

Vaše jméno a příjmení:

V důkazech přirozenou dedukcí používejte pouze základní odvozovací pravidla.

Úloha 1, rozmezí hodnocení: $\langle -5, 5 \rangle$ Přirozenou dedukcí dokažte (a je konstantní symbol)

$$(\forall x P(x)) \Rightarrow (\forall x Q(x)), \neg Q(a) \vdash \neg \forall x P(x).$$

Úloha 2, rozmezí hodnocení: $\langle -5, 5 \rangle$ Přirozenou dedukcí dokažte (d je konstantní symbol)

$$\exists x((K(x) \wedge B(x)) \wedge \forall y(K(y) \Rightarrow (x = y))), K(d) \vdash B(d)$$

Úloha 3, rozmezí hodnocení: $\langle 0, 5 \rangle$ Přirozenou dedukcí dokažte

$$\exists z(z = z) \vdash \exists x(P(x) \Rightarrow \forall y P(y)).$$

Úloha 4, rozmezí hodnocení: $\langle -10, 0 \rangle$ Je dán jazyk \mathcal{L} sestávající z unárního predikátového symbolu P , binárního predikátového symbolu R , binárního funkčního symbolu f a konstantního symbolu c . Interpretace \mathcal{I} je dána následovně:

- Universum U je množina \mathbb{N} (množina všech přirozených čísel včetně nuly).
- $\llbracket P \rrbracket = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je prvočíslo}\}$
- $\llbracket R \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m \leq n\}$
- $\llbracket f \rrbracket : (m, n) \mapsto m + n$
- $\llbracket c \rrbracket = 1$

U každé z následujících formulí rozhodněte, zda je pravdivá v interpretaci \mathcal{I} . V této úloze stačí pro každou formuli napsat ANO/NE.

1. $\forall x(\neg(x = c) \Rightarrow P(x))$
2. $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg R(f(x, c), x))$
3. $\exists x(P(x) \wedge P(f(x, c)))$
4. $\forall x \exists y(P(y) \wedge \neg R(y, x))$
5. $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y(P(y) \wedge R(y, x) \wedge \neg(y = x)))$
6. $\exists x(P(x) \wedge P(f(x, f(c, c))))$
7. $\forall x \forall y(R(x, y) \Leftrightarrow \exists z(f(x, z) = y))$
8. $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y(P(y) \wedge R(x, y) \wedge \neg(x = y)))$
9. $\forall x((f(x, x) = x) \Rightarrow \neg(x = c))$
10. $\forall x \forall y((P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x = y)) \Rightarrow \neg P(f(x, y)))$

Úloha 5, rozmezí hodnocení: $\langle 0, 5 \rangle$ Věta „Binární operace f na reálných číslech je pro kladné vstupy omezená.“ byla ve vhodném jazyce \mathcal{L} formalisována jako sentence φ :

$$\exists z \forall x \forall y(((x > 0) \wedge (y > 0)) \Rightarrow (abs(f(x, y)) < z)).$$

Převeďte sentenci $\neg \varphi$ do negační normální formy. Poté takto převedenou sentenci přeložte zpět do matematické češtiny. (Symbol $<$ je binární predikátový symbol zapisovaný infixně.)