots \\ & \chi \end{array}}}{\chi}\ \mathrm{e}\exists x$

	Zavedení	Eliminace	Symetrie	Transitivita
Pravidlo pro rovnost	$\dfrac{}{t = t}\ \mathrm{i}{=}$	$\dfrac{t_1 = t_2 \qquad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]}\ \mathrm{e}{=}$	$\dfrac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}\ \mathrm{sym}{=}$	$\dfrac{t_1 = t_2 \qquad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}\ \mathrm{trans}{=}$

Ve všech pravidlech předpokládáme, že substituovaný term je volný pro danou proměnnou v dané formuli. V používaných termech se nesmí objevovat nedeklarované proměnné.

Ve všech příkladech pracujeme s takovým jazykem predikátové logiky, aby všechny předpoklady a závěry byly sentencemi predikátové logiky v daném jazyce.

1 Obecný kvantifikátor

1.1 Unární predikáty

1. $\forall x P(x) \vdash \forall y P(y)$

1.	$\forall x P(x)$	1
2.	x_0	D
3.	$P(x_0)$	e$\forall$x, 1
4.	$\forall y P(y)$	i$\forall$y, 2–3

2. $\vdash \forall x (P(x) \Rightarrow P(x))$

1.	x_0	D
2.	$P(x_0)$	P
3.	$P(x_0) \Rightarrow P(x_0)$	i$\Rightarrow$, 2–2
4.	$\forall x (P(x) \Rightarrow P(x))$	i$\forall$x, 1–3

3. $\forall x (P(a) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(a) \Rightarrow \forall z Q(z)$

1.	$\forall x (P(a) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$P(a)$	P
3.	z_0	D
4.	$P(a) \Rightarrow Q(z_0)$	e$\forall$x, 1
5.	$Q(z_0)$	e$\Rightarrow$, 2, 4
6.	$\forall z Q(z)$	i$\forall$z, 3–5
7.	$P(a) \Rightarrow \forall z Q(z)$	i$\Rightarrow$, 2–6

4. $\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y) \vdash \forall z (P(z) \wedge Q(z))$

1.	$\forall x P(x) \land \forall y Q(y)$	P
2.	$\forall x P(x)$	$e\land_1$, 1
3.	$\forall y Q(y)$	$e\land_2$, 1
4.	z_0	D
5.	$P(z_0)$	$e\forall x$, 2
6.	$Q(z_0)$	$e\forall y$, 3
7.	$P(z_0) \land Q(z_0)$	$i\land$, 6, 7
8.	$\forall z(P(z) \land Q(z))$	$i\forall z$, 5–8

5. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall y P(y) \Rightarrow \forall z Q(z)$

1.	$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$\forall y P(y)$	P
3.	z_0	D
4.	$P(z_0)$	$e\forall y$, 3
5.	$P(z_0) \Rightarrow Q(z_0)$	$e\forall x$, 1
6.	$Q(z_0)$	$e\Rightarrow$, 4, 5
7.	$\forall z Q(z)$	$i\forall z$, 3–6
8.	$\forall y P(y) \Rightarrow \forall z Q(z)$	$i\Rightarrow$, 2–7

6. $\forall z(P(z) \land Q(z)) \vdash \forall y P(y) \land \forall y Q(y)$

1.	$\forall z(P(z) \land Q(z))$	P
2.	y_0	D
3.	$P(y_0) \land Q(y_0)$	$e\forall z$, 1
4.	$P(y_0)$	$e\land_1$, 3
5.	$\forall y P(y)$	$i\forall y$, 2–4
6.	y_0	D
7.	$P(y_0) \land Q(y_0)$	$e\forall z$, 1
8.	$Q(y_0)$	$e\land_2$, 7
9.	$\forall y Q(y)$	$i\forall y$, 6–8
10.	$\forall y P(y) \land \forall y Q(y)$	$i\land$, 5, 9

7. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)),\ \forall x \neg Q(x) \vdash \forall x \neg P(x)$

1.	$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$\forall x \neg Q(x)$	P
3.	x_0	D
4.	$P(x_0)$	P
5.	$P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$	e$\forall x$, 1
6.	$Q(x_0)$	e$\Rightarrow$, 4, 5
7.	$\neg Q(x_0)$	e$\forall x$, 2
8.	$\perp$	e$\neg$, 6, 7
9.	$\neg P(x_0)$	i$\neg$, 4–8
10.	$\forall x \neg P(x)$	i$\forall x$, 3–9

8. $\forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \vdash \forall z(P(z) \vee Q(z))$

1.	$\forall x P(x) \vee \forall y Q(y)$	P
2.	z_0	D
3.	$\forall x P(x)$	P
4.	$P(z_0)$	e$\forall x$, 3
5.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	i$\vee_1$, 4
6.	$\forall y Q(y)$	P
7.	$Q(z_0)$	e$\forall y$, 6
8.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	i$\vee_2$, 7
9.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	e$\vee$, 1, 3–5, 6–8
10.	$\forall z(P(z) \vee Q(z))$	i$\forall z$, 3–9

9. $\forall x \forall y(P(x) \Rightarrow Q(y)) \vdash \forall x(P(x) \Rightarrow \forall z Q(z))$

1.	$\forall x \forall y(P(x) \Rightarrow Q(y))$	P
2.	x_0	D
3.	$P(x_0)$	P
4.	z_0	D
5.	$\forall y(P(x_0) \Rightarrow Q(y))$	e$\forall x$, 1
6.	$P(x_0) \Rightarrow Q(z_0)$	e$\forall y$, 5
7.	$Q(z_0)$	e$\Rightarrow$, 3, 6
8.	$\forall z Q(z)$	i$\forall z$, 4–7
9.	$P(x_0) \Rightarrow \forall z Q(z)$	i$\Rightarrow$, 4–8
10.	$\forall x(P(x) \Rightarrow \forall z Q(z))$	i$\forall x$, 3–9

10. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \vdash \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$

1.	$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x))$	P
3.	x_0	D
4.	$P(x_0)$	P
5.	$P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$	e$\forall x$, 1
6.	$Q(x_0)$	e$\Rightarrow$, 4, 5
7.	$Q(x_0) \Rightarrow R(x_0)$	e$\forall x$, 2
8.	$R(x_0)$	e$\Rightarrow$, 6, 7
9.	$P(x_0) \Rightarrow R(x_0)$	i$\Rightarrow$, 4–8
10.	$\forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$	i$\forall x$, 4–9

11. $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg\forall x P(x) \vdash \neg\forall x \neg Q(x)$

1.	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	P
2.	$\neg\forall x P(x)$	P
3.	$\forall x \neg Q(x)$	P
4.	x_0	D
5.	$P(x_0) \vee Q(x_0)$	e$\forall x$, 1
6.	$\neg Q(x_0)$	e$\forall x$, 3
7.	$P(x_0)$	P
8.	$Q(x_0)$	P
9.	$\perp$	e$\neg$, 8, 3
10.	$P(x_0)$	e$\perp$, 9
11.	$P(x_0)$	e$\vee$, 5, 7–7, 8–10
12.	$\forall x P(x)$	i$\forall x$, 4–11
13.	$\perp$	e$\neg$, 12, 2
14.	$\neg\forall x \neg Q(x)$	i$\neg$, 3–13

12. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y))$

1.	$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$	P
2.	x_0	D
3.	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	e$\forall x$, 1
4.	$P(x_0)$	e$\wedge_1$, 3
5.	y_0	D
6.	$P(y_0) \wedge Q(y_0)$	e$\forall x$, 1
7.	$Q(y_0)$	e$\wedge_2$, 6
8.	$P(x_0) \wedge Q(y_0)$	i$\wedge$, 4, 7
9.	$\forall y(P(x_0) \wedge Q(y))$	i$\forall y$, 5–8
10.	$\forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y))$	i$\forall x$, 2–9

1.2 Binární predikáty

1. $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x R(x, x)$

1.	$\forall x \forall y R(x, y)$	P
2.	x_0	D
3.	$\forall y R(x_0, y)$	$e\forall x$, 1
4.	$R(x_0, x_0)$	$e\forall y$, 3
5.	$\forall x R(x, x)$	$i\forall x$, 2–4

2. $\forall x \neg \forall y R(x, y) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y R(x, y)$

1.	z_0	D
2.	$\forall x \neg \forall y R(x, y)$	P
3.	$\forall x \forall y R(x, y)$	P
4.	$\forall y R(z_0, y)$	$e\forall x$, 3
5.	$\neg \forall y R(z_0, y)$	$e\forall x$, 2
6.	$\perp$	$e\neg$, 4, 5
7.	$\neg \forall x \forall y R(x, y)$	$i\neg$, 3–6
8.		

3. $\forall x R(x, x) \vdash \forall x \neg \forall y \neg R(x, y)$

1.	$\forall x R(x, x)$	P
2.	x_0	D
3.	$\forall y \neg R(x_0, y)$	P
4.	$R(x_0, x_0)$	$e\forall x$, 1
5.	$\neg R(x_0, x_0)$	$e\forall y$, 3
6.	$\perp$	$e\neg$, 4, 5
7.	$\neg \forall y \neg R(x_0, y)$	$i\neg$, 3–6
8.	$\forall x \neg \forall y \neg R(x, y)$	$i\forall x$, 2–7

4. $\forall x \neg R(x, x) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y (R(x, y) \lor R(y, x))$

1.	z_0	D
2.	$\forall x \neg R(x,x)$	P
3.	$\forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x))$	P
4.	$\neg R(z_0, z_0)$	e$\forall x$, 2
5.	$\forall y (R(x_0, y) \vee R(y, x_0))$	e$\forall x$, 3
6.	$R(x_0, x_0) \vee R(x_0, x_0)$	e$\forall y$, 5
7.	$R(x_0, x_0)$	P
8.	$\perp$	e$\neg$, 7, 4
9.	$R(x_0, x_0)$	P
10.	$\perp$	e$\neg$, 9, 4
11.	$\perp$	e$\vee$, 6, 7–8, 9–10
12.	$\neg \forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x))$	i$\neg$, 3–1
13.		

5. vynecháno

6. $\forall x R(x,x) \vdash \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow \neg \forall z \neg (R(x,z) \wedge R(z,y)))$

1.	$\forall x R(x,x)$	P
2.	x_0	D
3.	y_0	D
4.	$R(x_0, y_0)$	P
5.	$\forall z \neg (R(x_0, z) \wedge R(z, y_0))$	P
6.	$\neg (R(x_0, x_0) \wedge R(x_0, y_0))$	e$\forall z$, 5
7.	$R(x_0, x_0)$	e$\forall x$, 1
8.	$R(x_0, x_0) \wedge R(x_0, y_0)$	i$\wedge$, 7, 4
9.	$\perp$	e$\neg$, 8, 5
10.	$\neg \forall z \neg (R(x_0, z) \wedge R(z, y_0))$	i$\neg$, 5–9
11.	$R(x_0, y_0) \Rightarrow \neg \forall z \neg (R(x_0, z) \wedge R(z, y_0))$	
12.	$\forall y (R(x_0, y) \Rightarrow \neg \forall z \neg (R(x_0, z) \wedge R(z, y)))$	
13.	$\forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow \neg \forall z \neg (R(x,z) \wedge R(z,y)))$	

7. $\forall x \forall y R(x,y) \vdash \forall x (R(x,x) \wedge \forall y R(y,x))$

1.	$\forall x \forall y R(x,y)$	P
2.	x_0	D
3.	$\forall y R(x_0,y)$	$e\forall x$, 1
4.	$R(x_0,x_0)$	$e\forall y$, 3
5.	y_0	D
6.	$\forall y R(y_0,y)$	$e\forall x$, 1
7.	$R(y_0,x_0)$	$e\forall y$, 6
8.		
9.	$\forall y R(y,x_0)$	$i\forall y$, 5–7
10.	$R(x_0,x_0) \wedge \forall y R(y,x_0)$	$i\wedge$, 4, 8
11.	$\forall x(R(x,x) \wedge \forall y R(y,x))$	$i\forall x$, 2–9

8. $\forall x \forall y R(x,y) \vdash \forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x))$

1.	$\forall x \forall y R(x,y)$	P
2.	x_0	D
3.	y_0	D
4.	$\forall y R(x_0,y)$	$e\forall x$, 1
5.	$R(x_0,y_0)$	$e\forall y$, 4
6.	$\forall y R(y_0,y)$	$e\forall x$, 1
7.	$R(y_0,x_0)$	$e\forall y$, 6
8.	$R(x_0,y_0) \wedge R(y_0,x_0)$	$i\wedge$, 5, 7
9.	$\forall y(R(x_0,y) \wedge R(y,x_0))$	$i\forall y$, 3–8
10.	$\forall x \forall y(R(x,y) \wedge R(y,x))$	$i\forall x$, 2–9

2 Existenční kvantifikátor

2.1 Unární predikáty

1. $\exists x P(x) \vdash \exists y P(y)$

1.	$\exists x P(x)$	P
2.	$x_0 : P(x_0)$	W
3.	$\exists y P(y)$	$i\exists y$, 2
4.	$\exists y P(y)$	$e\exists y$, 1, 2–3

2. $\neg\exists x P(x) \vdash_{\{z_0\}} \exists x \neg P(x)$

1.	z_0	D
2.	$\neg\exists x P(x)$	P
3.	$P(z_0)$	P
4.	$\exists x P(x)$	i$\exists$x, 3
5.	$\perp$	e$\neg$, 3, 2
6.	$\neg P(z_0)$	i$\neg$, 3–5
7.	$\exists x \neg P(x)$	i$\exists$x, 6
8.		

3. $\exists x(P(a) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(a) \Rightarrow \exists y Q(y)$

1.	$\exists x(P(a) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$P(a)$	P
3.	$x_0 : P(a) \Rightarrow Q(x_0)$	
4.		
5.		

4. $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists y P(y) \wedge \exists z Q(z)$

1.	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	P
2.	$x_0 : P(x_0) \wedge Q(x_0)$	W
3.	$P(x_0)$	e$\wedge_1$, 2
4.	$Q(x_0)$	e$\wedge_2$, 2
5.	$\exists y P(y)$	i$\exists$y, 2
6.	$\exists z Q(z)$	i$\exists$z, 3
7.	$\exists y P(y) \wedge \exists z Q(z)$	i$\wedge$, 4, 5
8.	$\exists y P(y) \wedge \exists z Q(z)$	e$\exists$x, 1, 2–7

5. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists y P(y) \vee \exists z Q(z)$

1.	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	P
2.	$x_0 : P(x_0) \vee Q(x_0)$	W
3.	$P(x_0)$	P
4.	$\exists y P(y)$	i$\exists y$
5.	$\exists y P(y) \vee \exists z Q(z)$	i$\vee_1$, 4
6.	$Q(x_0)$	P
7.	$\exists z Q(z)$	i$\exists z$
8.	$\exists y P(y) \vee \exists z Q(z)$	i$\vee_2$, 8
9.	$\exists y P(y) \vee \exists z Q(z)$	e$\vee$, 2, 3–6, 7–9
10.	$\exists y P(y) \vee \exists z Q(z)$	e$\exists x$, 1, 2–10

6. $\exists x P(x) \vee \exists y Q(y) \vdash \exists z(P(z) \vee Q(z))$

1.	$\exists x P(x) \vee \exists y Q(y)$	P
2.	$\exists x P(x)$	P
3.	$z_0 : P(z_0)$	W
4.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	i$\vee_1$, 3
5.	$\exists z(P(z) \vee Q(z))$	i$\exists z$, 4
6.	$\exists z(P(z) \vee Q(z))$	e$\exists x$, 2, 3–5
7.	$\exists y Q(y)$	P
8.	$z_1 : Q(z_1)$	W
9.	$P(z_1) \vee Q(z_1)$	i$\vee_2$, 8
10.	$\exists z(P(z) \vee Q(z))$	i$\exists z$, 9
11.	$\exists z(P(z) \vee Q(z))$	e$\exists y$, 7, 8–10
12.	$\exists z(P(z) \vee Q(z))$	e$\vee$, 1, 2–6, 7–11

7. $P(a) \Rightarrow \exists x Q(x) \vdash \exists x(P(a) \Rightarrow Q(x))$ (Můžete použít LEM.)

1.	$P(a) \Rightarrow \exists x Q(x)$	P
2.	$P(a) \vee \neg P(a)$	LEM
3.	$P(a)$	P
4.	$\exists x Q(x)$	e$\Rightarrow$, 3, 1
5.	$x_0 : Q(x_0)$	W
6.	$P(a)$	P
7.	$Q(x_0)$	it, 5
8.	$P(a) \Rightarrow Q(x_0)$	i$\Rightarrow$, 6–7
9.	$\exists x(P(a) \Rightarrow Q(x))$	i$\exists$x, 8
10.	$\exists x(P(a) \Rightarrow Q(x))$	e$\exists$x, 4, 5–9
11.	$\neg P(a)$	P
12.	$P(a)$	P
13.	$\perp$	e$\neg$, 12, 11
14.	$Q(x)$	e$\perp$, 13
15.	$P(a) \Rightarrow Q(x)$	i$\Rightarrow$, 12–14
16.	$\exists x(P(a) \Rightarrow Q(x))$	i$\exists$x, 15
17.	$\exists x(P(a) \Rightarrow Q(x))$	e$\vee$, 2, 3–10, 11–16

2.2 Binární predikáty

1. $\vdash_{\{z\}} \exists x \exists y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$

1.	z	D
2.	$R(z,z)$	P
3.	$R(z,z) \Rightarrow R(z,z)$	i$\Rightarrow$, 2–2
4.	$\exists y(R(z,y) \Rightarrow R(y,z))$	i$\exists$y, 3
5.	$\exists x \exists y(R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$	i$\exists$x, 4
6.		

2. $\exists x \exists y R(x,y) \vdash \exists x \exists y R(y,x)$

1.	$\exists x \exists y R(x,y)$	P
2.	$a : \exists y R(a,y)$	W
3.	$b : R(a,b)$	W
4.	$\exists y R(y,b)$	i$\exists y$, 3
5.	$\exists x \exists y R(y,x)$	i$\exists x$, 4
6.	$\exists x \exists y R(y,x)$	e$\exists y$, 2, 3–5
7.	$\exists x \exists y R(y,x)$	e$\exists x$, 1, 2–6

3. $\exists x R(x,x) \vdash \exists x \exists y (R(x,y) \wedge R(y,x))$

1.	$\exists x R(x,x)$	P
2.	$x_0 : R(x_0,x_0)$	W
3.	$R(x_0,x_0) \wedge R(x_0,x_0)$	i$\wedge$, 2, 2
4.	$\exists y (R(x_0,y) \wedge R(y,x_0))$	i$\exists y$, 3
5.	$\exists x \exists y (R(x,y) \wedge R(y,x))$	i$\exists x$, 4
6.	$\exists x \exists y (R(x,y) \wedge R(y,x))$	e$\exists x$, 1, 2–5

4. $\neg \exists x \exists y R(x,y) \vdash \neg \exists y R(y,y)$

1.	$\neg \exists x \exists y R(x,y)$	P
2.	$\exists y R(y,y)$	P
3.	$R(a,a)$	W
4.	$\exists y R(a,y)$	i$\exists y$, 3
5.	$\exists x \exists y R(x,y)$	i$\exists x$, 4
6.	$\exists x \exists y R(x,y)$	e$\exists y$, 2, 3–5
7.	$\perp$	e$\neg$, 6, 1
8.	$\neg \exists y R(y,y)$	i$\neg$, 2–7

5. $\vdash \neg \exists x \exists y (R(x,y) \wedge \neg R(x,y))$

1.	$\exists x \exists y (R(x,y) \wedge \neg R(x,y))$	P
2.	$x_0 : \exists y (R(x_0,y) \wedge \neg R(x_0,y))$	W
3.	$y_0 : R(x_0,y_0) \wedge \neg R(x_0,y_0)$	W
4.	$R(x_0,y_0)$	$e\wedge_1$, 3
5.	$\neg R(x_0,y_0)$	$e\wedge_2$, 4
6.	$\bot$	$e\neg$, 4, 5
7.	$\bot$	$e\exists y$, 2, 3–6
8.	$\bot$	$e\exists x$, 1, 2–7
9.	$\neg \exists x \exists y (R(x,y) \wedge \neg R(x,y))$	$i\neg$, 1–8

6. $\vdash_{\{z\}} \exists x R(x,x) \vee \exists x (R(x,x) \Rightarrow \neg \exists y R(y,x))$ (Můžete použít LEM.)

1.	z	D
2.	$R(z,z) \vee \neg R(z,z)$	LEM
3.	$R(z,z)$	D
4.	$\exists x R(x,x)$	$i\exists x$, 3
5.	$\exists x R(x,x) \vee \exists x (R(x,x) \Rightarrow \neg \exists y R(y,x))$	$i\vee_1$, 4
6.	$\neg R(z,z)$	P
7.	$R(z,z)$	P
8.	$\bot$	$e\neg$, 7, 6
9.	$\neg \exists y R(y,z)$	$e\bot$, 8
10.	$R(z,z) \Rightarrow \neg \exists y R(y,z)$	$i\Rightarrow$, 7–9
11.	$\exists x (R(x,x) \Rightarrow \neg \exists y R(y,x))$	$i\exists x$, 10
12.	$\exists x R(x,x) \vee \exists x (R(x,x) \Rightarrow \neg \exists y R(y,x))$	$i\vee_2$, 12
13.	$\exists x R(x,x) \vee \exists x (R(x,x) \Rightarrow \neg \exists y R(y,x))$	$e\vee$, 2, 3–5, 6–12
14.		

7. $R(a,b) \wedge R(b,c),\ \neg Q(a),\ Q(c) \vdash \exists x \exists y ((\neg Q(x) \wedge Q(y)) \wedge R(x,y))$ (Můžete použít LEM.)

1.	$R(a,b) \wedge R(b,c)$	P
2.	$\neg Q(a)$	P
3.	$Q(c)$	P
4.	$Q(b) \vee \neg Q(b)$	LEM
5.	$Q(b)$	P
6.	$\neg Q(a) \wedge Q(b)$	i$\wedge$, 2, 5
7.	$R(a,b)$	e$\wedge_1$, 1
8.	$(\neg Q(a) \wedge Q(b)) \wedge R(a,b)$	i$\wedge$, 6, 7
9.	$\exists y((\neg Q(a) \wedge Q(y)) \wedge R(a,y))$	i$\exists y$, 8
10.	$\exists x \exists y((\neg Q(x) \wedge Q(y)) \wedge R(x,y))$	i$\exists x$, 9
11.	$\neg Q(b)$	P
12.	$\neg Q(b) \wedge Q(c)$	i$\wedge$, 11, 3
13.	$R(b,c)$	e$\wedge_2$, 1
14.	$(\neg Q(b) \wedge Q(c)) \wedge R(b,c)$	i$\wedge$, 12, 13
15.	$\exists y((\neg Q(b) \wedge Q(y)) \wedge R(b,y))$	i$\exists y$, 14
16.	$\exists x \exists y((\neg Q(x) \wedge Q(y)) \wedge R(x,y))$	i$\exists x$, 15
17.	$\exists x \exists y((\neg Q(x) \wedge Q(y)) \wedge R(x,y))$	e$\vee$, 4, 5–10, 11-16

2.3 Smíšené úlohy

1. $\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$

1.	$\neg \exists x P(x)$	P
2.	x	D
3.	$P(x)$	P
4.	$\exists x P(x)$	i$\exists x$, 3
5.	$\perp$	e$\neg$, 4, 1
6.	$\neg P(x)$	i$\neg$, 3–5
7.	$\forall x \neg P(x)$	i$\forall x$, 3–6

2. $\exists x \neg P(x) \vdash \neg \forall x P(x)$

1.	$\exists x \neg P(x)$	P
2.	$\forall x P(x)$	P
3.	$x_0 : \neg P(x_0)$	W
4.	$P(x_0)$	e$\forall x$, 2
5.	$\perp$	e$\neg$, 4, 3
6.	$\perp$	e$\exists x$, 1, 3–5
7.	$\neg \forall x P(x)$	i$\neg$, 2–6

3. $\neg \forall x P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$

1.	$\neg \forall x P(x)$	D
2.	$\neg \exists x \neg P(x)$	P
3.	x_0	D
4.	$\neg P(x_0)$	P
5.	$\exists x \neg P(x)$	i$\exists x$, 4
6.	$\perp$	e$\neg$, 5, 2
7.	$\neg\neg P(x_0)$	i$\neg$, 4–6
8.	$P(x_0)$	e$\neg\neg$, 7
9.	$\forall x P(x)$	i$\forall x$, 3–8
10.	$\perp$	e$\neg$, 9, 1
11.	$\neg\neg \exists x \neg P(x)$	i$\neg$, 2–10
12.	$\exists x \neg P(x)$	e$\neg\neg$, 11

4. $\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)$

1.	$\forall x \neg P(x)$	P
2.	$\exists x P(x)$	P
3.	$x_0 : P(x_0)$	W
4.	$\neg P(x_0)$	e$\forall x$, 1
5.	$\perp$	e$\neg$, 3, 4
6.	$\perp$	e$\exists x$, 2, 3–5
7.	$\neg \exists x P(x)$	i$\neg$, 2–6

5. $\forall x(\exists y P(y) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall x \exists y(P(y) \Rightarrow Q(x))$

1.	$\forall x(\exists y P(y) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	x_0	D
3.	$\exists y P(y) \Rightarrow Q(x_0)$	e$\forall$x, 1
4.	$P(x_0)$	P
5.	$\exists y P(y)$	i$\exists$y, 4
6.	$Q(x_0)$	e$\Rightarrow$, 5, 3
7.	$P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$	i$\Rightarrow$, 4–6
8.	$\exists y(P(y) \Rightarrow Q(x_0))$	i$\exists$y, 7
9.	$\forall x \exists y(P(y) \Rightarrow Q(x))$	i$\forall$x, 2–8

6. $\forall x \neg \forall y(P(x,y) \Rightarrow Q(x,y)) \vdash \forall x \exists y P(x,y)$

1.	$\forall x \neg \forall y(P(x,y) \Rightarrow Q(x,y))$	P
2.	x_0	D
3.	$\neg \forall y(P(x_0,y) \Rightarrow Q(x_0,y))$	e$\forall$x, 1
4.	$\neg \exists y P(x_0,y)$	P
5.	y_0	D
6.	$P(x_0,y_0)$	P
7.	$\exists y P(x_0,y)$	i$\exists$y, 6
8.	$\bot$	e$\neg$, 7, 4
9.	$\neg P(x_0,y_0)$	i$\neg$, 6–8
10.	$P(x_0,y_0)$	P
11.	$\bot$	e$\neg$, 10, 9
12.	$Q(x_0,y_0)$	e$\bot$, 11
13.	$P(x_0,y_0) \Rightarrow Q(x_0,y_0)$	i$\Rightarrow$, 10–12
14.	$\forall y(P(x_0,y) \Rightarrow Q(x_0,y))$	i$\forall$y, 5–13
15.	$\bot$	e$\neg$, 14, 3
16.	$\neg\neg \exists y P(x_0,y)$	i$\neg$, 4–15
17.	$\exists y P(x_0,y)$	e$\neg\neg$, 16
18.	$\forall x \exists y P(x,y)$	i$\forall$x, 2–17

7. $\forall x(P(x,x) \vee \forall y Q(x,y)) \vdash \forall x(\exists y P(x,y) \vee Q(x,x))$

1.	$\forall x(P(x,x) \vee \forall y Q(x,y))$	P
2.	x_0	D
3.	$P(x_0,x_0) \vee \forall y Q(x_0,y)$	e$\forall x$, 1
4.	$P(x_0,x_0)$	P
5.	$\exists y P(x_0,y)$	i$\exists y$, 4
6.	$\exists y P(x_0,y) \vee Q(x_0,x_0)$	i$\vee_1$, 5
7.	$\forall y Q(x_0,y)$	P
8.	$Q(x_0,x_0)$	e$\forall y$, 7
9.	$\exists y P(x_0,y) \vee Q(x_0,x_0)$	i$\vee_2$, 8
10.	$\exists y P(x_0,y) \vee Q(x_0,x_0)$	e$\vee$, 3, 4–6, 7–9
11.	$\forall x(\exists y P(x,y) \vee Q(x,x))$	i$\forall x$, 2–10

8. $\exists x(P(x,x) \wedge \forall y Q(x,y)) \vdash \exists x(\exists y P(x,y) \wedge Q(x,x))$

1.	$\exists x(P(x,x) \wedge \forall y Q(x,y))$	P
2.	$w : P(w,w) \wedge \forall y Q(w,y)$	W
3.	$P(w,w)$	e$\wedge_1$, 2
4.	$\exists y P(w,y)$	i$\exists y$, 3
5.	$\forall y Q(w,y)$	e$\wedge_2$, 2
6.	$Q(w,w)$	e$\forall y$, 5
7.	$\exists y P(w,y) \wedge Q(w,w)$	i$\wedge$, 4, 6
8.	$\exists x(\exists y P(x,y) \wedge Q(x,x))$	i$\exists x$, 7
9.	$\exists x(\exists y P(x,y) \wedge Q(x,x))$	e$\exists x$, 1, 2–8

9. $\vdash \forall x \exists y R(x,y) \vee \neg \forall x R(x,x)$

1.	$\forall x R(x,x) \vee \neg\forall x R(x,x)$	LEM
2.	$\forall x R(x,x)$	P
3.	x_0	D
4.	$R(x_0,x_0)$	$e\forall x$, 2
5.	$\exists y R(x_0,y)$	$i\exists y$, 4
6.	$\forall x \exists y R(x,y)$	$i\forall x$, 3–5
7.	$\forall x \exists y R(x,y) \vee \neg\forall x R(x,x)$	$i\vee_1$, 6
8.	$\neg\forall x R(x,x)$	P
9.	$\forall x \exists y R(x,y) \vee \neg\forall x R(x,x)$	$i\vee_2$, 8
10.	$\forall x \exists y R(x,y) \vee \neg\forall x R(x,x)$	$e\vee$, 1, 2–7, 8–9

10. $\forall x \exists y R(x,y) \Rightarrow \neg\exists x R(x,x),\ \exists x \forall y R(y,x) \vdash \forall x \neg R(x,x)$

1.	$\forall x \exists y R(x,y) \Rightarrow \neg\exists x R(x,x)$	P
2.	$\exists x \forall y R(y,x)$	P
3.	$w : \forall y R(y,w)$	W
4.	x_0	D
5.	$R(x_0,w)$	$e\forall y$, 3
6.	$\exists y R(x_0,y)$	$i\exists y$, 5
7.	$\forall x \exists y R(x,y)$	$i\forall x$, 4–6
8.	$\forall x \exists y R(x,y)$	$e\exists x$, 2, 3–7
9.	$\neg\exists x R(x,x)$	$e\Rightarrow$, 8, 1
10.	x_0	D
11.	$R(x_0,x_0)$	P
12.	$\exists x R(x,x)$	$i\exists x$, 11
13.	$\perp$	$e\neg$, 12, 9
14.	$\neg R(x_0,x_0)$	$i\neg$, 11–13
15.	$\forall x \neg R(x,x)$	$i\forall x$, 10–14

11. $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y R(y,x)) \vdash \exists z R(z,a) \vee \neg\forall x P(x)$

1.	$\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y R(y,x))$	P
2.	$\neg(\exists z R(z,a) \vee \neg\forall x P(x))$	P
3.	$P(a)$	P
4.	$P(a) \Rightarrow \exists y R(y,a)$	e$\forall$x, 1
5.	$\exists y R(y,a)$	e$\Rightarrow$, 3, 4
6.	$z_0 : R(z_0,a)$	W
7.	$\exists z R(z,a)$	i$\exists$z, 6
8.	$\exists z R(z,a) \vee \neg\forall x P(x)$	i$\vee_1$, 7
9.	$\bot$	e$\neg$, 8, 2
10.	$\bot$	e$\exists$y, 5, 6–9
11.	$\neg P(a)$	i$\neg$. 3–10
12.	$\forall x P(x)$	P
13.	$P(a)$	e$\forall$x, 12
14.	$\bot$	e$\neg$, 13, 11
15.	$\neg\forall x P(x)$	i$\neg$, 12–14
16.	$\exists z R(z,a) \vee \neg\forall x P(x)$	i$\vee_2$, 15
17.	$\bot$	e$\neg$, 16, 2
18.	$\neg\neg(\exists z R(z,a) \vee \neg\forall x P(x))$	i$\neg$, 2–17
19.	$\exists z R(z,a) \vee \neg\forall x P(x)$	e$\neg\neg$, 18

3 Rovnost

1. $a = b,\ \neg(b = b \wedge b = c) \vdash \neg(a = c)$

1.	$a = b$	P
2.	$\neg(b = b \wedge b = c)$	P
3.	$a = c$	P
4.	$b = c$	e=, 1, 3
5.	$b = b$	i=
6.	$b = b \wedge b = c$	i$\wedge$, 5, 4
7.	$\bot$	e$\neg$, 6, 2
8.	$\neg(a = c)$	i$\neg$, 3–7

2. $\vdash a = b \Leftrightarrow \forall x(x = a \Rightarrow x = b)$

1.	$a = b$	P
2.	x_0	D
3.	$x_0 = a$	P
4.	$x_0 = b$	e=, 1, 3
5.	$x_0 = a \Rightarrow x_0 = b$	i⇒, 3–4
6.	$\forall x(x = a \Rightarrow x = b)$	i∀x, 2–5
7.	$\forall x(x = a \Rightarrow x = b)$	P
8.	$a = a$	i=
9.	$a = a \Rightarrow a = b$	e∀x, 7
10.	$a = b$	e⇒, 8, 9
11.	$a = b \Leftrightarrow \forall x(x = a \Rightarrow x = b)$	i⇔. 1–6, 7–10

3. $\exists x \forall y(x = y) \vdash \forall x \forall y(x = y)$

1.	$\exists x \forall y(x = y)$	P
2.	$z_0 : \forall y(z_0 = y)$	W
3.	x_0	D
4.	$z_0 = x_0$	e∀y, 2
5.	$\forall y(x_0 = y)$	e=, 4, 2
6.	$\forall x \forall y(x = y)$	i∀x, 3–5
7.	$\forall x \forall y(x = y)$	e∃x, 1, 2–6

4. $P(a), \neg P(b) \vdash \neg(a = b)$

1.	$P(a)$	P
2.	$\neg P(b)$	P
3.	$a = b$	P
4.	$P(b)$	e=, 3, 1
5.	$\bot$	e¬, 4, 2
6.	$\neg(a = b)$	i¬, 3–5

5. $P(b) \wedge Q(b), \forall x(P(x) \Rightarrow x = a) \vdash Q(a)$

1.	$P(b) \wedge Q(b)$	P
2.	$\forall x(P(x) \Rightarrow x = a)$	P
3.	$P(b) \Rightarrow b = a$	e$\forall$x, 2
4.	$P(b)$	e$\wedge_1$, 1
5.	$b = a$	e$\Rightarrow$, 4, 3
6.	$Q(b)$	e$\wedge_2$, 1
7.	$Q(a)$	e=, 5, 6

6. $\forall x((x = a) \vee (x = b)),\ \exists x P(x) \vdash (\neg P(a)) \Rightarrow P(b)$

1.	$\forall x((x = a) \vee (x = b))$	P
2.	$\exists x P(x)$	P
3.	$\neg P(a)$	P
4.	$w : P(w)$	W
5.	$(w = a) \vee (w = b)$	e$\forall$x, 1
6.	$w = a$	P
7.	$P(a)$	e=, 6, 4
8.	$\bot$	e$\neg$, 7, 3
9.	$P(b)$	e$\bot$, 9
10.	$w = b$	P
11.	$P(b)$	e=, 10, 4
12.	$P(b)$	e$\vee$, 5, 6–9, 10-11
13.	$P(b)$	e$\exists$x, 2, 4–12
14.	$\neg P(a) \Rightarrow P(b)$	i$\Rightarrow$, 3–13

7. $\forall x \forall y((P(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \neg Q(y)) \vdash \forall z \neg(P(z) \wedge Q(z))$

1.	$\forall x \forall y((P(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \neg Q(y))$	P
2.	z_0	D
3.	$P(z_0) \wedge Q(z_0)$	P
4.	$\forall y((P(z_0) \wedge (z_0 = y) \Rightarrow \neg Q(y))$	e$\forall x$, 1
5.	$(P(z_0) \wedge (z_0 = z_0) \Rightarrow \neg Q(z_0)$	e$\forall y$, 4
6.	$P(z_0)$	e$\wedge_1$, 3
7.	$z_0 = z_0$	i$=$
8.	$P(z_0) \wedge (z_0 = z_0)$	i$\wedge$, 6, 7
9.	$\neg Q(z_0)$	e$\Rightarrow$, 8, 5
10.	$Q(z_0)$	e$\wedge_2$, 3
11.	$\perp$	e$\neg$, 10, 9
12.	$\neg(P(z_0) \wedge Q(z_0))$	i$\neg$, 3–11
13.	$\forall z \neg(P(z) \wedge Q(z))$	i$\forall z$, 2–12

8. $\forall x \forall y(R(x, y) \Leftrightarrow x = y) \vdash \forall x R(x, x)$

1.	$\forall x \forall y(R(x, y) \Leftrightarrow x = y)$	P
2.	x_0	D
3.	$\forall y(R(x, x_0) \Leftrightarrow x = x_0)$	e$\forall x$, 1
4.	$R(x_0, x_0) \Leftrightarrow x_0 = x_0$	e$\forall y$, 3
5.	$x_0 = x_0$	i$=$
6.	$R(x_0, x_0)$	e$\Leftrightarrow_2$, 4, 5
7.	$\forall x R(x, x)$	i$\forall x$, 2–6

9. $\forall x \neg R(x, x),\ R(a, b) \vdash \exists x \exists y \neg(x = y)$

1.	$\forall x \neg R(x, x)$	P
2.	$R(a, b)$	P
3.	$a = b$	P
4.	$R(b, b)$	e$=$, 3, 2
5.	$\neg R(b, b)$	e$\forall x$, 1
6.	$\perp$	e$\neg$, 4, 5
7.	$\neg(a = b)$	i$\neg$, 3–6
8.	$\exists y \neg(a = y)$	i$\exists y$, 7
9.	$\exists x \exists y \neg(x = y)$	i$\exists x$, 8

10. $\exists x \exists y R(x,y),\ \exists x \forall y (x = y) \vdash \forall x \forall y R(x,y)$

1.	$\exists x \exists y R(x,y)$	P
2.	$\exists x \forall y (x = y)$	P
3.	x_0	D
4.	y_0	D
5.	$u : \forall y (u = y)$	W
6.	$a : \exists y R(a,y)$	W
7.	$b : R(a,b)$	W
8.	$u = a$	e∀y, 5
9.	$a = u$	sym=, 8
10.	$R(u,b)$	e=, 9, 7
11.	$R(u,b)$	e∃y, 6, 7–10
12.	$u = b$	e∀y, 5
13.	$b = u$	sym=, 12
14.	$R(u,u)$	e=, 13, 11
15.	$R(u,u)$	e∃x, 1, 6–14
16.	$u = x_0$	e∀y, 5
17.	$R(x_0,u)$	e=, 16, 15
18.	$u = y_0$	e∀y, 5
19.	$R(x_0,y_0)$	e=, 18, 17
20.	$R(x_0,y_0)$	e∃x, 2, 5–19
21.	$\forall y R(x_0,y)$	i∀y, 4–20
22.	$\forall x \forall y R(x,y)$	i∀x, 3–21

11. $\vdash \forall x P(x,x) \Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg P(x,y) \Rightarrow \neg(x = y))$

1.	$\forall x P(x,x)$	P
2.	x_0	D
3.	y_0	D
4.	$P(y_0,y_0)$	e$\forall x$, 1
5.	$\neg P(x_0,y_0)$	P
6.	$x_0 = y_0$	P
7.	$\neg P(y_0,y_0)$	e=, 5, 4
8.	$\bot$	e$\neg$, 4, 7
9.	$\neg(x_0 = y_0)$	i$\neg$6–8
10.	$\neg P(x_0,y_0) \Rightarrow \neg(x_0 = y_0)$	i$\Rightarrow$, 5–9
11.	$\forall y(\neg P(x_0,y) \Rightarrow \neg(x_0 = y))$	i$\forall y$, 3–10
12.	$\forall x \forall y(\neg P(x,y) \Rightarrow \neg(x = y))$	i$\forall x$, 2-11
13.	$\forall x \forall y(\neg P(x,y) \Rightarrow \neg(x = y))$	P
14.	x_0	D
15.	$\forall y(\neg P(x_0,y) \Rightarrow \neg(x_0 = y))$	e$\forall x$, 13
16.	$\neg P(x_0,x_0) \Rightarrow \neg(x_0 = x_0)$	e$\forall y$, 15
17.	$\neg P(x_0,x_0)$	D
18.	$x_0 = x_0$	i=
19.	$\neg(x_0 = x_0)$	e$\Rightarrow$, 17, 16
20.	$\bot$	e$\neg$, 18, 19
21.	$\neg\neg P(x_0,x_0)$	i$\neg$, 17–20
22.	$P(x_0,x_0)$	e$\neg\neg$, 21
23.	$\forall x P(x,x)$	i$\forall x$, 14–22
24.	$\forall x P(x,x) \Leftrightarrow \forall x \forall y(\neg P(x,y) \Rightarrow \neg(x = y))$	i$\Leftrightarrow$, 1–12, 13–23

12. $\forall x \exists y (R(x,y) \wedge P(y)),\ \forall x \neg R(x,x) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y (P(x) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (x = y)))$

1.	z_0	D
2.	$\forall x \exists y (R(x,y) \wedge P(y))$	P
3.	$\forall x \neg R(x,x)$	P
4.	$\forall x \forall y (P(x) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (x = y)))$	P
5.	$\exists y (R(z_0, y) \wedge P(y))$	e$\forall$x, 2
6.	$y_0 : R(z_0, y_0) \wedge P(y_0)$	W
7.	$\exists y (R(y_0, y) \wedge P(y)$	e$\forall$x, 2
8.	$x_0 : R(y_0, x_0) \wedge P(x_0)$	W
9.	$P(y_0)$	e$\wedge_2$, 6
10.	$P(x_0)$	e$\wedge_2$, 8
11.	$\forall y (P(y_0) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (y_0 = y)))$	e$\forall$x, 4
12.	$P(y_0) \Rightarrow (P(x_0) \Rightarrow (y_0 = x_0))$	e$\forall$y, 11
13.	$P(x_0) \Rightarrow (y_0 = x_0)$	e$\Rightarrow$, 9, 12
14.	$y_0 = x_0$	e$\Rightarrow$, 10, 13
15.	$R(y_0, x_0)$	e$\wedge_1$, 8
16.	$R(y_0, y_0)$	e$=$, 14, 15
17.	$\neg R(y_0, y_0)$	e$\forall$x, 3
18.	$\perp$	e$\neg$, 16, 17
19.	$\perp$	e$\exists$y, 7, 8–18
20.	$\perp$	e$\exists$y, 5, 6–19
21.	$\neg \forall x \forall y (P(x) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (x = y)))$	i$\neg$, 4–20
22.		

Reference

[1] Alastair Carr, The Natural Deduction Pack, *dostupné online*