Náznak dělení grafových úloh podle obtížnosti

**"Snadné" úlohy**

Je znám polynomiální algoritmus řešení
pro všechny možné případy.

**vzdálenosti uzlů (vážené i nevážené),**
**nejkratší cesty (vážené i nevážené)**
**souvislost, silná souvislost,**
**Eulerova cesta/kružnice,**
**úloha čínského pošťáka,**
*** rovinnost,**
*** maximální párování ,**
**barevnost == 2**
**minimální kostra,**
**optimální tok v síti,**
**atd**...

* -- složitější postup, ale pořád polynomiální

**"Obtížné" úlohy**

Není znám obecný polynomiální algoritmus řešení.
Mnohdy ale může existovat polynomiální řešení
pro speciální skupiny grafů (např. stromy, DAG,
atd).

*** nejdelší cesty (vážené i nevážené),**
**Hamiltonovská cesta/kružnice,**
**úloha obchodního cestujícícho,**
**klikovost,**
**barevnost ( > 2),**
**dominance,**
**nezávislost,**
**vrcholové pokrytí,**
**** izomorfizmus,**
**atd**...
**(https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_NP-complete_problems)**

* -- v DAG snadné
** -- ve stromech snadné

Difficulty of some typical graph problems

**"Easy" problems**

A polynomial algorithm is known for all cases.

**node distances (weighted & unweighted),**
**shortest paths (weighted & unweighted)**
**connectivity, strong connectivity,**
**Eulerian path/cycle,**
**chinese postman problem,**
*** planarity,**
*** maximum matching,**
**chromatic number == 2**
**minimum spanning tree,**
**optimal flow in a network,**
**etc...**

* -- polynomial but more involved algorithm,

**"Difficult" problems**

No general polynomial algoritm is known.
However, often a polynomial solution is known for a particular group of graphs (trees DAG, etc.).

*** longest paths (weighted & unweighted),**
**Hamiltonian path/cycle,**
**travelling salesman problem,**
**maximum clique,**
**chromatic number ( > 2),**
**dominancy,**
**independence,**
**vertex cover,**
**** isomorphism**
**etc...**
**(https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_NP-complete_problems)**

* -- easy in DAG
** -- easy in the trees

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">NEJKRATŠÍ CESTY</td></tr>
<tr><td>Ohodnocení hran</td><td>Strom</td><td>DAG</td><td>Řídký graf s cykly</td><td>Hustý graf s cykly</td></tr>
<tr><td>Nezáporné ohodnocení</td><td rowspan="2">orientovaný i neorientovaný<br><br>BFS,<br>$\Theta(N+E) = \Theta(N)$<br><br>triviální úloha</td><td rowspan="2">jen orientovaný<br><br>topologické řazení a DP,<br>$\Theta(N+E)$</td><td>orientovaný i neorientovaný<br><br>Dijkstra<br>s prioritní frontou,<br>$\Theta((N+E) \log N)$</td><td>orientovaný i neorientovaný<br><br>Dijkstra<br>bez prioritní fronty,<br>$\Theta(N^2)$</td></tr>
<tr><td>Některé hrany záporné, ale bez záporných cyklů (tzv. konzervativní ohodnocení)</td><td colspan="2">orientovaný: Bellman-Ford, $\Theta(N*E)$<br><br>neorientovaný: Převod na úlohu "Minimum Weight T-Join", $O(N^3)$,<br>nad rámec základního kursu,<br>viz [KorteVygen, p.278].</td></tr>
<tr><td>Záporné ohodnocení se zápornými cykly</td><td>nedefinováno</td><td>nedefinováno</td><td colspan="2">orientovaný i neorientovaný<br><br>NP-těžké, když předpokládáme nejkratší cestu bez cyklů, jinak řešení nedefinováno</td></tr>
</table>

Bernhard Korte, Jens Vygen: *Combinatorial Optimization, Theory and Algorithms*, 3rd edition, Springer-Verlag, 2006.

| | NEJDELŠÍ CESTY | | |
|---|---|---|---|
| **Ohodnocení hran** | **Strom** | **DAG** | **Graf s cykly** |
| **Jakékoli ohodnocení** | **orientovaný i neorientovaný**<br><br>BFS,<br>$\Theta(N+E) = \Theta(N)$<br><br>*triviální úloha* | **jen orientovaný**<br><br>topologické řazení a DP,<br>$\Theta(N+E)$ | **orientovaný i neorientovaný**<br><br>NP-těžké |