

Grafy — úkol 3

V tomto úkolu je naším cílem charakterisovat eulerovské grafy.

Úloha 0.1. Připomeňte si definice následujících pojmů:

1. Tah v grafu.
2. Uzavřený tah.
3. Nakreslení grafu jedním tahem.

Definice 0.2. Graf nazveme *eulerovským*, pokud lze nakreslit jedním uzavřeným tahem.

Definice 0.3. Graf $G = (V, E)$ nazveme *sudým*, pokud má každý jeho vrchol $v \in V$ sudý stupeň.

1 Eulerovské grafy jsou souvislé a sudé

V této části úkolu ukážeme, že pro to, aby šel graf nakreslit jedním uzavřeným tahem, je *nutnou podmínkou*, aby byl souvislý, a aby měl každý jeho vrchol sudý stupeň.

Úloha 1.1. Dokažte, že pro každý graf G platí:

Pokud je G eulerovský, pak je souvislý a sudý.

Návod: G je eulerovský, existuje tedy tah t , který prochází všemi jeho vrcholy a každou jeho hranu navštíví právě jednou.

Souvislost Připomeňte si, že graf je souvislý, pokud mezi každými jeho dvěma vrcholy vede cesta. Z čeho plyne, že mezi každými dvěma vrcholy grafu G vede cesta? (Mininávod: mezi každými dvěma vrcholy grafu G vede tah, a proto i cesta. Formulujte potřebné lemma a ideálně ho i dokažte.)

Sudost Pro daný vrchol v odvod'te jeho stupeň na základě počtu výskytů tohoto vrcholu v tahu t .

2 Souvislé sudé grafy jsou eulerovské

V této části úkolu ukážeme, že souvislost a sudost grafu je *postačující podmínkou* pro to, aby byl eulerovským, tedy aby šel nakreslit jedním uzavřeným tahem.

Úloha 2.1. Mějme sudý graf G , nechť v je vrchol grafu G a nechť t je tah začínající ve vrcholu v . Dokažte, že pokud tah t již nelze prodloužit, pak t končí ve vrcholu v .

Úloha 2.2. Nechť G je souvislý sudý graf, a nechť t je tah v grafu G maximální délky (to jest, žádný tah v grafu G nemá délku větší, než má t). Označme počáteční (a současně i koncový) vrchol tahu t jako v .

1. Ukažte, že kdyby existoval nějaký vrchol u , který není obsažen v t , existoval by tah delší než t . (Návod: využijte souvislosti grafu G k „napojení“ vrcholu u na nějaký vrchol tahu t , tam tah t rozpojte a prodlužte.)
2. Ukažte, že kdyby tah t obsahoval všechny vrcholy grafu G , ale ne všechny hrany grafu G , pak by existoval tah delší než t . (Návod: hrana neležící v tahu t vede mezi dvěma vrcholy, které v tahu t obsaženy jsou – tah t vhodně rozpojte a prodlužte.)