Grafy — úkol 2

Smyslem tohoto úkolu je procvičit si matematickou práci s novým pojmem, který ještě neznáme. Ujistěte se, že vám definice dávají smysl, a že chápete, jak souvisí jejich formální zápis se slovním vysvětlením, které mu předchází.

1 Nezávislost

Definice 1.1. Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$. Množinu vrcholů $N \subseteq V$ nezveme *nezávislou*, pokud žádné dva vrcholy z N nejsou v grafu G spojeny hranou, tedy pokud platí

$$\binom{N}{2} \cap E = \emptyset.$$

Nejpočetnější nezávislá množina vrcholů je nezávislá množina s největším počtem prvků. Tento počet, značený $\alpha(G)$, nazýváme *nezávislost* grafu G. To jest,

$$\alpha(G) = \max\{\, |N| \mid N \subseteq V,\ N \text{ je nezávislá množina}\}.$$

Úloha 1.2. Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf zadaný pětiprvkovou množinou vrcholů

$$V = \{u, v, w, x, y\}$$

a množinou hran

$$E = \{\{u, x\}, \{u, y\}, \{v, x\}, \{v, y\}, \{w, y\}\}.$$

1. Rozhodněte, zda je množina $\{w, x, y\}$ nezávislá.
2. Určete nezávislost grafu G.

Úloha 1.3. 1. Existuje graf G, který má barevnost menší než nezávislost, tedy platí

$$\chi(G) < \alpha(G)?$$

Pokud ano, sestrojte nějaký takový graf, pokud ne, dokažte, že neexistuje.

2. Existuje graf G, který má barevnost rovnou nezávislosti, tedy platí
$$\chi(G) = \alpha(G)?$$
Pokud ano, sestrojte nějaký takový graf, pokud ne, dokažte, že neexistuje.
3. Existuje graf G, který má barevnost větší než nezávislost, tedy platí
$$\chi(G) > \alpha(G)?$$
Pokud ano, sestrojte nějaký takový graf, pokud ne, dokažte, že neexistuje.

2 Dominance

Definice 2.1. Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$.

1. Vrchol v nazveme *sousedem* vrcholu u, pokud mezi nimi vede hrana.
2. *Množinu sousedů* vrcholu u označme jako $S(u)$. To jest,
$$S(u) = \{v \in V \mid \{u, v\} \in E\}.$$
3. Nechť $X \subseteq V$. *Množina sousedů* $S(X)$ množiny X sestává ze všech vrcholů, které sousedí s nějakým vrcholem z X. To jest,
$$S(X) = \bigcup_{u \in X} S(u).$$

Všimněte si, že jsme v předchozí definici *přetížili* značení S: v tomto úkolu jej používáme podle kontextu pro označení množiny sousedů *jednoho vrcholu* i *množiny vrcholů*.

Úloha 2.2. Připomeňte si graf G z Úlohy 1.2.

1. Nalezněte $S(v)$.
2. Nechť $X = \{u, x\}$. Nalezněte $S(X)$.

Definice 2.3. Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$. Množinu vrcholů $D \subseteq V$ nazveme *dominující*, pokud spolu se svou množinou vrcholů pokrývá všechny vrcholy grafu G. To jest, D je dominující, pokud
$$D \cup S(D) = V.$$
Počet prvků v nejméně početné dominující množině grafu G nazveme *dominancí* grafu G, a značíme jej $\beta(G)$. To jest,
$$\beta(G) = \min\{\, |D| \mid D \subseteq V,\ D \text{ je dominující množina}\}.$$

Úloha 2.4. Připomeňte si graf G z Úlohy 1.2.

1. Rozhodněte, zda je množina $\{u, v, w\}$ dominující.
2. Nalezněte nějakou nejméně početnou dominující množinu grafu G a spočtěte $\beta(G)$.