

IV MG - Stacionární a kvazistacionární magnetické pole

Magnetické pole a síly v magnetickém poli jsou vyvolané působením **pohybujících se elektrických nábojů**. Těmito náboji mohou být kladně nebo záporně nabitě částice. V elektrotechnice je podstatné sledovat pohyb částic, které se nenacházejí ve volném prostoru, ale pohybují se v podobě **elektrického proudu** ve vodičích a ostatních materiálech. S podobnou logikou jako v elektrickém poli můžeme rozlišovat elektrické **proudy dané pohybem volných nábojů** – například elektronů ve vodičích a **pomyslné vázané proudy**, které jsou projevem hmoty jako reakce na magnetické pole. Vázané proudy souvisejí v modelech magnetické látky se **vznikem magnetických dipólů**, elementárních proudových smyček, které jsou pomyslně tvořeny elektrony obletujícími po určitých drahách kolem jader atomů.

Stacionární magnetické pole souvisí s rovnoměrně se pohybujícími nabitými částicemi, tedy i s časově neproměnnými **stacionárními elektrickými proudy**. Výsledkem je časově neproměnné magnetické pole, které dokáže silově působit na ostatní proudovodiče a pohybující se částice.

Kolem všech elektrických nábojů vzniká elektrické pole, v případě stacionárních proudů to bylo takzvané stacionární proudové pole, je zde tedy přímá souvislost mezi elektrickým a magnetickým polem. Stacionární proudové pole vyvolává pole magnetické. Opačný jev však pozorovat nelze. Stacionární magnetické pole nemůže budít pole elektrické.

Obecný vzájemný vztah mezi elektrickým a magnetickým polem lze pozorovat až u **polí nestacionárních**, tedy časově proměnných. Časově proměnné magnetické pole vyvolává časově proměnné elektrické pole, tato skutečnost je popsána Faradayovým indukčním zákonem. Stejně platí i naopak, že časově proměnné elektrické pole vyvolává časově proměnné magnetické pole, tato skutečnost je popsána zobecněným Ampérovým zákonem celkového proudu, který je doplněn o člen, který se někdy nazývá posuvný proud. **Obecně tedy existuje jednotné elektromagnetické pole, které je duální, má složku elektrickou a magnetickou, tyto složky jsou navzájem svázané, jedna neexistuje bez druhé.**

Kvazistacionární elektromagnetické pole je zvláštním případem nestacionárního pole. V tomto případě již musíme například uvažovat časově proměnné proudy, bez kterých by nebylo možné se zabývat tak důležitým jevem jako je **magnetická indukce - vznik indukovaného napětí**. Časové změny jsou však natolik pomalé, že se neprojeví v plné šíři jevy spojené se vzájemným propojením elektrického a magnetického pole. V případě magnetického pole by to mohlo například obecně znamenat, že střídavý elektrický proud ve vodičích vyvolá střídavé magnetické pole, kterým se zpětně indukují takzvané vířivé proudy ve vodičích, změní se rozložení proudové hustoty (nastane takzvaný skinefekt), což musí samozřejmě mít opět vliv na vybuzené magnetické pole. Při výpočtu magnetického pole předpokládáme, že rozložení proudů zůstane rovnoměrné a magnetické pole počítáme zcela stejně jako ve stacionárním poli.

MG-a Definice magnetické indukce, Biot-Savartův zákon

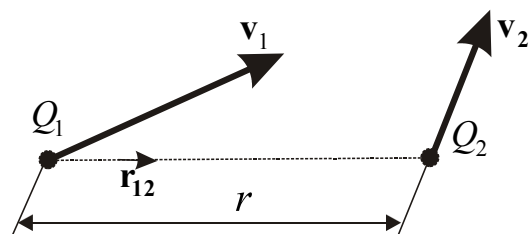
Magnetická indukce **B** je vektorová veličina, která popisuje vlastnosti magnetického pole a je odvozena ze silového působení mezi pohybujícími se náboji. V logické stavbě tato veličina odpovídá intenzitě **E** v elektrickém poli. Intenzita magnetického pole **H** naopak odpovídá elektrické indukci **D**. Záměna názvů vyplývá z historicky přijatých konvencí. Magnetická indukce však není závislá jen na velikosti a vzájemné poloze elektrických nábojů, závisí i na směru jejich pohybu a rychlosti. Tato skutečnost se musí odrazit i ve vztazích, které se tím stávají poněkud komplikovanější.

Na příkladech v následující části je ukázáno, jak jsou definovány veličiny v magnetickém poli a jaké mají vzájemné souvislosti. Příklady jsou poskládány ve sledu od magnetického pole pohybujícího se bodového náboje, smyček, kterými protéká elektrický proud, až po užití Biot-Savartova zákona i Ampérova zákona celkového proudu. Speciální místo zaujímají cívky na magnetických obvodech a Faradayův indukční zákon, se kterým je částečně vázán i pojem indukčnosti. Na rozdíl od elektrického pole má v magnetickém poli velký význam i silové působení, na kterém je založena většina zařízení přeměňujících elektrickou energii na mechanickou.

{Př. MG/1} Silové působení mezi pohybujícími se elektrickými náboji – magnetické pole

Jak velikou magnetickou silou na sebe působí dva pohybující se náboje? Jak je definována magnetická indukce?

Vztah pro silové působení mezi pohybujícími se náboji v magnetickém poli je určitou obdobou Coulombova zákona v elektrickém poli, musí se zde však ještě objevit rychlost a směr pohybujících se částic.



(Obr. MG-1) Dva navzájem se pohybující náboje

Mezi dvěma pohybujícími se náboji působí síla, kterou nazýváme magnetická. Náboj Q_1 , který se pohybuje rychlostí v_1 , působí na náboj Q_2 , který se pohybuje rychlostí v_2 , silou

$$F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} (v_2 \times (v_1 \times r_{12}))$$

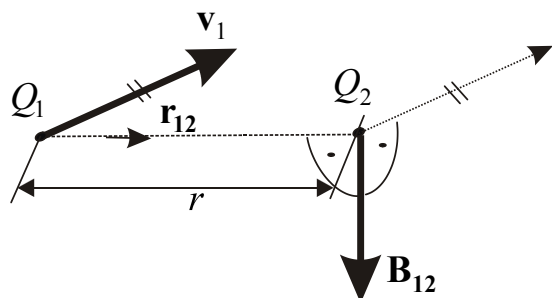
kde r_{12} je jednotkový vektor ve směru spojnice mezi náboji.

$$|r_{12}| = 1$$

Podobně působí náboj Q_2 na náboj Q_1 silou

$$F_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} (v_1 \times (v_2 \times r_{21}))$$

Podle naší představy je silové působení dáno účinkem silového magnetického pole, které kolem sebe vytvoří letící náboje. Toto magnetické pole dokáže působit silou na jiné letící náboje a existuje bez ohledu na to, zda jsou k dispozici jiné pohybující se náboje, na kterých by se silové účinky posuzovaly.



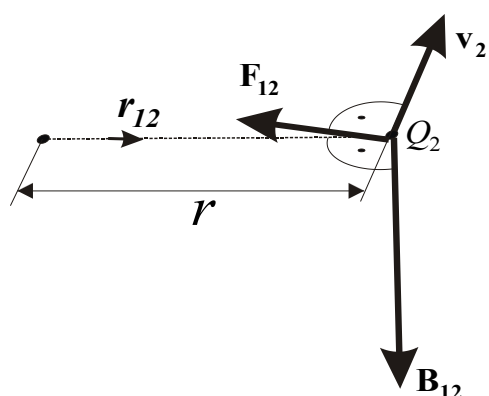
(Obr. MG-2) Magnetická indukce vybuzená jedním pohybujícím se nábojem

Základní definiční vztahy platné v magnetickém poli lze získat rozdělením vztahu pro silové působení na dvě části.

První část definuje silové pole kolem letícího náboje Q_1 pomocí veličiny, která se nazývá **magnetická indukce**

$$B_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1}{r^2} (v_1 \times r_{12})$$

Je to tedy **magnetická indukce** vybuzená nábojem o velikosti Q_1 , který se pohybuje rychlostí v_1 , v místě o vzdálenosti r ve směru vektoru r_{12} . Směr vektoru magnetické indukce je dán kladným smyslem vektorového součinu ve vztahu.



(Obr. MG-3) Síla působící na náboj pohybující se v magnetickém poli

Sílu působící na náboj Q_2 lze potom zapsat pomocí definované magnetické indukce takto

$$F_{12} = Q_2 (v_2 \times B_{12})$$

Směr síly je opět dán kladným smyslem vektorového součinu ve vztahu.

Obecně lze tedy napsat, že letící náboj kolem sebe vybudí magnetické pole s indukcí

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^2} (v \times r_0) \tag{MG*1}$$

a to bez ohledu na to, jestli se v jeho blízkosti vyskytují ještě jiné letící náboje, na kterých by se silové účinky posuzovaly. Tento vztah se nazývá **Biot-Savartův zákon**.

A naopak, nachází-li se letící náboj v místě, kde je definovaná magnetická indukce \mathbf{B} bez ohledu na to, jakým způsobem byla vybuzena, působí na něho síla daná vztahem

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Tento vztah lze chápat jako **definiční rovnici pro vektor magnetické indukce** analogicky s definičním vztahem pro intenzitu elektrického pole, který byl

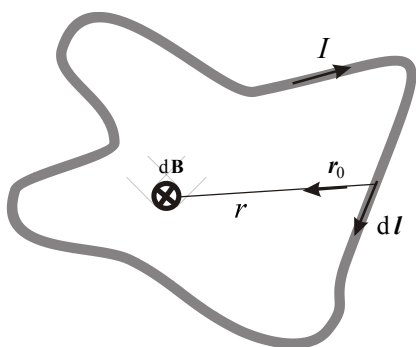
$$\mathbf{F} = Q \cdot \mathbf{E}$$

{Př. MG/2} Silové působení a magnetická indukce vybuzená proudovými smyčkami ve vzduchu

Jak veliké magnetické pole vybudí proudová smyčka ve vzduchu podle obrázku (Obr. MG-4)?

Navazuje na

{Př. MG/1} *Silové působení mezi pohybujícími se elektrickými náboji – magnetické pole*



(Obr. MG-4) Proudová smyčka jako zdroj magnetického pole

Když nebudeme uvažovat izolovaně letící náboje, ale pouze náboje, které se pohybují v prostoru vymezeném určitým tenkým vodičem ve formě elektrického proudu, je možné vyjádřit součin rychlosti a velikosti náboje v elementu vodiče o délce $d\mathbf{l}$ následujícím způsobem

$$dQ \cdot \mathbf{v} = dQ \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{dQ}{dt} d\mathbf{l} = I \cdot d\mathbf{l}$$

Tato malá část náboje potom vybudí magnetickou indukci (po dosazení do (MG*1))

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dQ}{r^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0)}{r^2}$$

Sečtením účinku všech dílčích nábojů dostaneme magnetickou indukci buzenou vodičem tvořícím uzavřenou smyčku

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{(d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0)}{r^2}$$

Tento vztah je opět Biot-Savartův zákon, ale formulovaný pro uzavřenou smyčku.

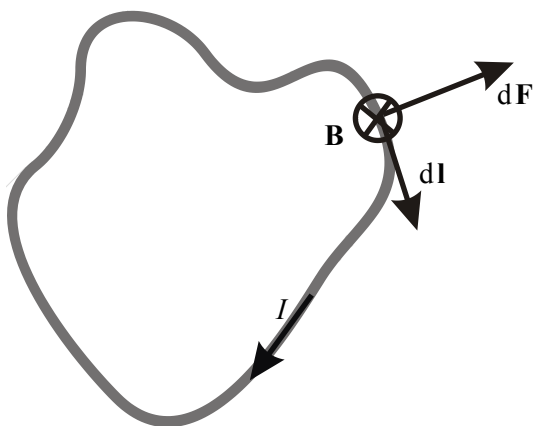
Podobně lze upravit vztah pro silové působení na element vodiče $d\mathbf{l}$, který se nachází v magnetickém poli o velikosti magnetické indukce \mathbf{B}

$$d\mathbf{F} = dQ(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

Síla působící na uzavřenou smyčku vloženou do magnetického pole potom bude

$$\mathbf{F} = I \oint_l (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

(Obr. MG-5) Síla magnetického pole působící na proudovou smyčku v magnetickém poli



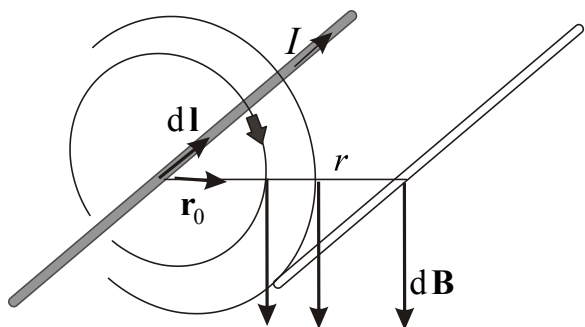
{Př. MG/3} Magnetická indukce a síly působící na element délky proudovodičů, pravidlo pravé a levé ruky, pravotočivý šroub

Jaký je směr a smysl magnetické indukce vybuzené přímým vodičem ve vzduchu, v jakém směru působí síly na dva rovnoběžné vodiče.

Navazuje na

{Př. MG/2} Silové působení a magnetická indukce vybuzená proudovými smyčkami ve vzduchu

Na příkladě dvou rovnoběžných vodičů lze názorně ukázat orientaci magnetické indukce podle Biotova-Savartova zákona a orientaci působící síly.



Budeme-li uvažovat dva rovnoběžné vodiče, které jsou protékány proudem ve stejném směru, vybudí proudový element levého vodiče na protilehlé straně v místě pravého vodiče magnetickou indukci, která je popsána vztahem

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(dI \times r_0)}{r^2}$$

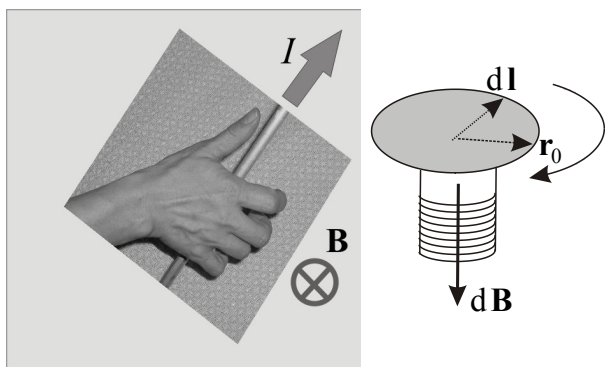
Smysl magnetické indukce je dán vektorovým součinem ve vztahu, k jeho určení je možno použít několik mnemotechnických pomůcek

Pravidlo pravé ruky

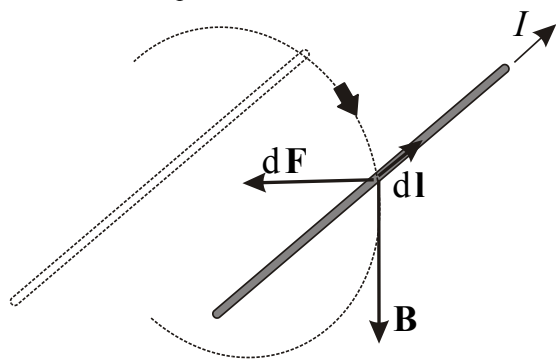
Položíme-li pravou ruku na vodič tak, aby palec ukázal směr proudu, prsty ukáží směr siločar magnetického pole

Pravidlo pravotočivého šroubu (pravotočivé vývrtky)

Když si pomyslně nakreslíme oba vektory v součinu na hlavu pravotočivého šroubu a otáčíme šroubem ve směru od prvního vektoru v součinu ke druhému, výsledný vektor má směr, ve kterém by se šroub zašrouboval nebo vyšrouboval



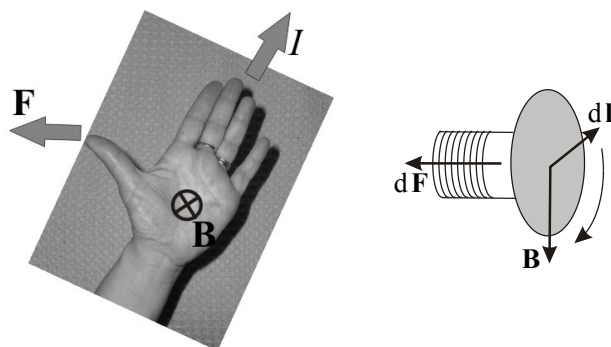
(Obr. MG-6) Magnetická indukce vyvolaná elementem proudovodiče, pravidlo pravé ruky a pravotočivého šroubu



Velikost a směr síly, která působí na element druhého vodiče v magnetickém poli prvního vodiče, je dána vztahem

$$dF = I(dI \times B)$$

Smysl síly lze stanovit opět pomocí pravotočivého šroubu. Existuje také **pravidlo levé ruky**.



(Obr. MG-7) Síla působící v magnetickém poli na element proudovodiče, pravidlo levé ruky

{Př. MG/4} Magnetické pole buzené přímým úsekem vodiče ve vzduchu

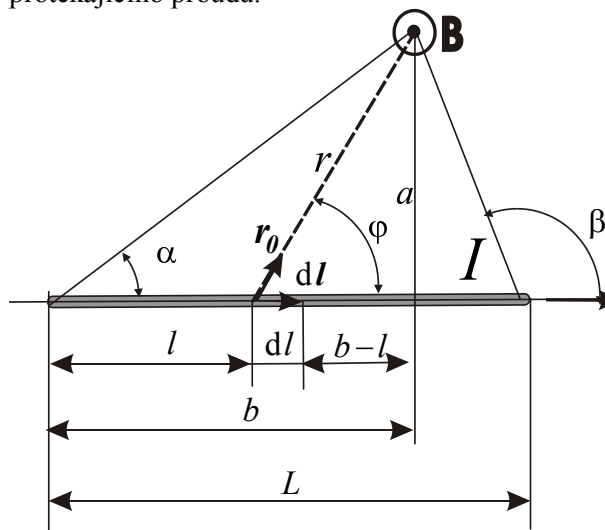
Jak velká je magnetická indukce ve vzdálenosti a od rovného úseku vodiče konečné délky ve vzduchu podle obrázku (Obr. MG-8).

Navazuje na

MG-a Definice magnetické indukce, Biot-Savartův zákon

Elektrický proud musí protékat vždy uzavřeným obvodem. Přímý úsek vodiče podle obrázku (Obr. MG-8) je třeba chápat jako část takového obvodu.

Magnetické pole se v tomto případě musí vypočítat pomocí Biot-Savartova zákona. Nejprve si ve smyslu znění tohoto zákona vytkneme na vodiči ve vzdálenosti l element o délce dl a přiřadíme mu vektor se směrem tečny k vodiči v daném místě a se smyslem totožným s kladným smyslem protékajícího proudu.



(Obr. MG-8) Magnetické pole úseku vodiče

Na zadaném místě vybudí tento element magnetickou indukci

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2}$$

Směr vektoru magnetické indukce je dán vektorovým součinem

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0$$

a bude vycházet kolmo z náčrtu jako na obrázku (pravidlo pravé ruky)

Absolutní hodnota magnetické indukce je dána vztahem

$$|d\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0|}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cdot \sin(\varphi)}{r^2}$$

Do vztahu bylo dosazeno podle pravidel vektorového součinu

$$|d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0| = |d\mathbf{l}| |\mathbf{r}_0| \cdot \sin(\varphi) = dl \cdot \sin(\varphi)$$

Sečtením (integrací) intenzity elektrického pole všech proudových elementů na vodiči dostaneme výslednou magnetickou indukci podle vztahu

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{l=0}^{l=L} \frac{\sin(\varphi)}{r^2} dl$$

V integrálu jsou tři proměnné veličiny, které jsou navzájem závislé: l, φ, r , je proto nutné je převést vhodnou substitucí na jednu veličinu, nejlépe se hodí úhel φ :

element dl	$\tan(\varphi) = \frac{a}{b-l}$	$b-l = a \cdot \cot(\varphi)$	$dl = \frac{a}{\sin^2 \varphi} d\varphi$
$\frac{1}{r^2}$	$\sin(\varphi) = \frac{a}{r}$	$\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2(\varphi)}{a^2}$	
Integrační meze	$l = 0 \rightarrow \varphi = \alpha$		
	$l = L \rightarrow \varphi = \beta$		

Po dosazení

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{l=0}^{l=L} \frac{dl \cdot \sin(\varphi)}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a}{\sin^2 \varphi} \frac{\sin^2(\varphi)}{a^2} \sin(\varphi) d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot a} \int_{\alpha}^{\beta} \sin(\varphi) d\varphi$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

(MG*2)

{Př. MG/5} Magnetické pole v blízkosti tenkého nekonečně dlouhého vodiče ve vzduchu

Jak velká je magnetická indukce na poloměru vzdálenosti a od dlouhého tenkého vodiče ve vzduchu?

Navazuje na

{Př. MG/4} Magnetické pole buzené přímým úsekem vodiče

Pro určení magnetické indukce lze použít výsledku z příkladu {Př. MG/4} s tím, že se za úhly dosadí mezní hodnoty

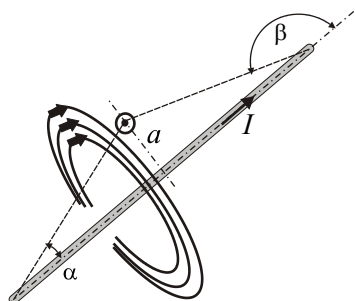
$$L \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow \pi$$

Vztah

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot a} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

přejde na

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$



(Obr. MG-9) Magnetické pole v okolí dlouhého vodiče

{Př. MG/6} Magnetické pole na ose tenkého kruhového závitu

Jaká je velikost magnetické indukce ve vzdálenosti x na ose tenkého kruhového závitu podle obrázku (Obr. MG-10)?

Navazuje na

MG-a Definice magnetické indukce, Biot-Savartův zákon

Podle Biotova-Savartova zákona vyvolá proudový element $d\mathbf{l}$ vytknutý na obvodě kruhového závitu magnetickou indukci

$$d\mathbf{B}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2}$$

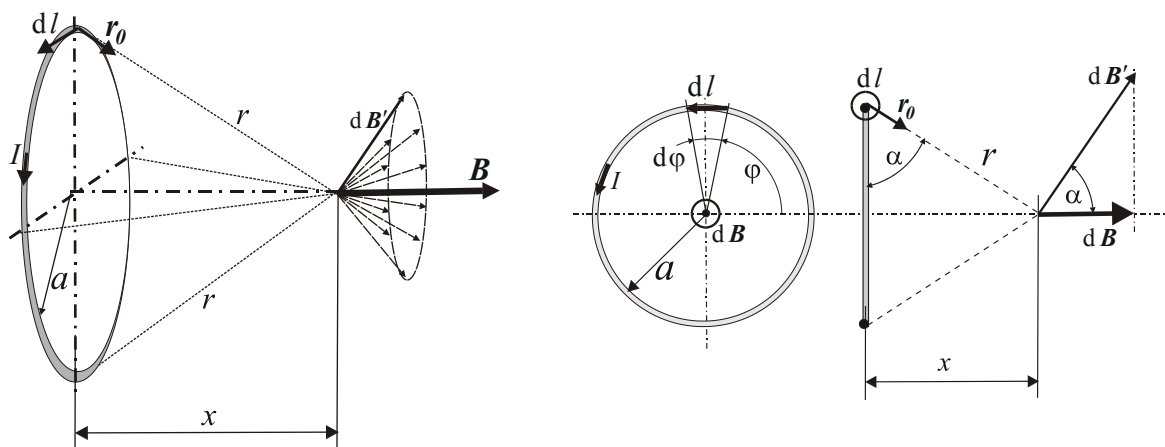
\mathbf{r}_0 je jednotkový vektor ve směru spojnice od elementu $d\mathbf{l}$ k místu, kde počítáme pole

$$|\mathbf{r}_0| = 1$$

Vektor magnetické indukce bude mít smysl daný kladným vektorovým součinem ve vztahu, bude tedy kolmý na $d\mathbf{l}$ i \mathbf{r}_0 .

Vektory $d\mathbf{l}$ a \mathbf{r}_0 jsou navíc v každém místě závitu na sebe kolmé, absolutní hodnota uvedeného vektorového součinu se dá snadno vyčíslit

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0 = |d\mathbf{l}| |\mathbf{r}_0| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = d\mathbf{l}$$



(Obr. MG-10) Magnetické pole na ose tenkého kruhového závitu

Absolutní hodnota magnetické indukce elementu $d\mathbf{l}$ bude tedy

$$|d\mathbf{B}'| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$

Všechny elementy po obvodě závitu mají stejnou vzdálenost k místu na ose, ve kterém počítáme pole

$$r = \sqrt{a^2 + x^2}$$

Budeme-li sčítat příspěvky magnetické indukce všech proudových elementů po obvodu závitu, ke každému elementu bude existovat symetrický element na protější straně, složky magnetické indukce kolmé na osu se odečtou, uplatní se pouze složka ve směru osy, která bude mít výslednou velikost

$$dB = |d\mathbf{B}'| \cos(\alpha) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cos(\alpha)$$

Výslednou magnetickou indukci dostaneme sečtením (integrací) příspěvků všech proudových elementů po obvodě závitu

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \cos(\alpha) \int_l dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{a}{r} \int_0^{2\pi} a d\varphi = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} \quad (\text{MG*3})$$

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{r}$$

$$B(x) = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{MG*4})$$

Největší hodnota magnetické indukce je na ose uprostřed závitu a má velikost

$$B_{\max} = B(x=0) = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

{Př. MG/7} Pole kruhového závitu - číselný příklad

Jak silné magnetické pole se vybudí uprostřed a na ose kruhového závitu o poloměru $a=15$ cm ve vzdálenosti $x=7,5$ cm, $x=15$ cm podle obrázku (Obr. MG-10)? Závít je protékán proudem $I=10$ A.

Navazuje na

{Př. MG/6} Magnetické pole na ose tenkého kruhového závitu

Velikost magnetické indukce je dána vztahem

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Zadané hodnoty jsou

$$a = 15 \text{ cm} \quad I = 10 \text{ A}$$

Vypočtené hodnoty magnetické indukce a intenzity magnetického pole budou

x	B(x) [T]	H(x) [A/m]
0	4.19E-5	33.33
7.5 cm	2.99E-5	23.85
15 cm	1.48E-5	11.78

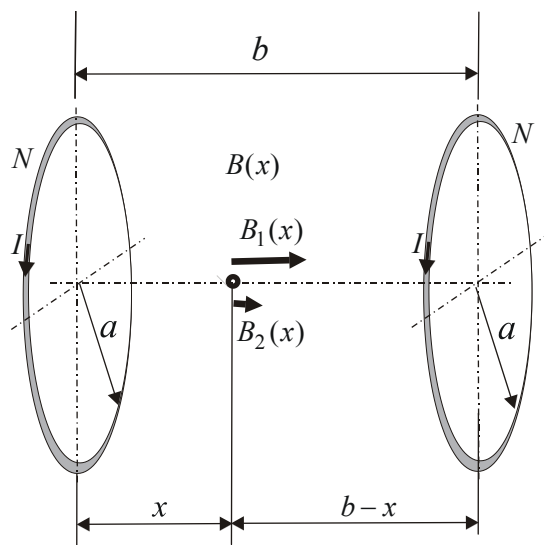
{Př. MG/8} Magnetické pole dvou tenkých kruhových cívek ve vzduchu-Helmholtzovy cívky

Jak velká magnetická indukce se vybudí na ose dvou tenkých souhlasně magnetujících cívek ve vzduchu s počtem závitů N a rozměry podle obrázku (Obr. MG-11)?

Navazuje na

{Př. MG/6} Magnetické pole na ose tenkého kruhového závitů

Cívký mají podobu elementárních kruhových smyček, budí tedy magnetické pole se stejným tvarem. Každá z cívek obsahuje N závitů, magnetické pole je proto N násobně silnější. Úlohu lze řešit prostou superpozicí magnetického pole dvou kruhových závitů podle příkladu ({Př. MG/6})



Magnetické pole cívky vlevo

$$B_1(x) = \frac{\mu_0 N I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Magnetické pole cívky vpravo

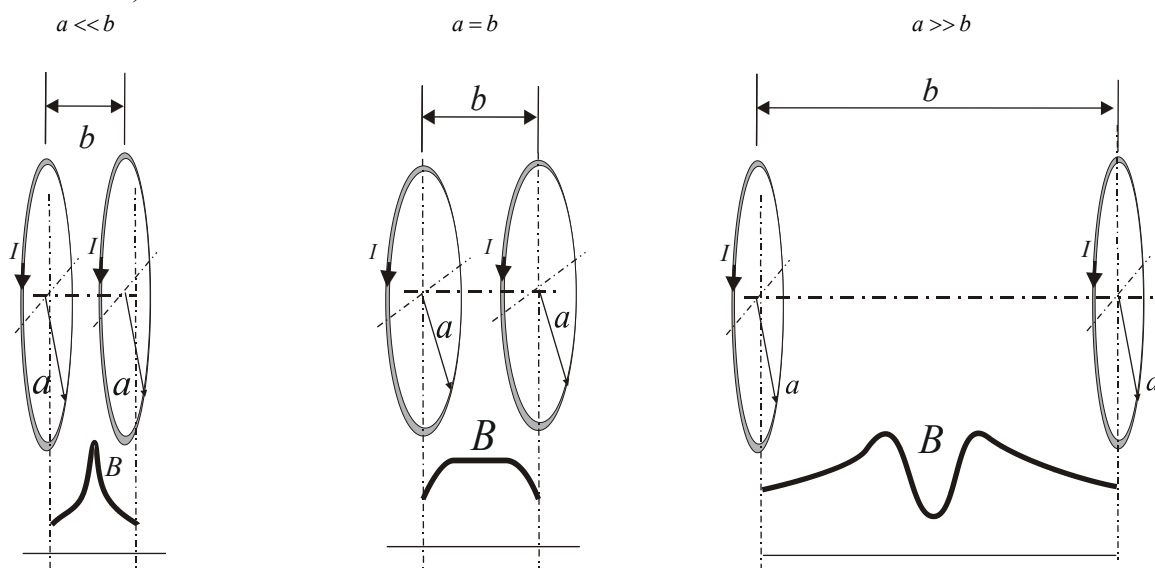
$$B_2(x) = \frac{\mu_0 N I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + (b-x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Výsledné magnetické pole mezi cívkami

$$B(x) = \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left[\frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(a^2 + (b-x)^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

(Obr. MG-11) Pole na ose dvou tenkých kruhových cívek

Analyzujeme-li hodnoty vypočteného magnetického pole na ose cívek pro různé hodnoty poloměrů a vzdáleností cívek, dospějeme k zajímavým výsledkům, které jsou graficky znázorněny a porovnány na (Obr. MG-12).



(Obr. MG-12) Průběh magnetického pole na ose dvou souhlasně magnetujících cívek pro různé vzdálenosti a poloměry

Je-li poloměr cívek srovnatelný s jejich vzdáleností, nachází se mezi cívkami určitá oblast, kdy je pole prakticky konstantní. Toho se využívá při konstrukci Helmholtzových cívek, které slouží k vytvoření homogenního magnetického pole.

{Př. MG/9} Magnetické pole dvou kruhových závitů - číselný příklad

Jak velká intenzita magnetického pole bude na ose mezi dvěma závity podle obrázku (Obr. MG-11), jsou-li oba závity stejné a mají-li rozměry podle příkladu ({Př. MG/7}), jejich vzdálenost je $b=15\text{ cm}$ a jsou protékány proudem $I=10\text{ A}$ ve stejném směru.

Navazuje na

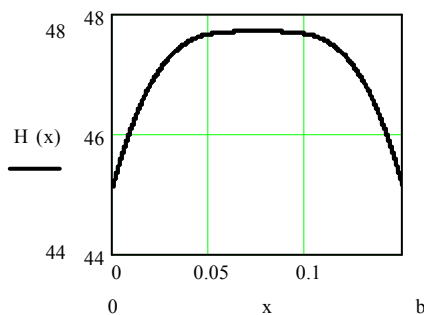
{Př. MG/8} Magnetické pole dvou tenkých kruhových cívek ve vzduchu- Helmholtzovy cívky

Intenzita magnetického pole se vypočte ze vztahu odvozeného v příkladě ({Př. MG/8})

$$H(x) = \frac{Ia^2}{2} \left[\frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(a^2 + (b-x)^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Zadané číselné hodnoty jsou

$$a = 15\text{ cm} \quad b = 15\text{ cm} \quad I = 10\text{ A} \\ 0 \leq x \leq b$$



Na obrázku (Obr. MG-13) je vynesena intenzita magnetického pole $H(x)$ v [A/m] a vzdálenost mezi závity x v [m]. Z grafu je vidět, že se mezi cívkami nachází poměrně široká oblast s konstantní intenzitou magnetického pole.

Magnetické pole uprostřed mezi cívkami je právě dvojnásobné, než pole jednoho závitu z příkladu ({Př. MG/7})

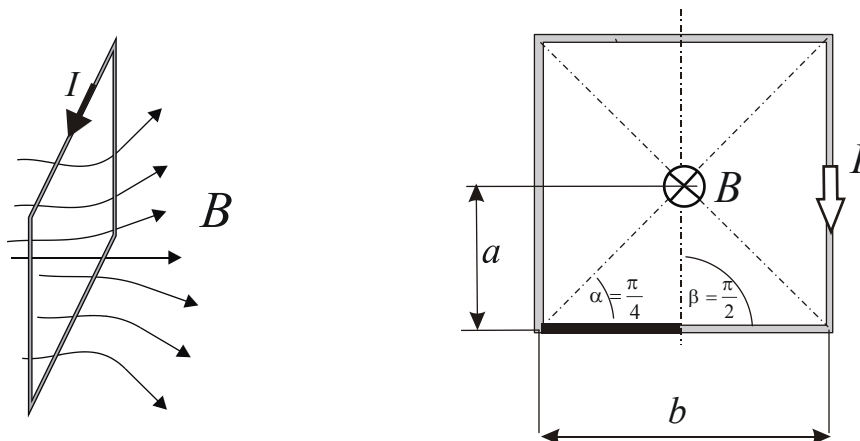
(Obr. MG-13) Průběh intenzity magnetického pole mezi kruhovými závity

{Př. MG/10} Magnetické pole na ose čtvercového závitu ve vzduchu

Jak velké magnetické pole se vybudí uprostřed čtvercového závitu ve vzduchu podle obrázku (Obr. MG-14)?

Navazuje na

{Př. MG/4} Magnetické pole buzené přímým úsekem vodiče



(Obr. MG-14) Magnetické pole uprostřed čtvercového závitu

Pro výpočet lze použít výsledku platného pro přímý úsek vodiče, kterým prochází proud. podle příkladu {Př. MG/4}

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

Když si obdélníkový závit rozdělíme na 8 dílů podle obrázku, každý z dílů vybudí uprostřed závitu stejně velkou indukci. Velikost integračních úhlů pro jeden úsek bude

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

smyčka je čtvercová a platí

$$a = \frac{b}{2}$$

Pro magnetickou indukci od vyznačeného úseku bude platit

$$\frac{1}{8} B = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{b}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi b \sqrt{2}}$$

Výsledná indukce uprostřed čtvercového závitu bude

$$B = 8 \frac{\mu_0 I}{2\pi b \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi b}$$

{Př. MG/11} Magnetické pole uprostřed čtvercového závitu - číselný příklad

Stanovme délku strany b tenkého čtvercového závitu tak, aby na své ose uprostřed vybudil stejnou magnetickou indukci jako tenký kruhový závit o poloměru a .

Navazuje na

{Př. MG/6} Magnetické pole na ose tenkého kruhového závitu

{Př. MG/10} Magnetické pole na ose čtvercového závitu ve vzduchu

Srovnáním vztahů pro magnetickou indukci uprostřed tenkého kruhového a čtvercového závitu

$$B_{kruh} = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

$$B_{čtverec} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi b}$$

vyplyne pro délku hrany čtvercového závitu

$$b = \frac{4a\sqrt{2}}{\pi} = 1.8a$$

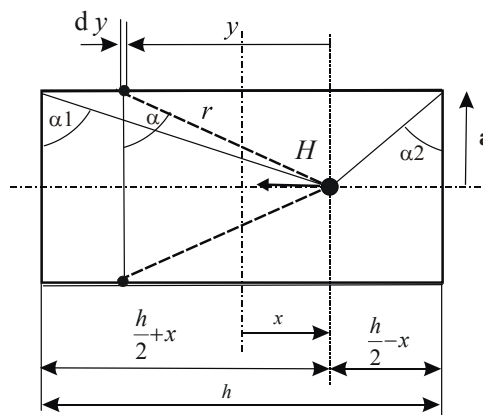
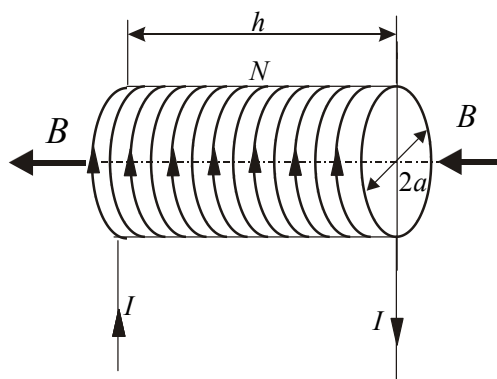
{Př. MG/12} Magnetické pole na ose tenké cívky (solenoidu) ve vzduchu

Jak velká magnetická indukce bude v různých místech na ose tenké cívky podle obrázku (Obr. MG-15), umístěné ve vzduchu?

Navazuje na

{Př. MG/6} Magnetické pole na ose tenkého kruhového závitu

Magnetické pole v určitém bodě na ose tenké cívky lze vypočítat jako superpozici magnetického pole pomyslných elementárních závitů, na které je možno si cívku rozdělít. Směr magnetického pole závisí na smyslu protékajícího proudu a je dán pravidlem pravé ruky. **Položíme-li pravou ruku na cívku aby prsty ukazovaly směr proudu, palec ukáže směr magnetické indukce v cívce (magnetického toku).**



(Obr. MG-15) Dlouhá tenká cívka- solenoid

Budeme-li počítat magnetické pole ve vzdálenosti x od středu cívky, lze takový jeden elementární závit vytknout ve vzdálenosti y od tohoto místa. Velikost proudu, který poteče tímto závitem, bude

$$dI = \frac{N I}{h} dy$$

Velikost magnetické indukce od tohoto závitů v bodě x je podle (MG*3)

$$dB = \mu_0 \frac{dI \cdot a}{2 r^2} \cos(\alpha) = \mu_0 \frac{N I a}{2 h r^2} \cos(\alpha) dy$$

Výslednou magnetickou indukci v bodě x dostaneme integrací (sečtením) příspěvků všech elementárních závitů

$$B(x) = \mu_0 \frac{N I a}{2 h} \int_{-\left(\frac{h}{2}+x\right)}^{\left(\frac{h}{2}-x\right)} \frac{\cos(\alpha)}{r^2} dy$$

Proměnné veličiny ve vztahu lze převést na úhel α

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{r} \qquad \frac{1}{r^2} = \left(\frac{\cos(\alpha)}{a} \right)^2 \qquad \tan(\alpha) = \frac{y}{a} \qquad dy = \frac{a}{\cos^2(\alpha)} d\alpha$$

Integrál pro magnetickou indukci je vhodné rozdělit na dvě části : Část cívky vlevo od místa x a vpravo od místa x

$$B(x) = \mu_0 \frac{N I}{2 h} \left[\int_0^{\alpha_1} \cos(\alpha) d\alpha + \int_0^{\alpha_2} \cos(\alpha) d\alpha \right]$$

Výsledná magnetická indukce v bodě x potom bude mít velikost

$$B(x) = \mu_0 \frac{N I}{2 h} [\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)]$$

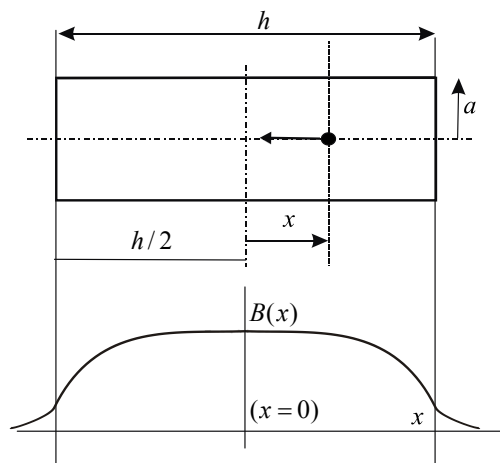
Po dosazení za sinus úhlů

$$\sin(\alpha_1) = \frac{\frac{h}{2} + x}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{2} + x\right)^2}} \qquad \sin(\alpha_2) = \frac{\frac{h}{2} - x}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{2} - x\right)^2}}$$

Konečný vztah pro magnetickou indukci na ose tenké cívky bude

$$B(x) = \mu_0 \frac{N I}{2 h} \left[\frac{\frac{h}{2} + x}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{2} + x\right)^2}} + \frac{\frac{h}{2} - x}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{2} - x\right)^2}} \right] \qquad \text{(MG*5)}$$

Průběh magnetické indukce na ose tenké cívky je na obrázku. Magnetické pole má pouze složku ve směru osy cívky. Smysl závisí na orientaci proudu podle pravidla pravé ruky. Největší indukce je uprostřed cívky, směrem k okrajům magnetická indukce klesá, vně cívky postupně vymizí.



(Obr. MG-16) Magnetická indukce na ose tenké cívky

{Př. MG/13} Magnetické pole v dlouhé tenké cívce ve vzduchu

Jak velká bude magnetická indukce na ose dlouhé tenké cívky umístěné ve vzduchu podle obrázku (Obr. MG-15)?

Navazuje na

{Př. MG/12} Magnetické pole na ose tenké cívky (solenoidu)

Budeme-li počítat pole uprostřed cívky ($x=0$) a přitom uvažovat, že poloměr cívky a je podstatně menší, než délka cívky h , vyjde pro magnetickou indukci vztah

$$a \ll h$$

$$B(x) = \mu_0 \frac{N I}{2 h} \left[\frac{\frac{h}{2} + x}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{2} + x\right)^2}} + \frac{\frac{h}{2} - x}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{2} - x\right)^2}} \right] = \frac{N I}{h}$$

Když budeme navíc uvažovat, že cívka je hodně dlouhá, lze v prakticky celém objemu předpokládat intenzitu magnetického pole o velikosti

$$H = \frac{N I}{h}$$

K podobnému závěru dojdeme přímou aplikací Ampérova zákona celkového proudu.

{Př. MG/14} Magnetické pole na ose tenké cívky - číselný příklad

Jak bude vypadat rozložení magnetického pole na ose tenké cívky podle obrázku (Obr. MG-15), která má poloměr $a=45$ mm, délku $h=300$ mm, počet závitů $N=410$ a je protékána proudem $I=3$ A?

Navazuje na

{Př. MG/12} Magnetické pole na ose tenké cívky (solenoidu) ve vzduchu

{Př. MG/13} Magnetické pole v dlouhé tenké cívce ve vzduchu

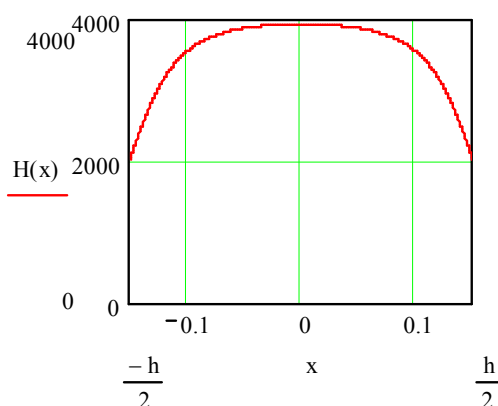
Intenzitu magnetického pole na ose tenké cívky je možné vypočítat podle vztahu (MG*5) v příkladu ({Př. MG/12})

Pro zadané hodnoty je intenzita magnetického pole pro $x=0$, tedy uprostřed cívky

$$H(x=0) = 3930 \text{ A/m}$$

Intenzita magnetického pole na krajích cívky tedy pro $x=150$ mm klesne asi na 60% hodnoty uprostřed

$$H(x=150 \text{ mm}) = 2030 \text{ A/m}$$



(Obr. MG-17) Rozložení intenzity magnetického pole po výšce cívky

Na obrázku (Obr. MG-17) je graf znázorňující rozložení intenzity magnetického pole $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ v [A/m] po výšce cívky x v [m]. Z grafu je vidět, že se uprostřed cívky nachází poměrně široká oblast s konstantní intenzitou magnetického pole.

Kdyby byla cívka hodně dlouhá (viz {Př. MG/13}), bylo by v ní pole konstantní a mělo by intenzitu

$$H = \frac{N I}{h} = 4100 \text{ A/m}$$

MG-b Ampérův zákon celkového proudu

Když zvolíme pomyslnou uzavřenou dráhu a vypočítáme křivkový integrál magnetické indukce podél této dráhy, bude ve vzduchu nebo vakuu platit

$$\oint_l \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$$

Výsledná hodnota integrálu bude rovna **součtovému proudu**, který je uzavřenou dráhou obemknut. Nezáleží na tom, v jakém místě proud prochází, ani na tom, je-li to proud jednoho vodiče, několika dílčích vodičů, nebo je proud spojitě rozložen s nějakou proudovou hustotou.

Tento vztah však neplatí pouze ve vzduchu, platí zcela obecně. Sumární proud, který je na pravé straně rovnice, nemusí být pouze proudem volně se pohybujících částic, je to obecně **celkový proud** a je součtem proudu volných částic i pomyslných **vázaných proudů**.

$$\oint_l \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\sum I + \sum I_v \right)$$

Jako vázané proudy si představujeme pomyslné proudy, které se objeví na povrchu magnetika po jeho vložení do magnetického pole. Fiktivní vázaný proud vzniká jako určitá reakce materiálových látek na přítomnost magnetického pole, souvisí s existencí magnetických dipólů (elementárních proudových smyček v materiálu). Jako elementární proudové smyčky si můžeme představit elektrony pohybující se po určitých drahách kolem jader atomů. Působením magnetického pole jsou tyto smyčky natáčeny tak, že magnetické pole posilují u látek paramagnetických a zeslabují u látek diamagnetických. Dílčí proudy pomyslných smyček se v objemu homogenního magnetika kompenzují, projeví se jako celkový vázaný proud na povrchu. Vliv vázaného proudu se popisuje veličinou, která se nazývá **magnetizace \mathbf{M}** , podobně jako vliv vázaných nábojů v dielektriku, který se popisuje veličinou, která se nazývá polarizace

Vektor **magnetizace \mathbf{M}** je definován tak, aby integrál magnetizace po uzavřené dráze, která prochází určitým materiálem, byl roven pomyslnému celkovému proudu, který se na povrchu magnetického materiálu vytvoří

$$\oint_l \mathbf{M} \, d\mathbf{l} = \sum I_v$$

Po dosazení do integrálu magnetické indukce potom vyplyne

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{B} \, d\mathbf{l} &= \mu_0 \left(\sum I + \oint_l \mathbf{M} \, d\mathbf{l} \right) \\ \oint_l \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) d\mathbf{l} &= \oint_l \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \sum I \end{aligned}$$

Z posledního vztahu potom vyplývá další veličina definovaná v magnetickém poli, která se nazývá intenzita magnetického pole **\mathbf{H}**

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

Pro integrál intenzity magnetického pole potom platí vztah

$$\oint_l \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \sum I$$

který se nazývá **Ampérův zákon celkového proudu**. Proud na pravé straně je dán pouze volnými pohybujícími se náboji, které jsou zdrojem pro vybuzení magnetického pole. Intenzita magnetického pole **\mathbf{H}** je svým významem ekvivalentní elektrické indukci **\mathbf{D}** v elektrickém poli. Ta je také závislá pouze na volných nábojích, zdrojích elektrického pole.

V případě lineární závislosti magnetizace na intenzitě magnetického pole by se dalo psát

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

a celý jev magnetizace by byl skryt v jedné konstantě, která se nazývá permeabilita

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

Konstanta $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ se nazývá permeabilita vakua,

konstanta μ_r se nazývá relativní permeabilita,

konstanta χ_m se nazývá magnetická susceptibilita.

Zde je však zásadní rozdíl ve srovnání s polarizací v elektrickém poli. V naprosté většině technicky důležitých materiálů, takzvaných **feromagnetik**, **lineární závislost neplatí**, vztah mezi indukcí a intenzitou magnetického pole je složitý. **Závislost je nejen nelineární, ale navíc i nejednoznačná**, je popsána takzvanou hysterezní smyčkou. Nedá se ani říci, že se magnetické materiály chovají jako izotropní. **V mnohých materiálech závisí tedy i na směru magnetování** a dokonce se toho i často využívá. Jednoduchý model s natáječicemi se proudovými smyčkami (elementárními magnetickými dipóly) situaci náležitě nepopisuje. Celý jev se vysvětluje podstatně složitěji pomocí takzvaných **magnetických domén**, ve kterých se elementární dipóly organizují do určitých skupin působením jiných sil, než jsou pouhé síly vyvolané magnetickým polem. Celý jev se dá teoreticky popsat pouze na základě kvantové fyziky.

Při studiu magnetického pole ve vakuu, kde žádné magnetické materiály nejsou, se vyskytují pouze budící proudy volných nábojů. Mezi magnetickou indukcí a intenzitou magnetického pole platí jednoduchý vztah

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H}$$

{Př. MG/15} Ověření platnosti Ampérova zákona pro kruhovou integrační dráhu kolem dlouhého vodiče

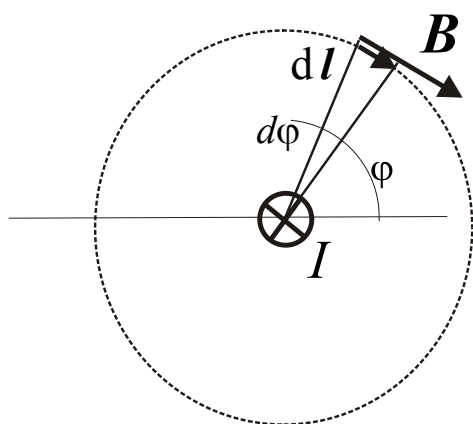
Na základě vztahů odvozených pro magnetické pole kolem dlouhého vodiče ve vzduchu ukažme platnost Ampérova zákona pro kruhovou integrační dráhu.

Navazuje na

{Př. MG/5} Magnetické pole v blízkosti tenkého nekonečně dlouhého vodiče ve vzduchu

MG-b Ampérův zákon celkového proudu

Platnost Ampérova zákona lze jednoduše ukázat na dlouhém proudovém vlákně, když si jako integrační dráhu zvolíme kružnici se středem na vodiči. Na této dráze je velikost indukce konstantní, směr indukce je v každém bodě tečný k dráze a tedy souhlasný s vektorem $d\mathbf{l}$. Integrál v Ampérově zákoně je možno snadno vyčíslit



(Obr. MG-18) Kruhová integrační dráha okolo přímého dlouhého vodiče

$$\mathbf{B} d\mathbf{l} = |\mathbf{B}| |d\mathbf{l}| \cos(0) = B \cdot \underbrace{a \cdot d\varphi}_{dl}$$

a po integraci bude výsledek integrálu

$$\oint_l \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B \cdot \underbrace{a \cdot d\varphi}_{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot a \cdot 2\pi = \mu_0 I$$

Mezi magnetickou indukcí a intenzitou platí vztah

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

Ve vzduchu kolem přímého vodiče je tedy

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = I$$

Ampérův zákon jistě v tomto jednoduchém případě platí.

{Př. MG/16} Platnost Ampérova zákona v případě, že integrační dráha kolem dlouhého vodiče není kruhová

Na základě vztahů odvozených pro magnetické pole kolem dlouhého vodiče ve vzduchu ukažme platnost Ampérova zákona pro integrační dráhu libovolného tvaru.

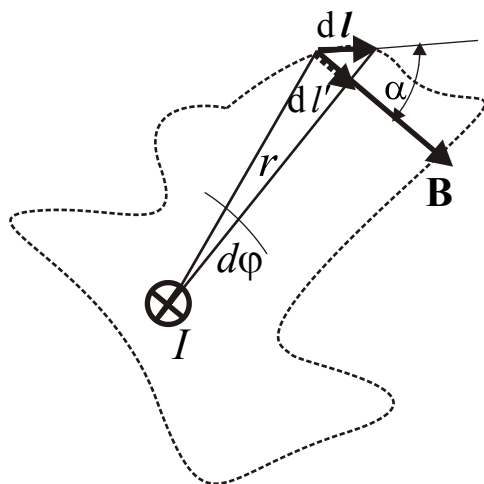
Navazuje na

{Př. MG/5} Magnetické pole v blízkosti tenkého nekonečně dlouhého vodiče ve vzduchu

MG-b Ampérův zákon celkového proudu

{Př. MG/15} Ověření platnosti Ampérova zákona pro kruhovou integrační dráhu kolem dlouhého vodiče

Podobně jednoduše jako v {Př. MG/15} se dá ukázat, že zcela stejné vztahy platí i v případě, kdy tenký dlouhý vodič neleží uprostřed kruhové integrační dráhy, kdy je integrační dráha obecná křivka kolem vodiče.



(Obr. MG-19) Integrační dráha kolem vodiče není kruhová

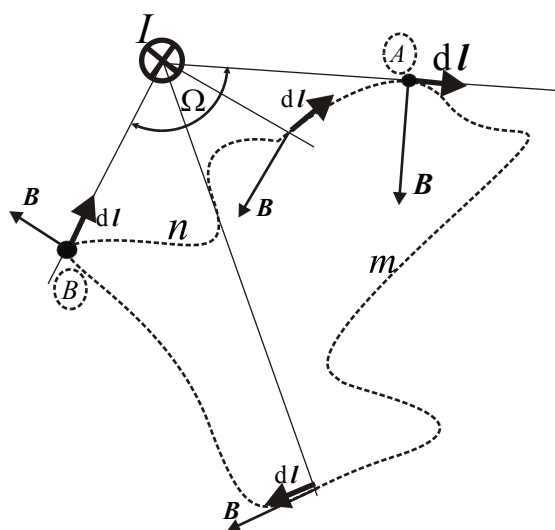
Potom platí

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = |\mathbf{B}| |d\mathbf{l}| \cos(\alpha) = B \cdot dl' = B \cdot r \cdot d\varphi$$

a po integraci

$$\oint_l \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B \cdot r \cdot d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r \cdot d\varphi = \mu_0 I$$

V případě, kdy vodič leží mimo integrační dráhu, lze použít podobný postup jako v předchozím výpočtu. Když si uzavřenou dráhu rozdělíme pomocí dvou bodů **A** a **B** na dvě části **m** a **n**, musí být integrál mezi body A a B pro oba úseky stejný



(Obr. MG-20) Proudovodič leží mimo integrační dráhu

$$\int_A^B \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_0^{\Omega} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r \cdot d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \Omega$$

$$\int_B^A \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_0^{\Omega} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r \cdot d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \Omega$$

Potom platí

$$\oint_l \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{B} d\mathbf{l} + \int_B^A \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_0^{\Omega} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r \cdot d\varphi - \int_{\Omega}^0 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r \cdot d\varphi = 0$$

protože

$$\int_B^A \mathbf{B} d\mathbf{l} = - \int_A^B \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \Omega$$

MG-c Použití Ampérova zákona pro výpočet magnetického pole

Ampérův zákon lze použít pro výpočet magnetického pole v případech, kdy dokážeme jednoduše řešit definiční integrál

$$\oint_l \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \sum I$$

To je možné tehdy, když známe tvar pole, ale neznáme jeho velikost. Jinými slovy to znamená, že dokážeme vymezit oběhovou dráhu procházející místem, kde budeme určovat intenzitu magnetického pole a navíc budou splněny následující podmínky:

a) Oběhová dráha při integraci musí být zvolena tak, aby k ní byly vektory intenzity magnetického pole v každém místě tečné, potom přejde skalární součin na prostý algebraický

$$\oint_l \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \oint_l H \, dl$$

b) Na oběhové dráze musí být magnetické pole všude konstantní, integraci lze tedy nahradit prostým algebraickým součinem délky dráhy a intenzity magnetického pole

$$\oint_l H \, dl = H \cdot l = \sum I$$

Intenzitu magnetického pole je potom možné vypočítat jako podíl proudu uzavřeného do oběhové dráhy a délky dráhy

$$H = \frac{\sum I}{l}$$

Celý postup je podobný aplikaci Gaussovy věty v elektrostatickém poli s tím rozdílem, že je přímo aplikovatelný prakticky pouze na dva případy a to je magnetické pole relativně tenkého dlouhého vodiče protékaného proudem a magnetické pole dlouhého válcového vodiče protékaného proudem. Tyto případy jsou však poměrně důležité a umožňují řešit magnetické pole v úlohách, které vzniknou superpozicí těchto základních případů.

{Př. MG/17} Magnetické pole kolem přímého dlouhého tenkého vodiče

Jak velká bude intenzita magnetického pole na poloměru vzdálenosti r od dlouhého tenkého proudovodiče podle (Obr. MG-21)?

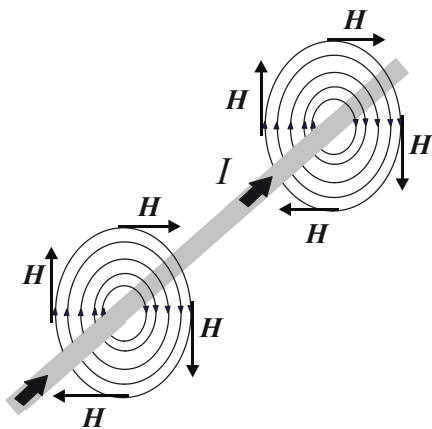
Navazuje na

{Př. MG/4} Magnetické pole buzené přímým úsekem vodiče

{Př. MG/5} Magnetické pole v blízkosti tenkého nekonečně dlouhého vodiče

MG-b Ampérův zákon celkového proudu

Identická úloha již byla řešena jako limitní případ pro magnetické pole buzené nad přímým úsekem proudovodiče, ve které bylo použito přímo definičního Biot-Savartova zákona.



(Obr. MG-21) Siločáry magnetického pole kolem tenkého dlouhého vodiče

Siločáry magnetického pole tvoří koncentrické kružnice se středy na ose proudovodiče. Smysl intenzity elektrického pole a siločar je dán pravidlem pravé ruky. Intenzita magnetického pole (popřípadě magnetická indukce) je v každém bodě tečná k siločáře.

Ve stacionárním nebo kvazistacionárním magnetickém poli, které je buzeno časově neproměnnými, nebo pomalu proměnnými proudy, platí Ampérův zákon celkového proudu v podobě

$$\oint_l \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \sum I$$

Zvolíme-li myšlenou uzavřenou integrační dráhu kolem proudovodičů, je integrál intenzity magnetického pole podél této dráhy vždy roven celkovému proudu ve vodičích, které dráha obemyká, bez ohledu na to, jaký má pomyslná dráha tvar.

Ampérův zákon se dá využít v případě, že známe

symetrii pole. Budeme-li integrovat podél siločáry, která je v případě přímého tenkého vodiče kruhová, bude na integrační dráze všude konstantní hodnota elektrické indukce a navíc bude směr vektoru indukce rovnoběžný se směrem elementu dráhy. Integrace se změní na prostý algebraický součin intenzity pole v daném místě a délky dráhy

$$\oint_l \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \oint_l H \, dl = H(r) \cdot 2\pi r = I$$

Intenzita magnetického pole v daném místě o poloměru r tedy bude

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

(Obr. MG-22) Výpočet intenzity magnetického pole kolem tenkého dlouhého vodiče

{Př. MG/18} Magnetické pole v dlouhém válcovém vodiči

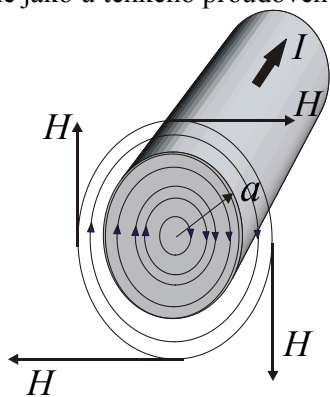
Jak velká bude intenzita magnetického pole uvnitř a vně dlouhého válcového vodiče s rozměry podle obrázku (Obr. MG-23)?

Navazuje na

MG-c Použití Ampérova zákona pro výpočet magnetického pole

{Př. MG/17} Magnetické pole kolem přímého dlouhého tenkého vodiče

V případě masivního dlouhého vodiče lze předpokládat, že zůstane zachována válcová symetrie pole stejně jako u tenkého proudového vlákna.



(Obr. MG-23) Siločáry magnetického pole uvnitř a vně dlouhého válcového vodiče

Silocháry magnetického pole tvoří koncentrické kružnice se středy na ose proudovodiče. Smysl intenzity elektrického pole a siločar je dán pravidlem pravé ruky. Intenzita magnetického pole (popřípadě magnetická indukce) je v každém bodě tečná k siločáře. Podle Ampérova zákona je integrál intenzity magnetického pole po uzavřené dráze roven celkovému proudu, který dráha obemyká

$$\oint_l \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \sum I$$

Při výpočtu magnetického pole je vhodné si problém rozdělit na prostor uvnitř vodiče a vně vodiče.

Zvolíme-li uzavřenou kruhovou dráhu uvnitř vodiče podle obrázku (Obr. MG-24) pro poloměry

$$r \leq a$$

bude dráha obemykat část celkového proudu

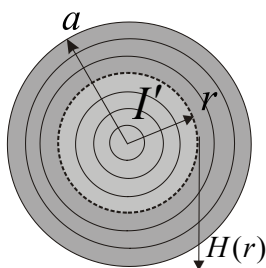
$$I' = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 = I \frac{r^2}{a^2}$$

Po dosazení do Ampérova zákona

$$\oint_l H \, dl = H(r) \cdot 2\pi r = I' = I \frac{r^2}{a^2}$$

Intenzita magnetického pole v libovolném místě uvnitř vodiče je přímo úměrná proudu a platí pro ní vztah

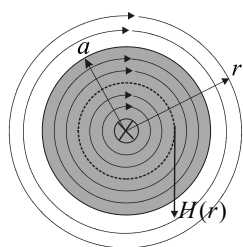
$$H(r) = \frac{I}{2\pi a^2} r$$



(Obr. MG-24) Intenzita magnetického pole uvnitř dlouhého válcového vodiče

Intenzita magnetického pole uprostřed vodiče bude nulová, oběhová dráha neobemkne žádný proud. Dráha vedená po povrchu vodiče obemkne celý proud, magnetická indukce tam bude maximální

$$H(r=0) = 0$$



(Obr. MG-25) Intenzita magnetického pole vně dlouhého válcového vodiče

$$H(r = a_-) = \frac{I}{2\pi a}$$

Zvolíme-li uzavřenou kruhovou dráhu vně vodiče podle obrázku (Obr. MG-25) pro poloměry

$$r \geq a$$

bude obemykat vždy celkový proud vodičem

$$\oint_l H dl = H(r) \cdot 2\pi r = I$$

Pro intenzitu bude platit stejný vztah, jako pro tenké proudové vlákno

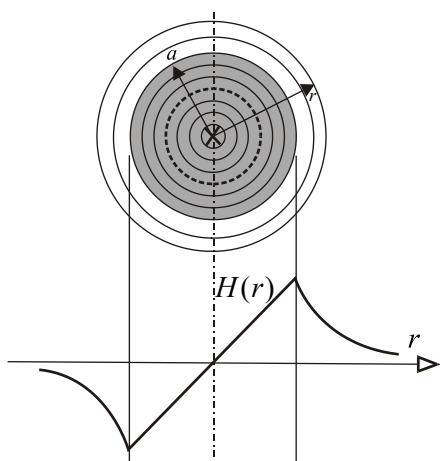
$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

Intenzita magnetického pole na povrchu vodiče zprava i zleva musí být stejná, intenzita se mění spojitě

$$H(a_+) = \frac{I}{2\pi a}$$

Pro velkou vzdálenost od vodiče magnetické pole postupně vymizí

$$H(r \rightarrow \infty) = 0$$



(Obr. MG-26) Průběh intenzity magnetického pole v dlouhém válcovém vodiči

Celkový průběh intenzity elektrického pole je na obrázku (Obr. MG-26)

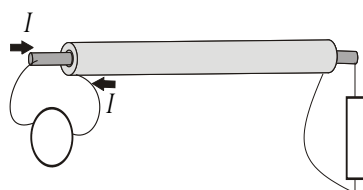
{Př. MG/19} Magnetické pole v koaxiálním kabelu

Jak velká intenzita magnetického pole bude uvnitř a vně koaxiálního kabelu?

Navazuje na

MG-b Ampérův zákon celkového proudu

{Př. MG/18} Magnetické pole v dlouhém válcovém vodiči



(Obr. MG-27) Koaxiální kabel jako součást vnějšího elektrického obvodu

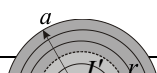
Při výpočtu magnetického pole v koaxiálním kabelu je třeba předpokládat, že je kabel součástí obvodu, ve kterém teče proud jedním vodičem v jednom směru a druhým vodičem zpět

Pro stanovení intenzity magnetického pole na různých místech kabelu je vhodné použít Ampérova zákona celkového proudu a jako integrační dráhu volit siločáru s poloměrem stejným jako poloměr vzdálenosti místa, ve kterém pole počítáme

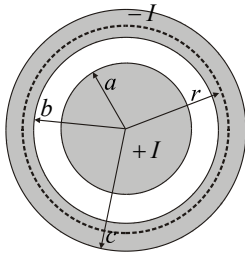
$$\oint_l H dl = \sum I$$

Velikost integrálu bude rovna celkovému proudu, který oběhová dráha obemyká. Výpočet se rozpadne na tři intervaly : Vnitřní vodič (žilá) koaxiálního kabelu, vnější vodič (plášť koaxiálního kabelu) a prostor mezi žilou a pláštěm.

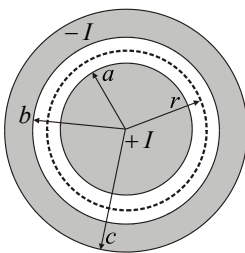
Zvolíme-li uzavřenou kruhovou dráhu ve vnitřním vodiči (žile) podle obrázku (Obr. MG-28) pro poloměry



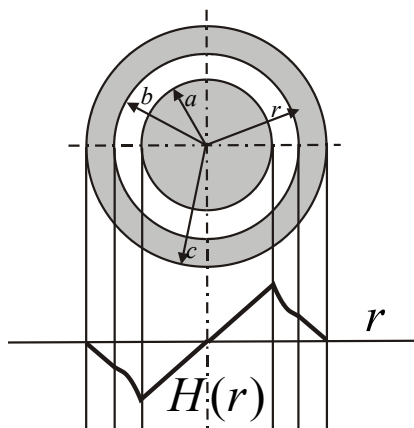
(Obr. MG-28) Magnetické pole uvnitř žíly koaxiálního kabelu



(Obr. MG-29) Oběhová dráha mezi žilou a pláštěm koaxiálního kabelu



(Obr. MG-30) Oběhová dráha uvnitř pláště koaxiálního kabelu



(Obr. MG-31) Celkový průběh intenzity magnetického pole v koaxiálním kabelu

$$r \leq a$$

bude oběhová dráha obemykat pouze část celkového proudu. V souladu s {Př. MG/18} bude platit lineární závislost

$$H(r) = \frac{I}{2\pi a^2} r$$

V hraničních bodech intervalu

$$H(r=0) = 0$$

$$H(r=a_-) = \frac{I}{2\pi a}$$

V prostoru mezi vnitřním a vnějším vodičem v koaxiálním kabelu (mezi žilou a pláštěm) podle obrázku (Obr. MG-29) pro poloměry

$$a \leq r \leq b$$

uzavře oběhová dráha celý proud vnitřního vodiče a bude platit stejně jako v {Př. MG/18}

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

V hraničních bodech intervalu

$$H(r=a_+) = \frac{I}{2\pi a}$$

$$H(r=b_-) = \frac{I}{2\pi b}$$

V prostoru vnějšího vodiče (v plášti koaxiálního kabelu) podle obrázku (Obr. MG-30) pro poloměry

$$b \leq r \leq c$$

uzavře oběhová dráha celý kladný a část záporného proudu

$$I' = I - I \frac{\pi r^2 - \pi b^2}{\pi c^2 - \pi b^2} = I \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

$$\oint_l H dl = H(r) \cdot 2\pi r = I' = I \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

V hraničních bodech

$$H(r \rightarrow b_+) = \frac{I}{2\pi b}$$

$$H(r \rightarrow c_-) = 0$$

V prostoru mimo koaxiální kabel

$$r \geq c$$

uzavře oběhová dráha vždy celý kladný a záporný proud, tedy nulový výsledný proud a bude platit

$$H(r) = 0$$

Intenzita magnetického pole se v koaxiálním kabelu rozloží spojitě, její celkový průběh je na obrázku (Obr. MG-31).

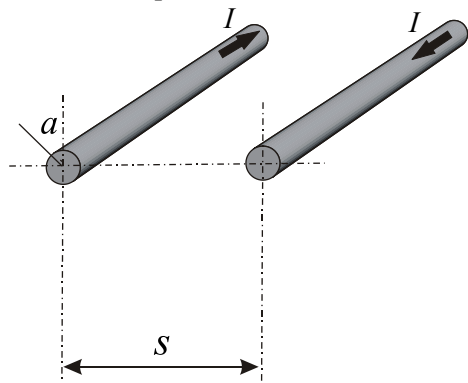
Jak velká bude intenzita magnetického pole na ose dvou vodičového vedení s rozměry podle obrázku (Obr. MG-32)?

Navazuje na

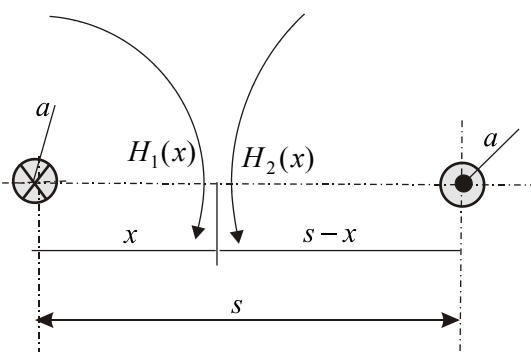
MG-b Ampériův zákon celkového proudu

{Př. MG/18} Magnetické pole v dlouhém válcovém vodiči

Dvou vodičové vedení je opět nutné si představit jako součást elektrického obvodu. Jedním vodičem teče proud v jednom směru, druhým vodičem se vrací v opačném směru. Výsledné magnetické pole na ose je možno počítat jako součet pole obou vodičů. Pole jednoho vodiče se určí pomocí Ampérova zákona celkového proudu.



(Obr. MG-32) Dvou vodičové vedení



(Obr. MG-33) Výpočtové schéma dvou vodičového vedení

Intenzita magnetického pole vodiče vlevo

$$H_1(x) = \frac{I}{2\pi x}$$

Intenzita magnetického pole vodiče vpravo

$$H_2(x) = \frac{I}{2\pi (s-x)}$$

Magnetické pole se sčítá (viz siločáry magnetického pole podle pravidla pravé ruky)

$$H(x) = H_1(x) + H_2(x) = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{s-x} \right)$$

Intenzita magnetické pole na levém vodiči bude

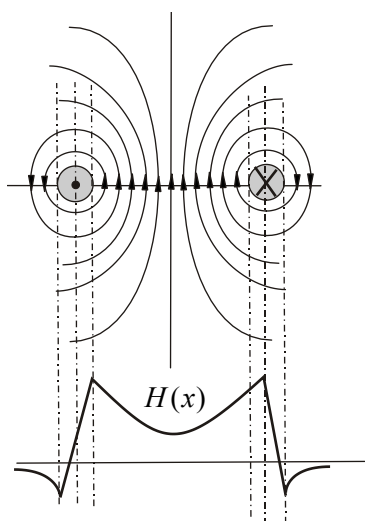
$$H(x=a) = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{s-a} \right)$$

Intenzita magnetického pole na pravém vodiči bude musí být stejná

$$H(x=s-a) = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{a} \right)$$

Magnetické pole uprostřed mezi vodiči dvou vodičového vedení bude

$$H(x=s/2) = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{2}{s} + \frac{2}{s} \right) = \frac{2I}{\pi s}$$



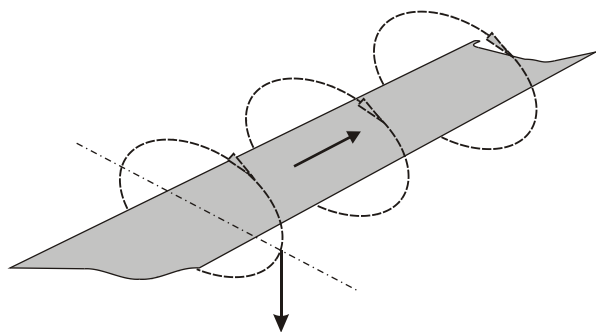
(Obr. MG-34) Průběh intenzity magnetického pole na ose dvou vodičového vedení

{Př. MG/21} Magnetické pole na podélné ose vně tenkého vodivého pásu protékaného proudem

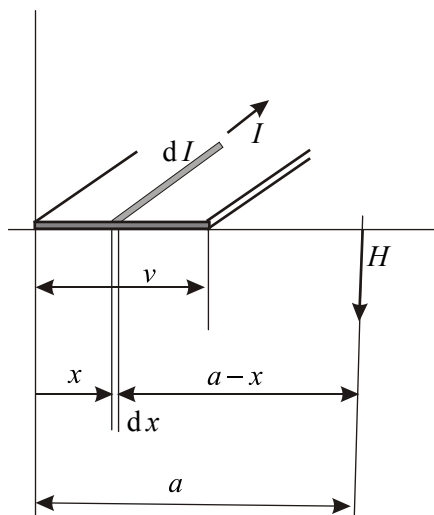
Jak velká intenzita magnetického pole bude na podélné ose tenkého pásu protékaného proudem podle obrázku (Obr. MG-35), (Obr. MG-36)?

Navazuje na

{Př. MG/17} Magnetické pole kolem přímého dlouhého tenkého vodiče



(Obr. MG-35) Magnetické pole tenkého pásu protékaného proudem



(Obr. MG-36) Výpočtové schéma pro tenký pás protékaný proudem

Budeme-li počítat intenzitu magnetického pole na místě ležícím v jedné rovině vedle tenkého dlouhého pásového vodiče ve vzdálenosti a , můžeme si pásový vodič pomyslně rozdělit na elementární tenké rovnoběžné vodiče. Pásem protéká celkový proud I . Jeden z takových vodičů je vytknut ve vzdálenosti x od levého okraje pásu a má šířku dx . Intenzita magnetického pole bude mít v daném místě směr podle pravidla pravé ruky jako na obrázku (Obr. MG-35), (Obr. MG-36). Velikost proudu, který protéká vytknutým elementárním vodičem je

$$dI = \frac{I}{v} dx$$

Tento proud vybudí v místě o vzdálenosti a intenzitu magnetického pole

$$dH = \frac{dI}{2\pi(a-x)} = \frac{I}{2\pi v(a-x)} dx$$

Integrací získáme intenzitu pole celého tenkého pásu (všech elementárních vodičů)

$$H = \frac{I}{2\pi v} \int_{x=0}^{x=a} \frac{1}{a-x} dx = \frac{I}{2\pi v} \ln\left(\frac{a}{a-v}\right)$$

Pro šířku pásu limitující k nule, nebo vzdálenost a podstatně větší než šířka pásu, bude platit podobně jako u tenkého proudového vlákna

$$H = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{I}{2\pi v} \ln\left(\frac{a}{a-v}\right) = \frac{I}{2\pi a}$$

{Př. MG/22} Magnetické pole tenkého vodivého pásu - číselný příklad

Vypočtete intenzitu magnetického pole H na podélné ose ve vzdálenosti $a=10$ cm od levé hrany tenkého dlouhého vodivého pásu podle obrázku (Obr. MG-36), který je **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** protékan proudem $I=10$ A. Šířka pásu je $v=3$ cm.

Navazuje na

{Př. MG/21} Magnetické pole na podélné ose vně tenkého vodivého pásu protékaného proudem

$$H = \frac{I}{2\pi v} \ln\left(\frac{a}{a-v}\right) = \frac{10}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-2}} \ln\left(\frac{10 \cdot 10^{-2}}{7 \cdot 10^{-2}}\right) = 18.92 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Pokud budeme pásový vodič pokládat za dostatečně úzký ve srovnání se vzdáleností, ve které počítáme magnetické pole a nahradíme ho tenkým vodičem uprostřed vodivého pásu, bude mít vzdálenost

$$y = a - \frac{v}{2} = 8.5 \text{ cm}$$

k místu, kde budeme počítat pole. Intenzita magnetického pole by potom pro srovnání vyšla

$$H = \frac{I}{2\pi y} = 18.72 \text{ A/m}$$

což se v tomto případě vůbec neliší od přesnějšího vztahu.

{Př. MG/23} Magnetické pole na příčné ose tenkého vodivého pásu protékaného proudem

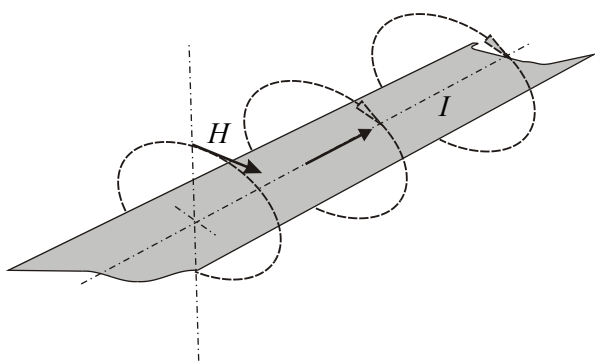
Jak velká bude intenzita magnetického pole na příčné ose nad tenkým vodivým pásem protékaným proudem podle obrázku (Obr. MG-37), (Obr. MG-38)?

Navazuje na

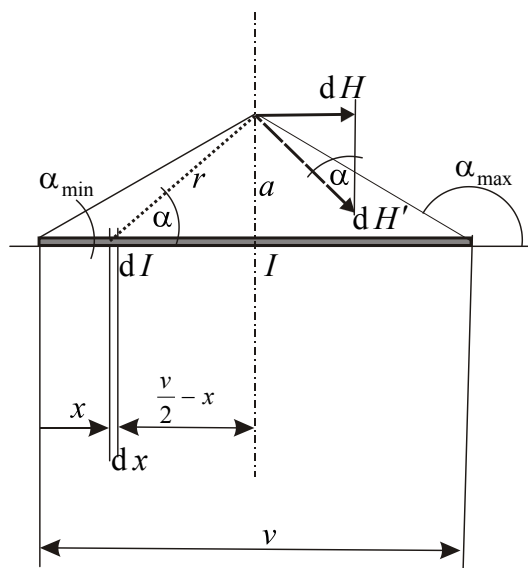
{Př. MG/17} Magnetické pole kolem přímého dlouhého tenkého vodiče

{Př. MG/21} Magnetické pole na podélné ose vně tenkého vodivého pásu protékaného proudem

Magnetické pole na příčné ose je možné určit jako v předchozím případě superpozicí pole pomyslných proudových vláken, na které si vodič rozdělíme. Z obrázku (Obr. MG-37) je vidět, že intenzita magnetického pole má pouze složku rovnoběžnou s šířkou plochého pásu.



(Obr. MG-37) Magnetické pole na příčné ose tenkého pásu



(Obr. MG-38) Schéma pro výpočet intenzity magnetického pole

Proud protékající elementárním vodičem o šířce dI bude

$$dI = \frac{I}{v} dx$$

Elementární vodič ve vzdálenosti x vybudí magnetické pole o velikosti

$$dH' = \frac{dI}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi v r} dx$$

Z magnetického pole se uplatní pouze podélná složka

$$dH = dH' \sin(\alpha) = \frac{I}{2\pi v r} \sin(\alpha) dx$$

Výsledné magnetické pole získáme sečtením pole všech dílčích vodičů (integrací)

$$H = \frac{I}{2\pi v} \int_{x=0}^{x=v} \frac{\sin(\alpha)}{r} dx$$

Dílčí vodiče v jedné i druhé polovině pásového vodiče vyvolají stejnou intenzitu pole, pouze opačně orientovanou, integraci stačí provést v jedné polovině pásu a násobit $2x$.

$$H = \frac{I}{\pi v} \int_{x=0}^{x=v/2} \frac{\sin(\alpha)}{r} dx$$

Pro výslednou integraci je třeba převést všechny proměnné veličiny, které jsou navzájem závislé, na jednu. Pro snadnou integraci se nejlépe hodí úhel α :

$$\cot g(\alpha) = \frac{v}{2} - x$$

$$dx = -\frac{a}{\sin^2(\alpha)} d\alpha$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin(\alpha)}{a} \qquad \tan(\alpha_{\min}) = \frac{2a}{v}$$

Po dosazení bude pro výslednou intenzitu pole ve vzdálenosti a na příčné ose bude platit

$$H = \frac{I}{\pi v} \int_{x=0}^{x=v/2} \frac{\sin(\alpha)}{r} dx = \frac{I}{\pi v} \int_{\alpha=\alpha_{\min}}^{\alpha=\pi/2} d\alpha = \frac{I}{\pi v} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{\min} \right)$$

Správnost vztahu lze překontrolovat opět pro velkou vzdálenost od plochého pásu nebo pro podmínku, že šířka pásu je podstatně menší než vzdálenost, ve které pole počítáme. Potom vyjde stejný vztah jako pro pole tenkého vodiče

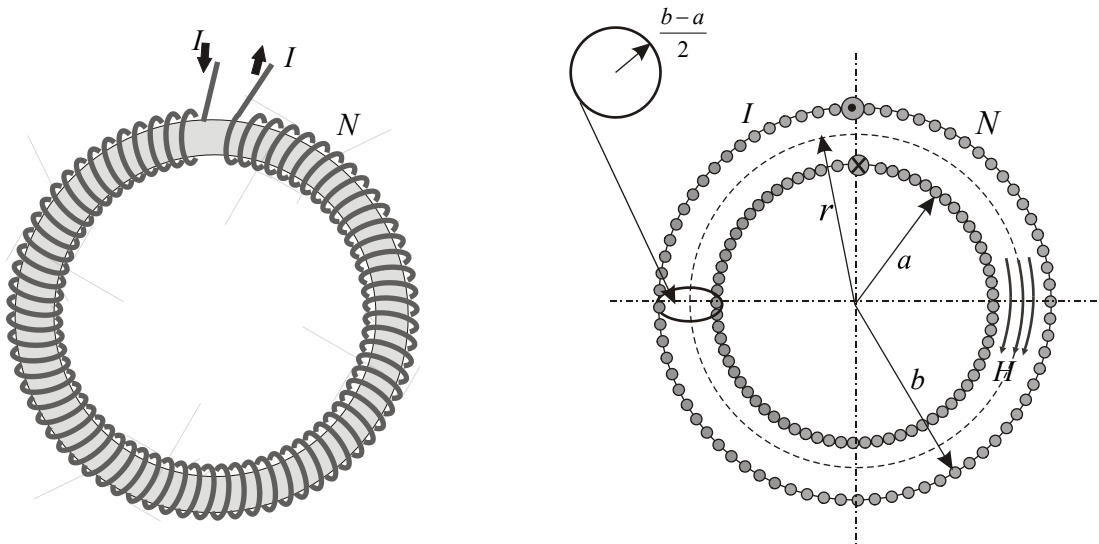
$$H = \frac{I}{2\pi a}$$

{Př. MG/24} Cívka navinutá ve tvaru toroidu

Jak velká intenzita magnetického pole je uvnitř a vně vzduchové cívky navinuté ve tvaru toroidu s rozměry podle obrázku (Obr. MG-39)? Cívka má N závitů.

Navazuje na

MG-c Použití Ampérova zákona pro výpočet magnetického pole



(Obr. MG-39) Cívka navinutá ve tvaru toroidu

Z důvodu symetrie procházejí siločáry magnetického pole uvnitř cívky rovnoběžně se stěnami. Aplikací Ampérova zákona pro poloměry uvnitř cívky bude platit

$$a \leq r \leq b$$

Celkový proud, který obemyká integrační dráha, je roven součinu počtu závitů a proudu cívkou

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$$

$$H(r) \cdot 2\pi r = N \cdot I$$

$$H(r) = \frac{N \cdot I}{2\pi r}$$

Pro poloměry uvnitř kruhového otvoru

$$r \leq a$$

neobemkne oběhová dráha žádný proud, magnetické pole zde musí být nulové

$$H = 0$$

Pro poloměry vně vinutí toroidu

$$r \geq b$$

obemkne oběhová integrační dráha úplně stejný kladný i záporný proud, součtový proud je tedy nulový a intenzita magnetického pole je také nulová.

MG-d Proudovodiče nad feromagnetickým rozhraním, metoda zrcadlení v magnetickém poli

V magnetickém poli je také možno použít metodu zrcadlení a to v případech, kdy se proudovodiče nebo proudové smyčky nacházejí nad rozlehlými magneticky dobře vodivými poloprostory. Ve stacionárním i nestacionárním magnetickém poli vyplývá z podmínek na rozhraní, že siločáry magnetického pole vstupují do prostoru s velkou permeabilitou kolmo.

Normálové složky magnetické indukce a tečné složky intenzity magnetického pole na rozhraní dvou prostředí v magnetickém poli musí být stejné

$$B_{n1} = B_{n2}$$

$$H_{t1} = H_{t2}$$

to vyplývá přímo z vlastnosti magnetického pole a ze vztahů

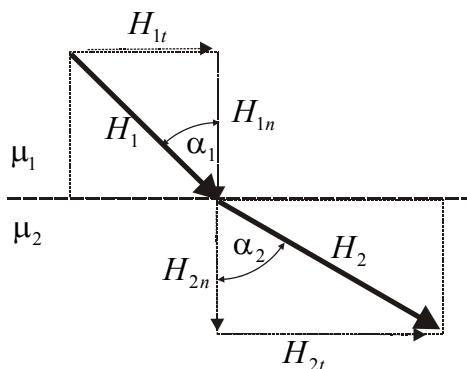
$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$$

Pro intenzitu magnetického pole vyplatí

$$\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$$

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$



Pro úhel, pod jakým vstupují a vystupují siločáry magnetického pole na rozhraní potom platí

$$\tan \alpha_1 = \frac{H_{1t}}{H_{1n}}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{H_{2t}}{H_{2n}}$$

Podmínky pro lom siločar magnetického pole na rozhraní dvou prostředí

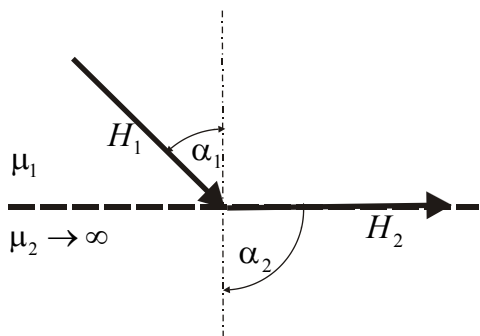
$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{H_{2t}}{H_{2n}} \frac{H_{1n}}{H_{1t}} = \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \tan \alpha_1\right)$$

(Obr. MG-40) Lom siločar na rozhraní dvou magnetik

Pro siločáry vstupující do magneticky dokonale vodivého materiálu bude platit

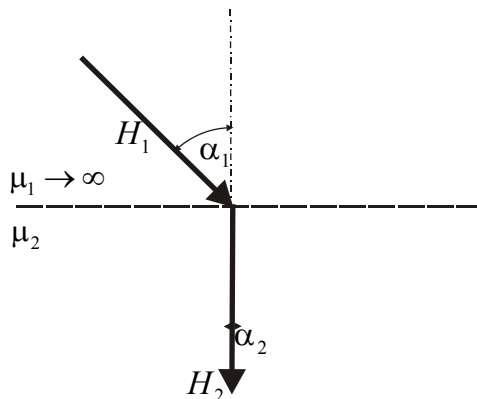
$$\mu_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha_2 = \arctan(0) = 0$$



(Obr. MG-41) Siločáry vstupující do dokonale magneticky vodivého materiálu

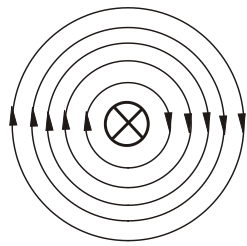
Pro siločáry vystupující z magneticky dokonale vodivého materiálu bude platit

$$\mu_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha_2 = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

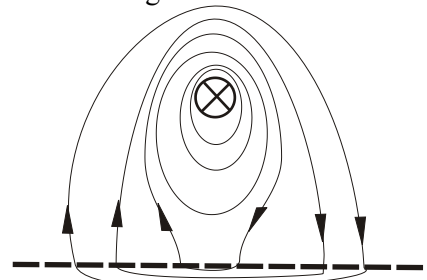


(Obr. MG-42) Siločáry vystupující z dokonale magneticky vodivého materiálu

Na obrázku (Obr. MG-43) a (Obr. MG-44) je schematicky znázorněno, jak se zdeformují siločáry magnetického pole dlouhého vodiče v případě jeho umístění nad feromagnetickou rovinou.



(Obr. MG-43) Siločáry magnetického pole dlouhého vodiče ve vzduchu



(Obr. MG-44) Siločáry magnetického pole dlouhého vodiče nad feromagnetickou rovinou

Metoda zrcadlení

V následujících příkladech bude ukázáno, že se podmínku kolmého vstupu siločar v náhradním výpočtovém modelu podaří splnit tím, že **pomyslně na druhou stranu rozhraní umístíme symetricky stejný vodič (proudovou smyčku, cívku)**. Smysl proudu náhradního obrazu musí být totožný s originálem. Tím se metoda zrcadlení v magnetickém poli formálně liší od metody zrcadlení v elektrickém poli, kde je náboj zrcadleného objektu opačný.

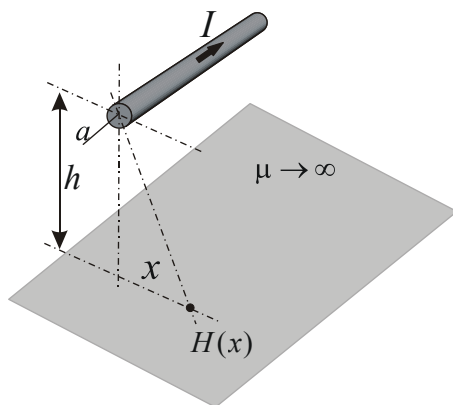
{Př. MG/25} Vodič nad magneticky dokonale vodivou rovinou

Jak velká je intenzita magnetického pole na feromagnetické rovině ve vzdálenosti x od průmětu osy vodiče do roviny podle obrázku (Obr. MG-45)?

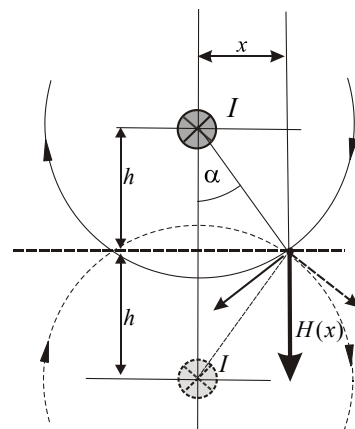
Navazuje na

{Př. MG/17} Magnetické pole kolem přímého dlouhého tenkého vodiče

MG-d Proudovodiče nad feromagnetickým rozhraním, metoda zrcadlení v magnetickém poli



(Obr. MG-45) Vodič nad feromagnetickou rovinou



(Obr. MG-46) Náhradní model pro výpočet magnetického pole vodiče nad feromagnetickou rovinou

Umístíme-li proudem protékající vodič nad feromagnetickou rovinu, původně kruhové siločáry magnetického pole se deformují tak, aby do feromagnetické roviny vstupovaly kolmo.

Výsledné pole lze vyřešit na základě principu zrcadlení. Symetricky do stejné vzdálenosti umístíme pomyslný obraz vodiče. Smysl proudu v doplněném vodiči musí být shodný s proudem v originálním vodiči (viz siločáry na obrázku). Magnetické pole obou vodičů se sečte a skutečně bude potom splněna podmínka kolmého vstupu siločar do roviny.

Budeme-li například počítat intenzitu magnetické pole na feromagnetické rovině pod vodičem v ose vzdálenosti x podle obrázku, budeme vektorově sčítat příspěvky skutečného a fiktivního vodiče, uplatní se pouze průměty do kolmého směru k rovině. Pro velikost intenzity magnetického pole bude platit

$$H(x) = 2 \frac{I}{2\pi \sqrt{h^2 + x^2}} \sin(\alpha) = 2 \frac{I}{2\pi \sqrt{h^2 + x^2}} \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

$$H(x) = \frac{Ix}{\pi(h^2 + x^2)}$$

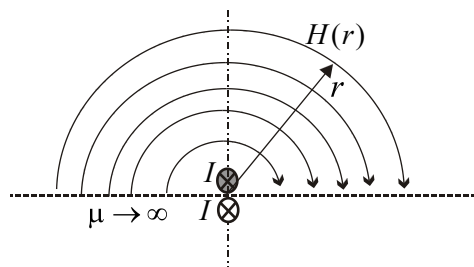
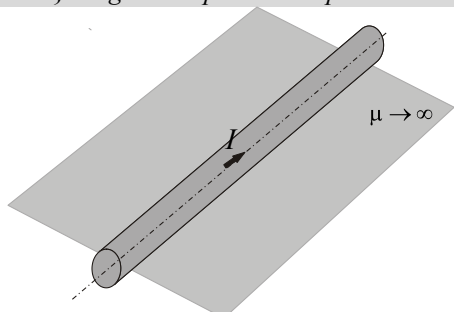
{Př. MG/26} Magnetické pole vodiče ležícího přímo na dělicí rovině s feromagnetickým materiálem

Jak velké pole kolem sebe vybudí relativně dlouhý a tenký vodič protékáný proudem, který leží na rovinném rozhraní s feromagnetickým materiálem nekonečně velké magnetické vodivosti podle obrázku (Obr. MG-47)?

Navazuje na

MG-d Proudovodiče nad feromagnetickým rozhraním, metoda zrcadlení v magnetickém poli

{Př. MG/17} Magnetické pole kolem přímého dlouhého tenkého vodiče



(Obr. MG-47) Vodič na feromagnetické rovině (Obr. MG-48) Náhradní model pro výpočet
Siločáry magnetického pole jsou části kružnic. Siločáry vstupují do dělicí roviny kolmo. Ve spodním poloprostoru je vzhledem k nekonečné magnetické vodivosti nulová intenzita magnetického pole, bude platit

$$\oint H dl = H(r) \pi r = I$$

$$H(r) = \frac{I}{\pi r}$$

Na celý problém je možno pohlédnout ještě z druhé strany, i v tomto případě totiž musí platit metoda zrcadlení. Podle stejných pravidel nahradíme ve výpočtovém modelu vliv feromagnetické roviny symetrickým obrazem vodiče. Protože vodič leží přímo na rovině, padne obraz do stejného místa a celá soustava se chová tak, jako by tam byl dvojnásobný proud

$$\oint H dl = H(r) 2 \pi r = I + I' = 2I$$

Pro výslednou intenzitu pole bude platit stejný vztah

$$H(r) = \frac{I}{\pi r}$$

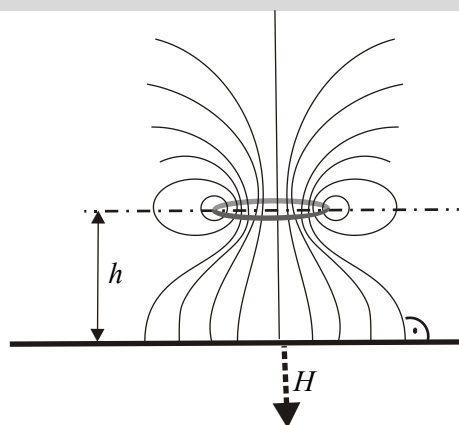
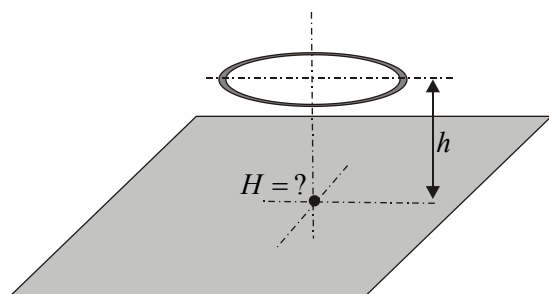
{Př. MG/27} Závít nad feromagnetickou rovinou

Jak velká intenzita magnetického pole bude na feromagnetické rovině na ose pod kruhovým závitem podle obrázku (Obr. MG-49)?

Navazuje na

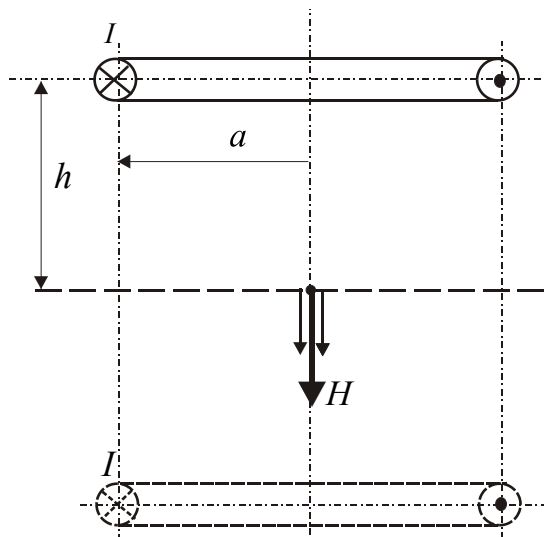
MG-d Proudovodiče nad feromagnetickým rozhraním, metoda zrcadlení v magnetickém poli

{Př. MG/6} Magnetické pole na ose tenkého kruhového závitu



(Obr. MG-49) Závít nad feromagnetickou rovinou

(Obr. MG-50) Siločáry magnetického pole závitu nad rovinou



(Obr. MG-51) Náhradní soustava pro výpočet magnetického pole

Pro splnění podmínky kolmého vstupu siločar do feromagnetické roviny doplníme ve výpočtovém modelu pomyslně na druhou stranu rozhraní stejně velký kruhový závit protékáný proudem ve stejném smyslu. Výsledné magnetické pole na rovině bude potom dvojnásobkem pole jednoho kruhového závitu a bude mít opět opěť osový směr.

$$H = 2 \left[\frac{I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = I \frac{a^2}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

{Př. MG/28} Cívka se stínícím pláštěm

Jak velké intenzita magnetického pole bude ve vzduchové cívce obklopené stínícím pláštěm podle obrázku (Obr. MG-52)?

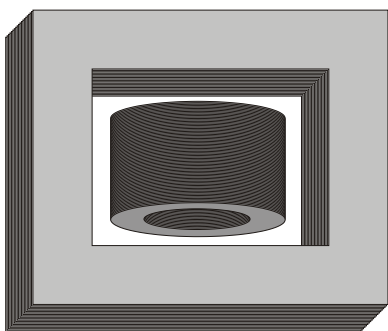
Navazuje na

MG-c Použití Ampérova zákona pro výpočet magnetického pole

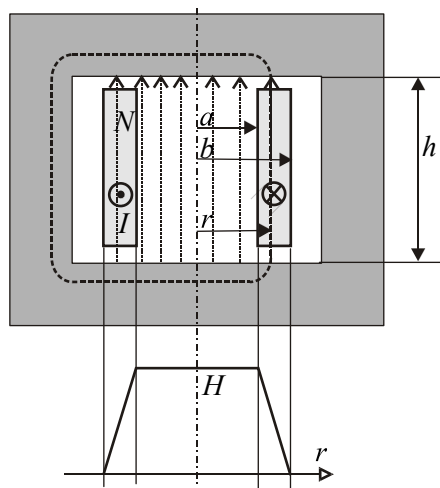
MG-d Proudovodiče nad feromagnetickým rozhraním, metoda zrcadlení v magnetickém poli

{Př. MG/12} Magnetické pole na ose tenké cívky (solenoidu) ve vzduchu

Bude-li stínící plášť dostatečně blízko od čelních ploch cívky, siločáry magnetického pole v cívce budou přímky, které procházejí rovnoběžně s osou cívky. Nahoře a dole budou siločáry vstupovat kolmo do feromagnetického materiálu. Ve feromagnetickém materiálu s velikou permeabilitou bude mít intenzita magnetického pole zanedbatelnou hodnotu.



(Obr. MG-52) Vzduchová cívka s feromagnetickým stínícím pláštěm



(Obr. MG-53) Siločáry magnetického pole a průběh intenzity v cívce se stínícím pláštěm

Podle Ampérova zákona musí při oběhu po libovolné uzavřené dráze procházející středem cívky a magnetickým obvodem platit

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = N I$$

Zvolíme-li uzavřeno dráhu tak, aby procházela magnetickým obvodem, kde je intenzita magnetického pole nulová, a vnitřkem cívky podél siločáry, zbavíme se skalárního součinu.

Není také jediný důvod k tomu, aby se intenzita magnetického pole po délce dráhy v cívce měnila, integrace může být nahrazena prostým algebraickým součinem. Pokud budeme uvažovat dokonale magneticky vodivý materiál stínícího pláště, na tvaru integrační dráhy v magnetickém obvodu vůbec nebude záležet, intenzita magnetického pole i integrál intenzity tam bude nulový.

Pro uzavřenou dráhu procházející dutinou cívky pro poloměry

$$r \leq a$$

obemkne tato dráha všechny závity cívky, kterými prochází proud. Pro intenzitu magnetického pole bude platit

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot h = N \cdot I$$

$$H = \frac{N I}{h}$$

Prochází-li uzavřená dráha stěnou cívky pro poloměry

$$a \leq r \leq b$$

obemkne dráha v závislosti na velikosti poloměru vždy jenom část proudu

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot h = N I \cdot \left[1 - \frac{r-a}{b-a} \right]$$

Pro intenzitu magnetického pole bude platit

$$H = \frac{N I}{h} \left[1 - \frac{r-a}{b-a} \right]$$

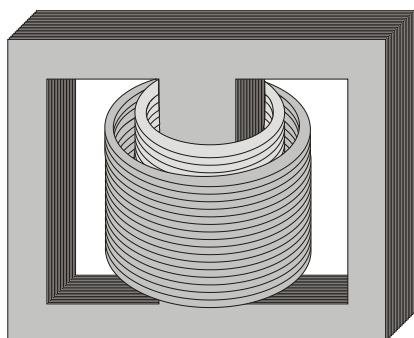
Celkový průběh intenzity magnetického pole v cívce je na obrázku (Obr. MG-53).

{Př. MG/29} Magnetické pole v cívkách transformátoru

Jak vypadá magnetické pole ve vinutí ideálního transformátoru podle obrázku (Obr. MG-55)?

Navazuje na

{Př. MG/28} Cívka se stínícím pláštěm



(Obr. MG-54) Cívky transformátoru na jádře

Na jádře jsou nyní nasunuty dvě cívky podobné jako v příkladu ({Př. MG/28}). Jedna je primární cívka transformátoru a druhá sekundární. Z principu činnosti transformátoru vyplývá, že cívkami teče proud v opačném smyslu, ampérvávity jsou při zanedbání magnetizačního proudu vyrovnané. Platí

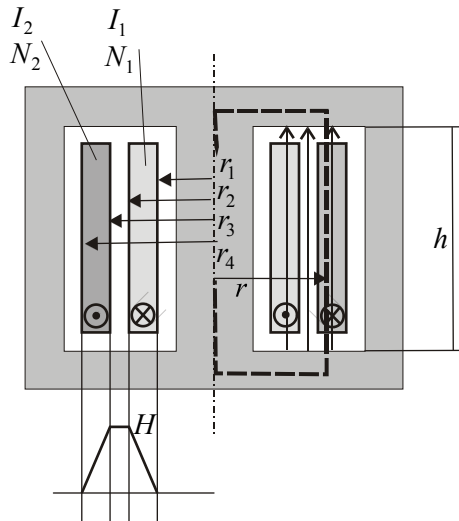
$$N_1 I_1 = N_2 I_2$$

Budou-li spojky magnetického obvodu přiléhat dosti blízko k čelům cívek, budou siločáry magnetického pole procházet paralelně s osami cívek.

Pro určení velikosti intenzity magnetického pole je možné použít opět Ampérova zákona celkového proudu.

Zvolíme-li uzavřenou integrační dráhu, která bude procházet středním sloupkem transformátoru a vinutím cívek podél siločáry magnetického pole, bude hodnota integrálu rovna odpovídající části celkového proudu (ampérvávity), které jsou do dráhy uzavřeny. Magnetický odpor materiálu magnetického obvodu lze vůči vzduchu zanedbat a intenzitu magnetického pole zde považovat za nulovou. Bude tedy podle zákona celkového proudu platit

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot h = \sum N I$$



(Obr. MG-55) Magnetické pole ve vinutí transformátoru

Magnetické pole bude mít charakteristický lichoběžníkový tvar jako na obrázku (Obr. MG-55).

Pro poloměry podle obrázku (Obr. MG-55)

$$r \leq r_1$$

obemkne myšlená oběhová dráha nulový proud uvnitř primární cívky. Pro intenzitu magnetického pole bude platit

$$H = 0$$

Ve vlastním vinutí primární cívky pro poloměry

$$r_1 \leq r \leq r_2$$

obemkne příslušná oběhová dráha část odpovídající příslušným obemknutým ampéřzávitům

$$H = \frac{N_1 I_1}{h} \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}$$

V prostoru mezi primární a sekundární cívkou pro poloměry

$$r_2 \leq r \leq r_3$$

obemkne oběhová dráha všechny ampéřzávity

$$H = \frac{N_1 I_1}{h} = \frac{N_2 I_2}{h}$$

Ve vinutí sekundární cívky pro poloměry

$$r_3 \leq r \leq r_4$$

se budou ampéřzávity odečítat, protože vinutím teče proud opačného smyslu

$$H = \frac{N_1 I_1}{h} \left[1 - \frac{r - r_3}{r_4 - r_3} \right]$$

MG-e Cívky na magnetických obvodech

Když nasadíme cívku na magnetický obvod, jehož permeabilita je podstatně větší než permeabilita okolního vzduchu, dá se očekávat, že magnetické pole v magnetickém obvodu bude podstatně silnější, než magnetické pole ve vzduchu. Za určitých zjednodušujících předpokladů lze magnetické pole v magnetickém obvodu snadno vypočítat. Jedním z předpokladů, který samozřejmě není vždy přesně splněn, je rovnoměrné rozložení magnetické indukce po určitém průřezu magnetického obvodu. Dalším předpokladem je magnetické pole soustředěné pouze do magnetického obvodu, což umožní zanedbání takzvaného rozptylového pole, které se uzavírá vzduchem.

Když si zvolíme libovolnou uzavřenou dráhu procházející magnetickým obvodem, musí platit podle zákona celkového proudu

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum N I \tag{MG*6}$$

kde

$$\sum N I$$

jsou takzvané ampéřzávity. Tento člen odpovídá celkovému proudu uzavřenému do pomyslné oběhové dráhy, je dán počtem závitů a proudem protékajícím těmito závitů.

Tento vztah je formálně podobný rovnici, která platí ve stacionárním proudovém poli pro integrál intenzity elektrického pole po uzavřené dráze procházející zdrojem napětí.

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = U_{em}$$

Na pravé straně je takzvané **elektromotorické napětí**, proto se odpovídající člen na pravé straně rovnice (MG*6) nazývá analogicky **magnetomotorické napětí** U_m .

Protne-li v libovolném místě magnetický obvod pomyslnou obalovou plochou, vyplývá z vírové povahy magnetického pole

$$\oiint_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0$$

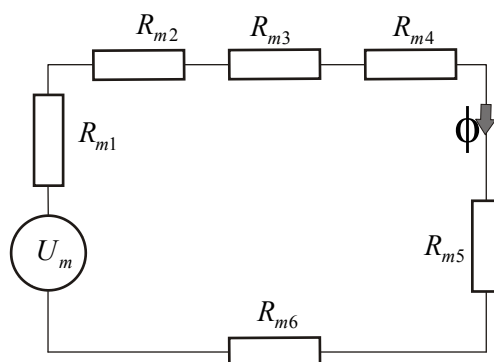
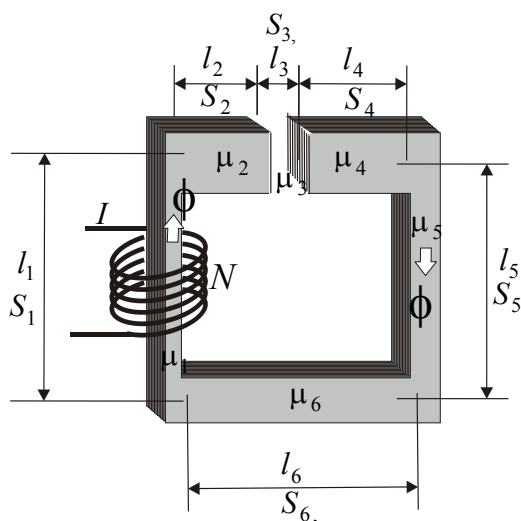
To znamená, že celkový tok magnetické indukce (magnetický tok) procházející uzavřenou plochou musí být nulový

$$\sum \Phi = 0$$

Obdobný vztah platí ve stacionárních proudových obvodech pro proudovou hustotu a proudy, je to zákon kontinuity elektrického proudu

$$\oiint_S \mathbf{J} \, d\mathbf{S} = 0$$

$$\sum I = 0$$



(Obr. MG-56) Obecný magnetický obvod s cívkami (Obr. MG-57) Náhradní obvod pro výpočet

Když použijeme uvedené skutečnosti a analogie například pro popis jednoduchého magnetického obvodu podle obrázku (Obr. MG-56), který je složen z několika částí s různou délkou, průřezem a permeabilitou, bude podle Ampérova zákona platit

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \sum N I = l_1 H_1 + l_2 H_2 + l_3 H_3 + l_4 H_4 + l_5 H_5 + l_6 H_6$$

Vynásobením a podělením stejnými členy dostaneme vztah

$$\sum N I = l_1 H_1 \frac{\mu_1 S_1}{\mu_1 S_1} + l_2 H_2 \frac{\mu_2 S_2}{\mu_2 S_2} + l_3 H_3 \frac{\mu_3 S_3}{\mu_3 S_3} + l_4 H_4 \frac{\mu_4 S_4}{\mu_4 S_4} + l_5 H_5 \frac{\mu_5 S_5}{\mu_5 S_5} + l_6 H_6 \frac{\mu_6 S_6}{\mu_6 S_6}$$

a po další úpravě vztah

$$U_m = \sum N I = \Phi \cdot (R_{m1} + R_{m2} + R_{m3} + R_{m4} + R_{m5} + R_{m6}) = \Phi \cdot R_m$$

který je možné vyjádřit v podobě

$$\Phi = \frac{U_m}{R_m}$$

Tento vztah se jmenuje **Hopkinsonův zákon** a je analogický Ohmovu zákonu v elektrických obvodech. Místo napětí zde vystupuje takzvané **magnetomotorické napětí**

$$U_m = \sum N I,$$

místo proudu magnetický tok a místo odporu veličina, která se nazývá **magnetický odpor - reluktance**. Magnetický odpor se počítá podle analogického vztahu jako odpor v elektrických obvodech, místo elektrické vodivosti ve vztazích figuruje permeabilita.

$$R_m = \sum_i R_{mi}$$

$$R_{mi} = \frac{l_i}{\mu_i S_i}$$

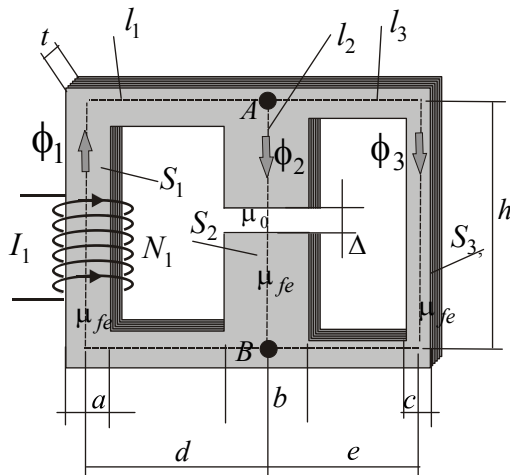
Na základě podobnosti můžeme dokonce nakreslit určité náhradní schéma ekvivalentní s podobným schématem v odpovídajícím elektrickém obvodem viz obrázek (Obr. MG-57).

{Př. MG/30} Výpočet magnetického pole v magnetickém obvodu

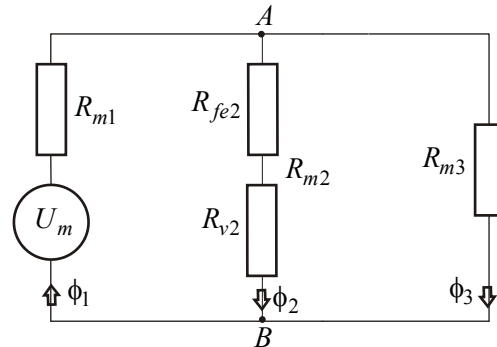
Jaké magnetické pole vznikne v magnetickém obvodu se vzduchovou mezerou, na kterém je nasazena cívka s procházejícím proudem jako na obrázku (Obr. MG-58).

Navazuje na

MG-e Cívky na magnetických obvodech



(Obr. MG-58) Jednoduchý magnetický obvod se vzduchovou mezerou



(Obr. MG-59) Náhradní obvod pro výpočet

Pro magnetický obvod je možné nakreslit odpovídající náhradní elektrický obvod, ve kterém cívka nasazená na prvním sloupku představuje zdroj takzvaného magnetomotorického napětí o velikosti

$$U_m = N_1 I_1$$

V uzlových bodech **A** a **B** magnetického obvodu se dělí magnetický tok podobně, jako by se dělil proud v elektrickém obvodu. Odpovídá to i stejnojmenným uzlům v náhradním schématu. Na pozici odpovídajících odporů je třeba vypočítat magnetické odpory odpovídajících úseků mezi uzly **A** a **B**. Magnetický odpor v levém sloupku magnetického obvodu bude za předpokladu, že permeabilita materiálu magnetického obvodu je μ_{fe} , dán vztahem

$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu_{fe} S_1} = \frac{2d + h}{\mu_{fe} a t}$$

Ve středním sloupku je do série zařazený odpor úseku v magnetickém obvodu a vzduchové mezery

$$R_{m2} = R_{v2} + R_{fe} = \frac{l_2}{\mu_{fe} S_2} + \frac{\Delta}{\mu_0 S_2} = \frac{h}{\mu_{fe} b t} + \frac{\Delta}{\mu_0 b t}$$

Ve třetím sloupku je opět pouze magnetický odpor materiálu magnetického obvodu

$$R_{m3} = \frac{l_3}{\mu_{fe} S_3} = \frac{2e + h}{\mu_{fe} c t}$$

Z náhradního obvodu je možno vyčíslit velikost magnetického toku v levém sloupku zcela stejným způsobem, jako by se počítal elektrický proud v elektrickém obvodu

$$\Phi_1 = \frac{U_m}{R_m} = \frac{N_1 I_1}{R_{m1} + \frac{R_{m2} R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}}$$

Podobně by se vypočítal i magnetický tok ve středním a pravém sloupku. Zde se jedná o jakýsi „dělič magnetického toku“ zcela stejně, jako by to byl proudový dělič v elektrickém obvodu. Magnetické toky se rozdělí nepřímou úměrou magnetickým odporům

$$\Phi_2 = \Phi_1 \frac{R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}} = \frac{N_1 I_1}{R_{m1} + \frac{R_{m2} R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}} \frac{R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}} = \frac{N_1 I_1 R_{m3}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m1} R_{m3} + R_{m2} R_{m3}}$$

$$\Phi_3 = \Phi_1 \frac{R_{m2}}{R_{m2} + R_{m3}} = \frac{N_1 I_1}{R_{m1} + \frac{R_{m2} R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}} \frac{R_{m2}}{R_{m2} + R_{m3}} = \frac{N_1 I_1 R_{m2}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m1} R_{m3} + R_{m2} R_{m3}}$$

Velice důležitou hodnotou pro návrh magnetického obvodu je volba **velikost magnetické indukce ve feromagnetickém materiálu** magnetického obvodu. Tato hodnota je limitována určitou maximální velikostí, po jejímž překročení dojde k takzvanému **přesycení magnetického obvodu**. Po přesycení je magnetický odpor v magnetickém obvodu srovnatelný s magnetickým odporem rozptylových vzduchových cest, magnetické pole se bude uzavírat také mimo magnetický obvod, Hopkinsonův zákon již nebude platit. Navíc se podstatně zvyšují hysterezní ztráty v magnetickém obvodu. Hodnota maximální indukce je závislá na druhu feromagnetického materiálu. V magnetických obvodech transformátorů složených z kvalitních transformátorových plechů obvykle nepřesahuje hodnotu 1.7 T, v magnetických obvodech složených z feritů či jiných materiálů bývá podstatně nižší. V našem příkladě je velikost magnetické indukce v jednotlivých částech magnetického obvodu

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{\Phi_1}{a \cdot t}$$

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2} = \frac{\Phi_2}{b \cdot t}$$

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} = \frac{\Phi_3}{c \cdot t}$$

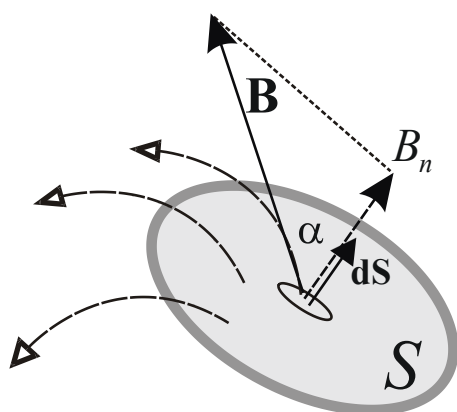
Poznámka

Ve vztazích pro výpočet magnetického odporu jednotlivých částí magnetického obvodu je v tomto příkladě dosazena permeabilita odpovídajícího feromagnetického materiálu. Relativní permeabilita může nabývat značných hodnot, její stanovení je však velice problematické. Její velikost totiž není konstantní, výrazně se mění v závislosti na intenzitě magnetického pole. Zahrnutí této nelinearity do výpočtu je komplikované a problematické. Pro většinu praktických výpočtů se předpokládá, že odpor feromagnetického materiálu je podstatně menší než odpor vzduchových mezer, magnetický materiál se proto považuje za nekonečně magneticky vodivý a velikost magnetického odporu feromagnetických částí nulová. Obecně by se dal tento problém řešit podobně jako nelineární elektrické obvody, problém je v tom, že by nemusela zůstat splněna podmínka, že magnetický tok teče pouze magnetickým obvodem a na tom je vlastně celý výpočet a Hopkinsonův zákon založen.

MG-f Faradayův indukční zákon

Faradayův indukční zákon společně se zobecněným Ampérovým zákonem celkového proudu je jedním z klíčových zákonů v teorii elektromagnetického pole, protože udává vzájemnou souvislost mezi časově proměnným elektrickým a magnetickým polem.

Podle tohoto zákona je elektromotorické napětí indukované v nějaké uzavřené smyčce dáno časovou změnou magnetického pole v této smyčce. Magnetické pole je v tomto zákoně reprezentováno magnetickým tokem, který smyčkou prochází.



(Obr. MG-60) Magnetický tok

Magnetický tok je definován podle standardních pravidel, která platí pro toky vektorových veličin, jako tok vektoru magnetické indukce

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Skalární součin ve vztahu respektuje úhel, pod kterým proniká vektor plochou. Při počítání toku vektorové veličiny plochou vlastně sčítáme po celé příslušné ploše součinu normálové složky vektoru s elementární plochou v daném místě.

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S |\mathbf{B}| |d\mathbf{S}| \cos \alpha = \iint_S B_n \, dS$$

Faradayův indukční zákon se zapisuje v integrálním tvaru v této podobě

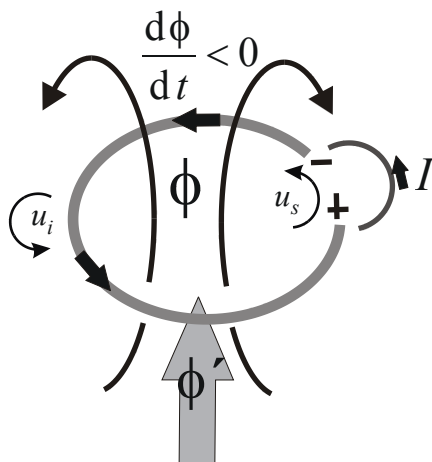
$$u_i = -\frac{d\phi}{dt}$$

Do uzavřené smyčky se indukuje takové **elektromotorické napětí**, které je úměrné **záporně vzaté časové změně magnetického toku procházejícího plochou uzavřenou smyčkou**. Elektromotorické napětí obecně souvisí s prací takzvaných **rozdělujících sil**. To jsou síly, které rozdělují náboje od sebe a vytvářejí **potenciálový rozdíl**. Rozdělující síly mohou být různé povahy, třeba i chemické v elektrochemických člancích. V případě indukovaného napětí jsou to síly vyvolané časovou změnou magnetického pole. Naopak **napětí mezi dvěma body v elektrickém poli** je rovné práci, kterou vykoná elektrické pole přemístěním jednotkového kladného náboje mezi těmito body, v našem případě to odpovídá **napětí na svorkách smyčky - svorkovému napětí**.

Mezi svorkovým a elektromotorickým napětím platí vztah

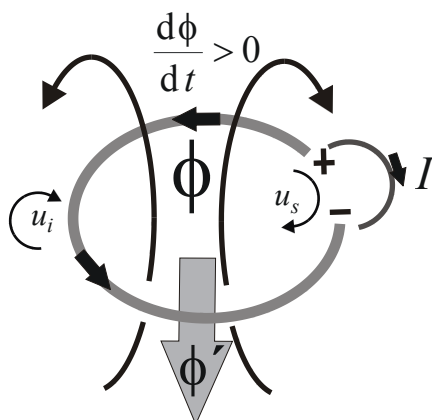
$$u_s = -u_i = \frac{d\Phi}{dt}$$

Znaménko mínus v sobě zahrnuje velice důležité **Lenzovo pravidlo**, podle kterého se proud vyvolaný indukovaným napětím v uzavřené smyčce **snaží zabránit časovým změnám magnetického pole**.



(Obr. MG-61) Indukované napětí a proud v uzavřené smyčce pro klesající velikost magnetického toku ve smyčce

Bude-li smyčkou procházet časově proměnný magnetický tok se smyslem podle obrázku (Obr. MG-61) a velikost magnetického toku bude v závislosti na čase v daném okamžiku klesat, bude se do smyčky indukovat elektromotorické napětí u_i . Na svorkách smyčky se objeví takové napětí u_s , aby po propojení svorek smyčky začal procházet elektrický proud, který by vybudil pomyslně svoje vlastní magnetické **pole působící ve stejném smyslu jako pole výchozí**. Toto pole by se tedy snažilo zabránit časové změně - zmenšování - výchozího pole.



(Obr. MG-62) Indukované napětí a proud v uzavřené smyčce pro klesající velikost magnetického toku ve smyčce

Bude-li smyčkou procházet časově proměnný magnetický tok se smyslem podle obrázku (Obr. MG-62) a velikost magnetického toku bude v závislosti na čase v daném okamžiku stoupat, bude se do smyčky indukovat elektromotorické napětí u_i a na svorkách smyčky se objeví takové napětí u_s , aby po spojení svorek smyčky začal procházet elektrický proud, který by vybudil pomyslně svoje vlastní magnetické **pole působící proti smyslu výchozího pole**. Toto pole by se opět snažilo zabránit časové změně - zvětšování - výchozího pole.

Faradayův indukční zákon platí bez ohledu na to, zda je časová změna magnetického toku vyvolána časově proměnným magnetickým polem, nebo se naopak smyčka pohybuje v nehomogenním, ale časově neproměnném poli. Časová změna magnetického toku může být vyvolána i tím, když smyčka mění svoje rozměry v homogenním časově neproměnném poli.

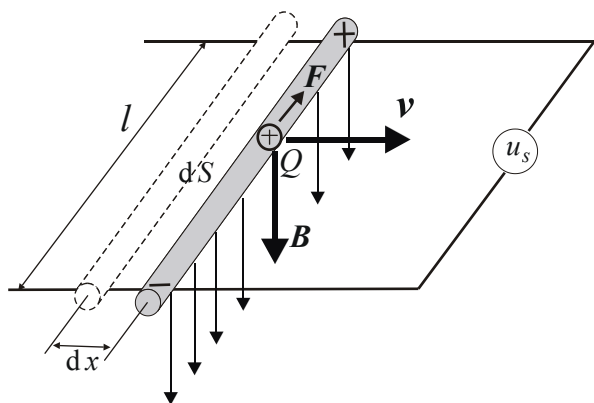
Všechny případy budou popsány na příkladech v následující části.

{Př. MG/31} Napětí indukované v cívce, která mění v homogenním magnetickém poli svoje rozměry a polohu

V homogenním magnetickém poli o indukci B se pohybuje vodič rychlostí v , který vytváří spolu s kolejnicemi po kterých se pohybuje, vodivou smyčku. Jak velké napětí se bude indukovat do této smyčky? Směr pohybu je kolmý na vodič a magnetická indukce vstupuje kolmo do vodiče.

Navazuje na

MG-f Faradayův indukční zákon



(Obr. MG-63) Vodič pohybující se v magnetickém poli

Elektromotorické napětí, které je rovno práci této rozdělovací síly bude rovno

$$u_i = \int_l \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = \int_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

S ohledem na kolmý směr pohybu a vstupující indukce magnetického pole vůči vodiči, bude pro indukované napětí při integraci v kladném směru (podle pravidla pravé ruky ve vztahu k vnějšímu magnetickému poli) platit

$$u_i = \int_l |\mathbf{v}| |\mathbf{B}| dl = Bvl$$

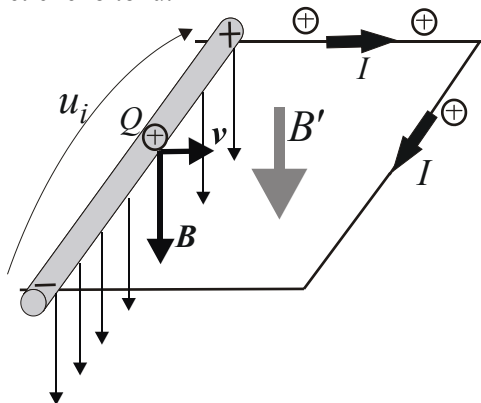
Podle indukčního zákona však vyjde zcela stejná hodnota

$$u_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(-B dS) = \frac{d}{dt}(-Bl dx) = Bl \frac{dx}{dt} = Bvl$$

Znaménko mínus u členu

$$-d\Phi = -B dS$$

je zde z toho důvodu, že se podle naznačeného smyslu rychlosti a polohy smyčky bude velikost magnetického toku procházejícího smyčkou zmenšovat, jedná se o zápornou časovou změnu magnetického toku.



(Obr. MG-64) Smysl protékajícího proudu, Lenzovo pravidlo

Vodič pohybující se rychlostí v s sebou unáší volné nosiče náboje, na které působí známá síla v magnetickém poli

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Náboje se uvedou do pohybu a budou se hromadit na konci vodiče tak dlouho, než nastane ustálený stav. V ustáleném stavu se již nebudou částice nikam pohybovat (svorky nejsou propojeny, neteče proud). Magnetická síla bude vyrovnána se silou elektrickou, která naopak působí na rozdělené náboje přitažlivou silou. Pomyslně si to můžeme představit tak, že proti intenzitě elektrického pole z rozdělených nábojů působí pomyslně intenzita elektrického pole rozdělovacích sil \mathbf{E}_r , ty jsou v rovnováze a výsledná intenzita je nulová.

$$\mathbf{E}_r = (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Na této jednoduché úloze je vidět i působení Lenzova pravidla. Když spojíme konce smyčky nakrátko, začne protékat proud, jehož kladný smysl je podle konvence dán tokem kladně nabitých částic, tedy od svorky plus ke svorce mínus. Takový proud vybudí magnetické pole, které bude v našem případě ve stejném smyslu, jako je vnější homogenní magnetické pole, ve kterém se vodič původně pohyboval. Vybuzené magnetické pole se totiž snaží zabránit časovým změnám vnějšího magnetického pole ve smyčce, v tomto případě jeho zmenšování. Kdyby byla smyčka supravodivá, vybuzený elektrický proud by zcela zamezil časovým změnám magnetického toku.

Kdyby se vodič pohyboval v opačném směru, magnetický tok by se zvětšoval a smysl indukovaného elektromotorického napětí i protékajícího proudu by byl právě opačný.

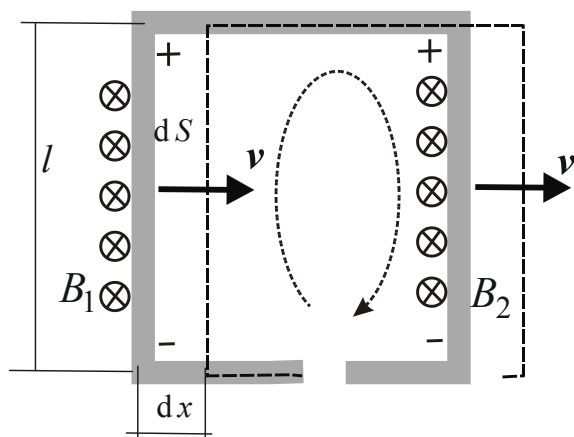
{Př. MG/32} Cívka, která se pohybuje v nehomogenním magnetickém poli

Obdélníková smyčka se pohybuje rychlostí v v nehomogenním časově neproměnném magnetickém poli podle obrázku. Její levá strana leží v magnetickém poli o indukci B_1 a pravá strana v magnetickém poli o indukci B_2 . Jak velké elektromotorické napětí se bude indukovat do této smyčky?

Navazuje na

MG-f Faradayův indukční zákon

{Př. MG/31} Napětí indukované v cívce, která mění v homogenním magnetickém poli svoje rozměry a polohu



Do levé strany smyčky se bude indukovat napětí

$$u_{i1} = B_1 v l$$

Do pravé strany smyčky se bude indukovat napětí

$$u_{i2} = B_2 v l$$

Bude-li se smyčka pohybovat ze slabšího pole do silnějšího

$$B_2 > B_1$$

potom bude pro výsledné indukované napětí po integraci v naznačeném kladném smyslu (podle pravidla pravé ruky vůči magnetické indukci vnějšího pole)

$$u_i = u_{i1} - u_{i2} = (B_1 - B_2) v l$$

(Obr. MG-65) Obdélníková smyčka pohybující se v magnetickém poli

Podle indukčního zákona vyjde zcela stejná velikost indukovaného napětí

$$u_s = -u_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[(B_2 - B_1)dS] = -\frac{d}{dt}[(B_2 - B_1)l dx] = (B_1 - B_2)l v$$

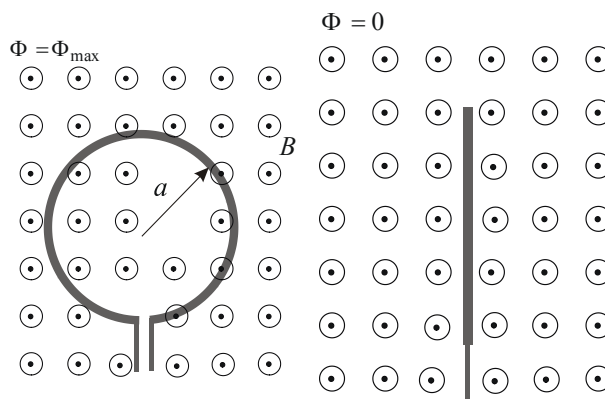
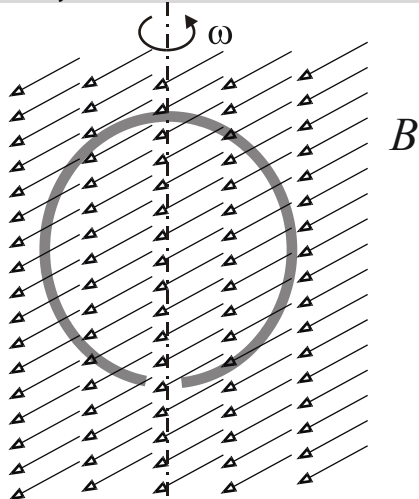
Kdyby ležela levá i pravá strana smyčky ve stejném magnetickém poli, indukovalo by se do obou stran stejné napětí. V celkovém součtu by se napětí odečetla a výsledné napětí by bylo nulové. Tomu by odpovídal stav, ve kterém by se neměnila velikost magnetického toku v pohybující se smyčce.

{Př. MG/33} Kruhový závit otáčející se rovnoměrně v homogenním magnetickém poli

Jak velké napětí se objeví na svorkách závitu o poloměru a , který se rovnoměrně otáčí s úhlovým kmitočtem ω v homogenním magnetickém poli o indukci B ?

Navazuje na

MG-f Faradayův indukční zákon



(Obr. MG-67) Závit otáčející se v magnetickém poli

(Obr. MG-66) Dvě extrémní polohy závitu vůči siločarám magnetického pole

V otáčejícím se závitu se periodicky mění magnetický tok od maximální hodnoty v případě, kdy siločáry protínají kolmo plochu závitu

$$\Phi_{\max} = B S = B \pi a^2$$

až po nulovou hodnotu, když siločáry procházejí rovnoběžně. (viz (Obr. MG-66)).

Časový průběh je možné jednoduše zapsat pomocí harmonické funkce

$$\Phi(t) = \Phi_{\max} \sin(\omega t)$$

Na svorkách se tedy objeví napětí

$$u_s(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \Phi_{\max} \omega \cos(\omega t) = B \pi a^2 \omega \cos(\omega t)$$

Amplituda svorkového napětí bude mít hodnotu

$$U_m = \Phi_{\max} \omega = B \pi a^2 \omega$$

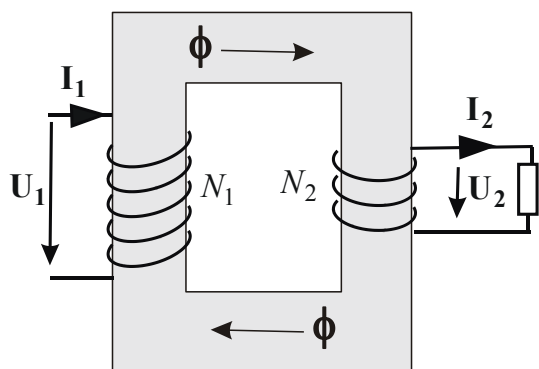
Je zajímavé si povšimnout, že indukované napětí je fázově posunuté o úhel $\pi/2$ proti magnetickému toku. To znamená, že největší napětí se bude indukovat v okamžiku, kdy závitem neprochází žádný magnetický tok.

{Př. MG/34} Napětí indukované v cívkách na magnetickém obvodu - ideální transformátor

Jaká napětí se indukují v cívkách transformátoru na jednoduchém magnetickém obvodu, v jakém poměru se rozloží proudy v primárním a sekundárním vinutí?

Navazuje na

MG-f Faradayův indukční zákon



Pro časový průběh napětí indukovaného na svorkách cívky, kterou prochází časově proměnný magnetický tok, platí obecně

$$u_i(t) = N \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Budeme-li uvažovat harmonický časový průběh u všech veličin, je možné pro popis s výhodou použít fázorů veličin. Pro fázor indukovaného napětí bude platit

$$\mathbf{U} = j \omega N \Phi$$

Přivedeme-li tedy k první cívce na magnetickém obvodu s počtem závitů N_1 napětí, které je reprezentováno fázorem \mathbf{U}_1 , musí platit za předpokladu, že zanedbáme úbytky napětí, rovnice

$$\mathbf{U}_1 = j \omega N_1 \Phi$$

(Obr. MG-68) Magnetický obvod a cívky ideálního transformátoru

Vlivem vnuceného napětí na primární cívce \mathbf{U}_1 je magnetickému obvodu vnucen magnetický tok, jehož fázor má velikost

$$\Phi = \frac{\mathbf{U}_1}{j \omega N_1}$$

Magnetický tok, který vybudila první cívka, protéká i druhou cívkou a indukuje do ní napětí, pro jehož fázor bude platit

$$\mathbf{U}_2 = j \omega N_2 \Phi = j \omega N_2 \frac{\mathbf{U}_1}{j \omega N_1} = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{U}_1$$

Podle Hopkinsonova zákona musí odpovídat vnucenému napětí \mathbf{U}_1 a magnetickému toku Φ v nezátčeném transformátoru proud v primárním obvodu \mathbf{I}_{10} , který se nazývá magnetizační proud

$$N_1 \mathbf{I}_{10} = R_m \Phi$$

$$\mathbf{I}_{10} = \frac{R_m \Phi}{N_1}$$

Budeme-li uvažovat ideální magnetický obvod, bude mít nekonečně velkou permeabilitu a z toho vyplývá nulový magnetický odpor

$$R_m = 0$$

V případě ideálního magnetického obvodu bude tedy nulový i magnetizační proud

$$\mathbf{I}_{10} = 0$$

Podle Ampérova zákona, pokud uzavřenou integrační dráhu vedeme magnetickým obvodem a oběma cívkami, bude platit

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum \mathbf{I} = N_1 \mathbf{I}_{10} = 0$$

Intenzita magnetického pole v magnetickém obvodu ideálního transformátoru je tedy nulová

$$\mathbf{H} = 0$$

Připojíme-li k sekundární cívce zátěž o impedanci \mathbf{Z} , bude v sekundárním obvodu protékat proud s fázorovou hodnotou

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{Z}}$$

Z Ampérova zákona celkového proudu s ohledem na nulovou intenzitu magnetického pole v magnetickém obvodu vypolyne vztah

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = N_1 \mathbf{I}_1 + N_2 \mathbf{I}_2 = 0$$

$$N_1 \mathbf{I}_1 + N_2 \mathbf{I}_2 = 0$$

Proudu \mathbf{I}_2 v sekundárním obvodu bude tedy odpovídat proud \mathbf{I}_1 v primárním obvodu

$$\mathbf{I}_1 = -\frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2$$

Při stejném smyslu navinutí cívek a stejné volbě začátků a konců vinutí bude napětí na obou cívkách ve fázi (je buzeno stejným tokem). Proud procházející cívkami bude v opačné fázi, magnetický tok je totiž vnucen primárním napětím a musí zůstat konstantní, magnetické účinky primárního a sekundárního proudu se proto musí navzájem rušit. Tyto úvahy jsou souladu s **Lenzovým pravidlem**.

Z fázorových hodnot veličin lze vypočítat amplitudy a efektivní hodnoty důležité pro návrh transformátoru.

Přivedeme-li k primární cívce napětí s efektivní hodnotou U_{1ef} , objeví se v magnetickém obvodu magnetický tok s maximální hodnotou (parametry materiálů pro magnetické obvody se udávají v maximálních hodnotách)

$$\Phi_{\max} = \frac{U_{1\max}}{\omega N_1} = \frac{\sqrt{2}U_{1ef}}{\omega N_1} = \frac{U_{1ef}}{4.44 f N_1}$$

V magnetickém obvodu bude magnetická indukce velikost

$$B_{\max} = \frac{\Phi_{\max}}{S_{fe}}$$

Maximální magnetická indukce v magnetickém obvodu nesmí překročit největší dovolenou hodnotu, která by znamenala přesycení magnetického obvodu se všemi důsledky. Magnetická indukce je mírou efektivního využití magnetického obvodu. Zvolíme-li malou hodnotu magnetické indukce, povede to ke zbytečně velkým rozměrům magnetického obvodu. Příliš velká hodnota magnetické indukce by mohla naopak znamenat přesycení se změnou magnetických vlastností feromagnetického materiálu a nárůst ztrát. Hodnoty magnetické indukce se u kvalitních transformátorových plechů běžně pohybují v intervalu 1 - 1.7 T.

Do sekundární cívky se potom indukuje napětí

$$U_{2ef} = 4.44 f N_2 \Phi_{\max}$$

Podíl primárního a sekundárního napětí udává převod transformátoru

$$\frac{U_{2ef}}{U_{1ef}} = \frac{N_2}{N_1}$$

Zatížíme-li sekundární cívku tak, že jí bude protékat proud o efektivní hodnotě I_{2ef} , bude pro hodnotu proudu v primárním obvodu platit vztah

$$I_{1ef} = \frac{N_2}{N_1} I_{2ef}$$

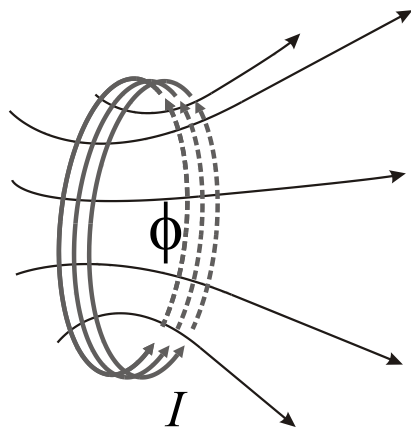
Ve skutečném transformátoru není nulový ani magnetický odpor, ani magnetizační proud, na velikosti napětí na cívkách se navíc projevují úbytky, které jsou způsobeny rozptylovým magnetickým polem cívek a takzvanou rozptylovou reaktancí (pole které se uzavírá kolem vlastních cívek a ne v magnetickém obvodu - je vždy vázáno pouze s jednou z cívek). Výpočet rozptylové reaktance skutečného transformátoru je naznačen v příkladě ({Př. MG/55} Rozptylová indukčnost transformátoru).

MG-g Vlastní indukčnost

S jevem **magnetické indukce je úzce spjata veličina, která se nazývá indukčnost**. Indukčnost totiž udává vztah mezi proudem a magnetickým tokem vybuzeného magnetického pole. Časová změna magnetického toku je určující veličinou pro stanovení indukovaného napětí. Existuje několik způsobů, jak popsat a definovat indukčnost. V lineárním prostředí dávají všechny definice stejnou hodnotu indukčnosti, v nelineárním prostředí má každá z definic svůj specifický význam a je použitelná pro jinou aplikaci.

Statická definice vlastní indukčnosti

Podle statické definice je indukčnost definována jako konstanta, která udává vzájemný vztah mezi proudem tekoucím ve vodiči v proudové smyčce a magnetickým polem, který tento proud vybudí. Velikost magnetického pole je reprezentována magnetickým tokem procházejícím plochou smyčky, což je tok vektoru magnetické indukce touto plochou.



$$\Phi = L I$$

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

V případě, kdy má cívka větší počet závitů (magnetický tok prochází smyčkou na několika místech), je vlastní indukčnost definována na základě celkového (spřaženého) toku

$$L = \frac{\sum \Phi}{I}$$

V případě, kdy všemi závity prochází stejný magnetický tok, platí

$$L = \frac{\sum \Phi}{I} = \frac{N \Phi}{I}$$

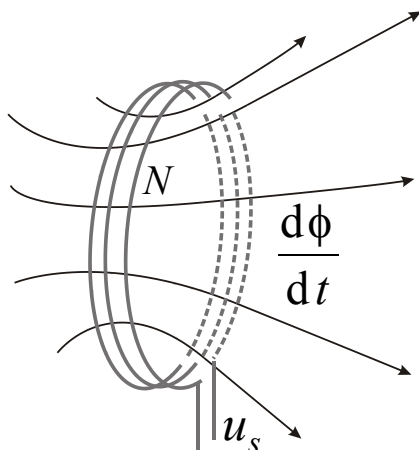
(Obr. MG-69) Statická definice vlastní indukčnosti

Pro výpočet je statická definice použitelná v případě, kdy dokážeme vymezit určité smyčky, na jejichž ploše dokážeme vyčíslit velikost magnetického pole a magnetického toku. To dokážeme analyticky jenom ve velmi omezeném počtu případů, jako je například dvou vodičové symetrické vedení. Ani taková zdánlivě jednoduchá úloha, jako je indukčnost tenkého kruhového závitů, není analyticky spočítatelná, protože dokážeme analyticky určit magnetické pole pouze v jednom bodě, a to je uprostřed závitů.

Energetická definice vlastní indukčnosti

Energetická definice je pro výpočet indukčnosti použitelná v případě, kdy dokážeme určit celkovou energii magnetického pole vybuzeného nějakými proudovodiči, či proudovými smyčkami. To se podaří v případě, kdy je magnetické pole uzavřeno do nějakého přesně vymezeného prostoru. Tak je to například v koaxiálním kabelu a s určitým omezením i u cívek na magnetickém obvodu.

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{B} \mathbf{H} dV$$



(Obr. MG-70) Energetická definice vlastní indukčnosti

Podle dynamické definice je vlastní indukčnost dána vztahem mezi proudem, který prochází cívkou či nějakými proudovodiči, a energií magnetického pole, které se vybudí

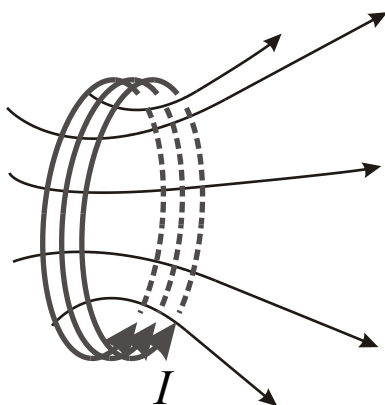
$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

$$L = \frac{2W_m}{I^2}$$

V duchu energetické definice můžeme navíc pomyslně rozdělit indukčnost na dvě části, **indukčnost vnitřní** L_i a **indukčnost vnější** L_e . Vnitřní indukčnost je svázána s energií magnetického pole ve vlastních proudovodičích, vnější indukčnost souvisí s energií vybuzeného magnetického pole vně vodičů.

Výsledná indukčnost je potom součtem vnitřní a vnější indukčnosti

$$L = L_i + L_e$$

Dynamická definice vlastní indukčnosti

(Obr. MG-71) Dynamická definice vlastní indukčnosti

Podle dynamické definice je vlastní indukčnost dána napětím, které se na svorkách cívky indukuje na základě časové změny magnetického toku, vybuzeného vlastním proudem cívky.

$$u_i = N \frac{d\phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

Postup při výpočtu vlastní indukčnosti

Při výpočtu vlastní indukčnosti cívek bývají obvykle zadané rozměry cívky a případného magnetického obvodu, na který je cívka nasazena. Jsou zadané také magnetické vlastnosti materiálu a počet závitů. Vlastní indukčnost udává vztah mezi proudem v cívce a vybuzeným magnetickým tokem. Při výpočtu se obvykle musí postupovat tak, že v úvodu předpokládáme, že cívkou protéká proud, i když se o něm nikde nemluví a v konečných vztazích se při lineárních závislostech ani nebude vyskytovat. Pomocí pomyslného proudu cívkou je totiž nutné vypočítat magnetický tok nebo energii magnetického pole a zpětně se tak dopracovat k indukčnosti.

{Př. MG/35} Indukčnost na jednotku délky koaxiálního kabelu

Jak velká je vnitřní a vnější indukčnost na jednotku délky koaxiálního kabelu s parametry podle obrázku (Obr. MG-72)?

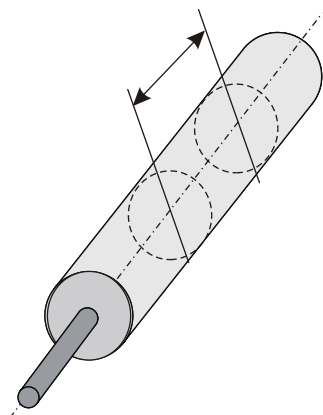
Navazuje na

MG-g Vlastní indukčnost

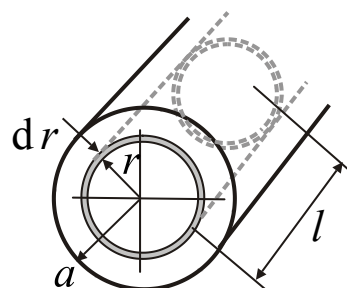
{Př. MG/19} Magnetické pole v koaxiálním kabelu

Pro výpočet vlastní indukčnosti koaxiálního kabelu na jednotku délky se dobře hodí energetická definice, protože magnetické pole je omezené do prostoru vlastního kabelu, navenek neproniká, jeho velikost v každém bodě známe. Z energetické definice vyplývá vztah

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dV = \frac{1}{2} L I^2$$



(Obr. MG-72) Indukčnost koaxiálního kabelu



(Obr. MG-73) Výpočet vnitřní indukčnosti v koaxiálním kabelu

Ve vnitřním vodiči pro poloměry

$$r \leq a$$

bude v elementu objemu o velikosti

$$dV = 2\pi r \cdot dr \cdot l$$

Intenzita magnetického pole a magnetická indukce bude

$$H(r) = \frac{I r}{2\pi a^2}$$

$$B(r) = \mu_0 \frac{I r}{2\pi a^2}$$

Energie magnetického pole ve vnitřním vodiči bude vázána s vnitřní indukčností

$$W_{mi}' = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \cdot dV = \frac{1}{2} \int_0^a \mu_0 \left(\frac{I r}{2\pi a^2} \right)^2 2\pi r \cdot dr \cdot l = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{8\pi} l \cdot I^2 = \frac{1}{2} L_i' I^2$$

Vnitřní indukčnost části vodiče o délce l tedy bude

$$L_i = \frac{\mu_0}{8\pi} l$$

Vnitřní indukčnost na jednotku délky je

$$L_i / l = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

V prostoru mezi žilou a pláštěm pro poloměry

$$a \leq r \leq b$$

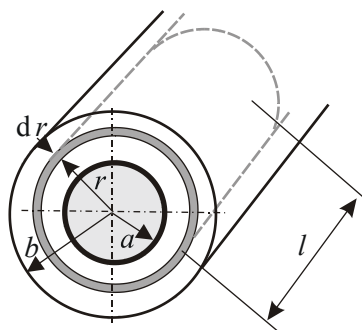
bude v elementu objemu

$$dV = 2\pi r \cdot dr \cdot l$$

Intenzita magnetického pole a indukce

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



(Obr. MG-74) Výpočet vnější indukčnosti v koaxiálním kabelu

Energie magnetického pole v tomto prostoru je vázána s indukčností, která se nazývá vnější

$$W_{me} = \frac{1}{2} \iiint_V B \cdot H \cdot dV = \frac{1}{2} \int_a^b \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 2\pi r \cdot dr \cdot l = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) l I^2 = \frac{1}{2} L_e I^2$$

Pro vnější indukčnost bude platit

$$L_e = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) l$$

Vnější indukčnost na jednotku délky bude

$$L_e / l = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

V plášti koaxiálního kabelu pro poloměry

$$a \leq r \leq b$$

by se energie magnetického pole vypočítala podobně jako ve vnitřním vodiči a byla by vázána s vnitřní indukčností pláště vztahem

$$W_{mi}'' = \frac{1}{2} L_i'' I^2$$

V praktických aplikacích je obvykle vnitřní indukčnost odpovídající plášti koaxiálního kabelu zanedbatelně malá a nepočítá se.

Celková indukčnost tedy bude součtem vnitřní a vnější indukčnosti

$$L = L_i' + L_e + L_i''$$

{Př. MG/36} Indukčnost na jednotku délky koaxiálního kabelu - číselný příklad

Vypočítejte indukčnost koaxiálního kabelu na jednotku délky L/l . $a=2$ m, $b=6$ mm.

Navazuje na

{Př. MG/35} Indukčnost na jednotku délky koaxiálního kabelu

Celková indukčnost je dána součtem indukčnosti vnitřní L_i a vnější L_e .

$$L/l = L_i/l + L_e/l = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 50 \cdot 10^{-9} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left[\frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}\right] = 269,72 \text{ nH/m}$$

{Př. MG/37} Indukčnost na jednotku délky symetrického dvou vodičového vedení

Jaká je vnitřní a vnější indukčnost na jednotku délky dvou vodičového vedení s rozměry podle obrázku (Obr. MG-75)?

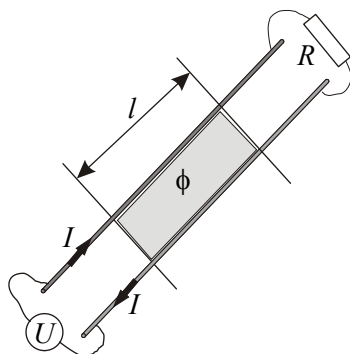
Navazuje na

MG-g Vlastní indukčnost

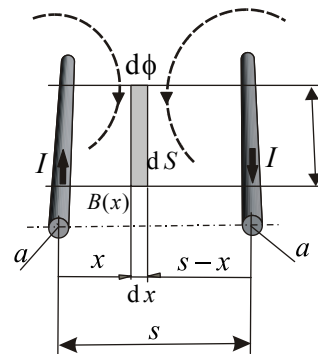
{Př. MG/20} Magnetické pole v dvou vodičovém vedení

{Př. MG/35} Indukčnost na jednotku délky koaxiálního kabelu

Pro vnitřní indukčnost, která by odpovídala energii magnetického pole ve vlastních vodičích dvou vodičového vedení, platí stejné odvození a stejné vztahy jako u koaxiálního kabelu viz {Př. MG/35}. Pro výpočet vnější indukčnosti se velice dobře hodí statická definice.



(Obr. MG-75) Dvou vodičové vedení jako součást elektrického obvodu



(Obr. MG-76) Výpočet vlastní indukčnosti dvou vodičového vedení

Dvou vodičové vedení můžeme v tomto případě chápat jako jednu velkou smyčku. Proud protékající smyčkou vybudí magnetické pole. Celkový magnetický tok, který prochází touto smyčkou, je podle statické definice vázán s celkovou indukčností vedení vztahem

$$\Phi = L \cdot I$$

Budeme-li počítat indukčnost pouze části vedení o délce l , je třeba vyčíslit magnetický tok touto částí vedení

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{x=a}^{x=s-a} B(x) l dx$$

V místě ve vzdálenosti x od levého vodiče je celková magnetická indukce dána součtem indukce levého i pravého vodiče

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{s-x} \right)$$

Magnetický tok elementem plochy

$$dS = l dx$$

bude

$$d\Phi = B(x) dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{s-x} \right) l dx$$

Magnetický tok úsekem vedení o délce l potom bude

$$\Phi = \int_a^{s-a} B(x) l dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^{s-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{s-x} \right) l dx = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \left(\frac{s-a}{a} \right) l$$

Ze statické definice indukčnosti vyplyne

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left(\frac{s-a}{a} \right) l$$

Indukčnost vedení na jednotku délky

$$L/l = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left(\frac{s-a}{a} \right)$$

Ve smyslu definice vnitřní a vnější indukčnosti je toto indukčnost vnější. Vnitřní indukčnost obou vodičů vedení by se počítala stejně jako v příkladu {Př. MG/35}.

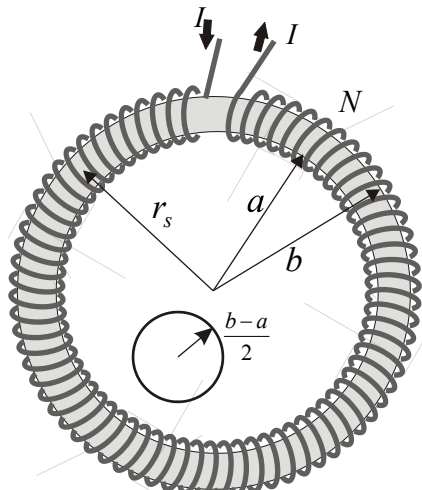
{Př. MG/38} Indukčnost cívky navinuté ve tvaru toroidu

Jakou vlastní indukčnost má vzduchová cívka ve tvaru toroidu s hustě navinutými závyty o celkovém počtu N a rozměry podle obrázku (Obr. MG-77)?

Navazuje na

MG-g Vlastní indukčnost

{Př. MG/24} Cívka navinutá ve tvaru toroidu



Bude-li pro rozměry toroidu platit

$$a, b \gg 0 \quad a \approx b$$

lze považovat magnetické pole v toroidu za konstantní, rovné poli na středním poloměru

$$r_s = \frac{a+b}{2}$$

$$H = konst = \frac{N \cdot I}{2\pi r_s}$$

(Obr. MG-77) Indukčnost cívky navinuté ve tvaru toroidu

Při výpočtu indukčnosti podle statické definice je třeba vypočítat celkový magnetický tok, ze kterého je možno indukčnost snadno určit

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{BS}{I} = \frac{\mu_0 H S}{I} = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r_s} \pi a^2 \frac{1}{I} = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2r_s}$$

Podle energetické definice indukčnosti platí zcela identicky pro energii v celém toroidu a indukčnost

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dV = \frac{1}{2} L I^2$$

$$W_m = \frac{1}{2} B \cdot H \cdot V = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{NI}{2\pi r_s} \right)^2 2\pi r_s \cdot \pi a^2 = \frac{1}{2} L I^2$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2r_s}$$

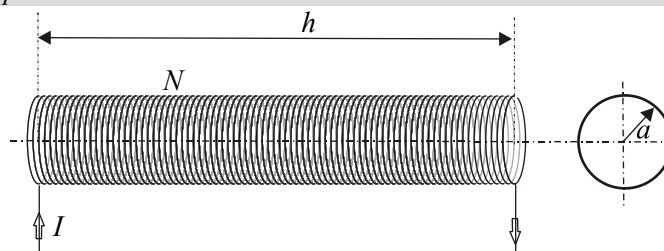
{Př. MG/39} Indukčnost relativně dlouhé a tenké cívky - solenoidu

Jak velká vlastní indukčnost se dá očekávat u tenké a relativně dlouhé vzduchové cívky s počtem závitů N a rozměry podle obrázku (Obr. MG-78)?

Navazuje na

MG-g Vlastní indukčnost

{Př. MG/13} Magnetické pole v dlouhé tenké cívce ve vzduchu



(Obr. MG-78) Dlouhá tenká cívka - solenoid

Ve dlouhé tenké cívce je magnetické pole prakticky všude konstantní rovné hodnotě

$$H = \frac{NI}{h}$$

Podle statické definice indukčnosti bude platit

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{BS}{I} = \frac{\mu_0 H S}{I} = \mu_0 \frac{N \cdot I}{h} \pi a^2 \frac{1}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{h}$$

Podle energetické definice indukčnosti

$$W_m = \frac{1}{2} BHV = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{NI}{h} \right)^2 \pi a^2 h = \frac{1}{2} L I^2$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{h}$$

{Př. MG/40} Indukčnost dlouhé tenké cívky - číselný příklad

S jak velkou hodnotou indukčnosti lze přibližně počítat u tenké cívky, která má délku $h=1200$ mm, poloměr $a=45$ mm a počet závitů $N=1640$?

Navazuje na

{Př. MG/39} Indukčnost relativně dlouhé a tenké cívky - solenoidu

Poloměr cívky je podstatně menší než její délka. Cívka se dá proto považovat za relativně dlouhou. Pro velikost indukčnosti platí vztah

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{h} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1640^2 \cdot \pi \cdot 0,045^2}{1,2} = 17,92 \text{ mH}$$

{Př. MG/41} Indukčnost cívky se stínícím pláštěm

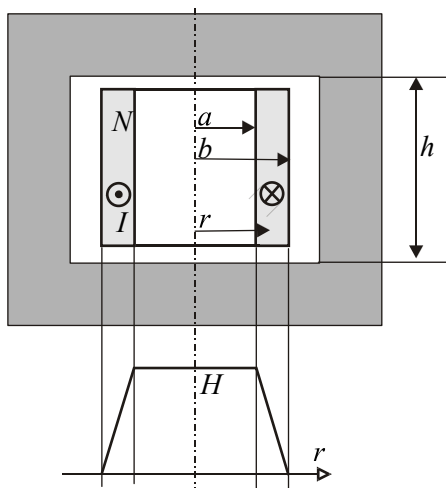
Jak velká je vlastní indukčnost vzduchové cívky se stínícím feromagnetickým pláštěm podle obrázku (Obr. MG-79)?

Navazuje na

MG-g Vlastní indukčnost

{Př. MG/28} Cívka se stínícím pláštěm

Indukčnost se dá určit na základě energetické definice tím, že vypočteme energii ve všech částech cívky.



(Obr. MG-79) Indukčnost cívky se stínícím pláštěm

Uvnitř dutiny cívky pro poloměry

$$r \leq a$$

lze předpokládat, že bude mít intenzita magnetického pole konstantní velikost

$$H = \frac{N I}{h} = \text{konst}$$

Energie magnetického pole v tomto objemu odpovídá příslušné části indukčnosti

$$W_m = \frac{1}{2} B H V = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{N I}{h} \right)^2 \pi a^2 h = \frac{1}{2} L' I^2$$

$$L' = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{h}$$

Tento vztah je zcela shodný s indukčností dlouhé tenké cívky. To vyplývá ze stejného tvaru magnetického pole a z konstantní velikosti intenzity magnetického pole uvnitř cívky.

Uvnitř stěny cívky intenzita magnetického pole lineárně klesá podle vztahu

$$a \leq r \leq b$$

$$H = \frac{N I}{h} \left[1 - \frac{r-a}{b-a} \right] = \frac{N I}{h} \frac{b-r}{b-a}$$

Pro energii magnetického pole v této části bude platit

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} \int_a^b \mu_0 \left(\frac{N I}{h} \frac{b-r}{b-a} \right)^2 2\pi r h dr$$

Když budeme uvažovat, že vnitřní a vnější poloměr cívky je přibližně stejný, můžeme ho nahradit středním poloměrem a poněkud si zjednodušit integraci

$$a = b = r_s$$

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} \mu_0 2\pi r_s \frac{(N I)^2}{h} \int_a^b \left(\frac{b-r}{b-a} \right)^2 dr = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0 2\pi r_s N^2}{h} \int_a^b \left(\frac{b-r}{b-a} \right)^2 dr =$$

$$\frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0 2\pi r_s N^2}{h} \left| -\frac{1}{(b-a)^2} \frac{(b-r)^3}{3} \right|_a^b = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0 2\pi r_s N^2}{h} \frac{b-a}{3} = \frac{1}{2} L'' I^2$$

Této energii odpovídá indukčnost

$$L'' = \frac{\mu_0 2\pi r_s N^2}{h} \frac{b-a}{3} = \frac{\mu_0 2\pi r_s N^2}{h} \frac{b-a}{3} = \frac{\mu_0 2\pi r_s N^2}{h} \frac{\Delta}{3}$$

Do výsledného vztahu byla dosazena šířka vinutí

$$\Delta = b - a$$

Výsledná indukčnost cívky se stínícím pláštěm je potom

$$L = L' + L''$$

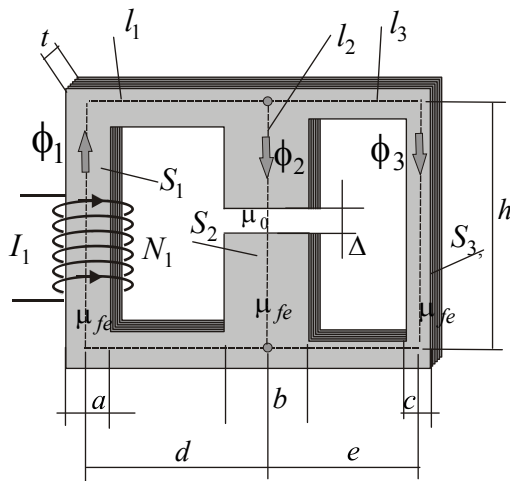
{Př. MG/42} Indukčnost cívky na magnetickém obvodu

Jak velkou indukčnost má cívka nasazená na magnetický obvod se vzduchovou mezerou podle obrázku (Obr. MG-80)?

Navazuje na

MG-g Vlastní indukčnost

{Př. MG/30} Výpočet magnetického pole v magnetickém obvodu



(Obr. MG-80) Vlastní indukčnost cívky na magnetickém obvodu

Podle statické definice je dána indukčnost vztahem mezi proudem a vybuzeným magnetickým tokem v cívce

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1}$$

Pro magnetický tok, který bude v tomto případě cívkou procházet platí vztah

$$\Phi_1 = \frac{U_m}{R_m} = \frac{N_1 I_1}{R_m} = \frac{N_1 I_1}{R_{m1} + \frac{R_{m2} R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}}$$

Z magnetického toku je možné snadno vypočítat vlastní indukčnost cívky, která již není funkcí proudu.

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} = \frac{N_1}{I_1} \frac{N_1 I_1}{R_m} = \frac{N_1^2}{R_{m1} + \frac{R_{m2} R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}}$$

Celý výpočet platí samozřejmě pouze za předpokladu, kdy je celý problém lineární, to znamená zejména v případě, kdy je možné zanedbat magnetický odpor feromagnetického materiálu vůči odporu vzduchových mezer. Feromagnetický materiál sám o sobě se vždy chová jako nelineární.

{Př. MG/43} Indukčnost cívky na magnetickém obvodu - číselný příklad

Vypočítejte indukčnost cívky L_1 s $N=50$ záv. podle obr. (ES-43), permeabilitu železa μ_r uvažujte $\mu_r=4000$. $a=1\text{ cm}$, $b=2\text{ cm}$, $c=0.7\text{ cm}$, $t=1\text{ cm}$, $l_1=l_3=60\text{ cm}$. Vzduchová mezera v prostředním sloupku má délku $\Delta=1\text{ mm}$.

Navazuje na

{Př. MG/42} Indukčnost cívky na magnetickém obvodu

Podle příkladu ({Př. MG/42}) je výsledná indukčnost dána vztahem

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} = \frac{N_1}{I_1} \frac{N_1 I_1}{R_m} = \frac{N_1^2}{R_{m1} + \frac{R_{m2} R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}}$$

kde jednotlivé reluktance jsou

$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu_0 \mu_r S_1} = \frac{l_1}{\mu_r \cdot a \cdot t} = \frac{60 \cdot 10^{-2}}{\mu_0 \cdot 4000 \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 1,194 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m3} = \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r S_3} = \frac{l_3}{\mu_r \cdot c \cdot t} = \frac{60 \cdot 10^{-2}}{\mu_0 \cdot 4000 \cdot 0.7 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 1,71 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

V případě reluktance R_{m2} prostředního sloupku bude mít dominantní vliv vzduchová mezera Δ s permeabilitou μ_0 , reluktanci vlastního feromagnetika tedy zanedbáme

$$R_{m2} = \frac{\Delta}{\mu_0 S_2} = \frac{\Delta}{\mu_r \cdot b \cdot t} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{\mu_0 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 3,98 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

Indukčnost cívky bude

$$L_1 = \frac{N_1^2}{R_{m1} + \frac{R_{m2} R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}} = \frac{50^2}{1,194 \cdot 10^6 + \frac{1,71 \cdot 10^6 \cdot 3,98 \cdot 10^6}{1,71 \cdot 10^6 + 3,98 \cdot 10^6}} = 1,05 \mu\text{H}$$

{Př. MG/44} Vlastní indukčnost cívek na jednoduchém magnetickém obvodu

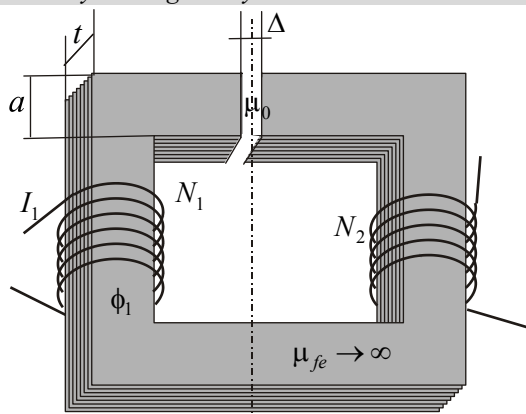
Jak velká je vlastní indukčnost cívek nasazených na jednoduchém magnetickém obvodu se vzduchovou mezerou podle obrázku (Obr. MG-81) za předpokladu, že magnetický odpor feromagnetického materiálu je podstatně menší, než magnetický odpor vzduchové mezery?

Navazuje na

MG-g Vlastní indukčnost

{Př. MG/42} Indukčnost cívky na magnetickém obvodu

MG-e Cívky na magnetických obvodech



(Obr. MG-81) Vlastní indukčnost cívek na jednoduchém magnetickém obvodu

Bude-li první cívkou procházet elektrický proud, poteče celým magnetickým obvodem magnetický tok, jehož velikost bude dána Hopkinsonovým zákonem

$$\Phi_1 = \frac{N_1 I_1}{R_m}$$

Velikost magnetického odporu závisí při zanedbání odporu železa pouze na velikosti vzduchové mezery

$$R_m = \frac{\Delta}{\mu_0 S} = \frac{\Delta}{\mu_0 a t}$$

Ze statické definice vyplyne pro vlastní indukčnost první cívky vztah

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} = \frac{N_1^2}{R_m}$$

Zcela stejným postupem obdržíme vztah pro indukčnost druhé cívky

$$L_2 = \frac{N_2^2}{R_m}$$

{Př. MG/45} Vlastní indukčnost cívek na jednoduchém magnetickém obvodu

Vypočítejte indukčnosti cívek L_1 a L_2 v magnetickém obvodu na obr. ES-43. $N_1=70$ záv., $N_2=150$ záv. Vzduchová mezera $\Delta=2$ mm, $a=t=2$ cm a relativní permeabilita železa $\mu_{rfe} \rightarrow \infty$.

Navazuje na

{Př. MG/44} Vlastní indukčnost cívek na jednoduchém magnetickém obvodu

Reluktance obvodu je ($\mu_{rfe} \rightarrow \infty$), dominantní vliv na reluktanci má vzduchová mezera:

$$R_m = \frac{\Delta}{\mu_0 S} = \frac{\Delta}{\mu_0 a t} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\mu_0 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 3,98 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} = \frac{N_1^2}{R_m} = \frac{70^2}{3,98 \cdot 10^6} = 1,23 \mu\text{H}$$

$$L_2 = \frac{N_2^2}{R_m} = \frac{150^2}{3,98 \cdot 10^6} = 5,65 \mu\text{H}$$

{Př. MG/46} Návrh tlumivky určené k omezení zkratového proudu v obvodu - číselný příklad

Navrhneme velikost vzduchové mezery a počet závitů tlumivky na jednoduchém magnetickém obvodu podle obrázku (Obr. MG-81), je-li určena pro jmenovitý proud $I_n=50$ A/50 Hz a má sloužit k omezení zkratového proudu který je desetinásobkem jmenovitého proudu. Indukčnost tlumivky má být 2,5 mH. Průřez sloupku magnetického obvodu je $15 \times 15 = 225$ cm². Maximální dovolená indukce v magnetickém obvodu je $B_{\max}=1.5$ T (amplituda)

Navazuje na

{Př. MG/44} Vlastní indukčnost cívek na jednoduchém magnetickém obvodu

Aby tlumivka správně pracovala, nesmí dojít pro žádnou hodnotu proudu k přesycení magnetického obvodu. Největší proud, který může téci tlumivkou podle zadání, je zkratový proud, jehož efektivní hodnota bude

$$I_k = 10I_n = 500 A$$

Při tomto maximálním proudu musí být magnetická indukce menší nebo rovna dovolené hodnotě

$$B_{\max} = 1,5 T$$

Pro zvolený průřez magnetického obvodu poteče magnetickým obvodem magnetický tok (amplituda)

$$\Phi_{\max} = B_{\max} S_{fe} = 1,5 \cdot 0,0225 = 0,03375 Wb$$

Ze statické definice indukčnosti lze vypočítat počet závitů, je třeba dosazovat amplitudu proudu, protože i magnetický tok je udán amplitudou

$$N \cdot \phi = L I$$

$$N = \frac{L I_k \sqrt{2}}{\Phi_{\max}} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 500 \cdot \sqrt{2}}{0,03375} = 52,37 \approx 53 \text{ závitů}$$

Pro určení velikosti vzduchové mezery je nutno vypočítat magnetický odpor ze vztahu

$$L = \frac{N^2}{R_m} \Rightarrow R_m = \frac{N^2}{L} = \frac{53^2}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 1,124 \cdot 10^6 H^{-1}$$

Pro velikost potřebné vzduchové mezery potom platí

$$R_m = \frac{\Delta}{\mu_0 S_{fe}} \Rightarrow \Delta = \mu_0 S_{fe} R_m = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,0225 \cdot 1,124 \cdot 10^6 = 0,0318 m$$

U této tlumivky by například bylo možno použít tři vzduchové mezery přibližně po 11 mm.

Poznámka:

Součástí návrhu tlumivky je volba vhodného magnetického obvodu, v našem případě byl již magnetický obvod zvolen. Tato volba není jednoznačná. Tlumivka musí být proveditelná a mít pokud možno optimální rozměry při nejmenší hmotnosti. Při velkém průřezu magnetického obvodu vyjde tlumivka s těžkým magnetickým obvodem a lehkým vinutím, má malý počet závitů a malé vzduchové mezery. Při opačné volbě je to naopak. Další částí návrhu by bylo stanovení průřezu vodičů. Proudová hustota by se volila s ohledem na oteplení vinutí. Celkový rozměr magnetického obvodu by musel být takový, aby se tam navržené vinutí vůbec vešlo.

{Př. MG/47} Návrh tlumivky určené k připojení na konstantní napětí - číselný příklad

Navrháme velikost vzduchové mezery a počet závitů tlumivky na jednoduchém magnetickém obvodu podle obrázku (Obr. MG-81), je-li určena pro trvalé připojení na napětí 500 V/50 Hz a bude sloužit k dodávání jalového induktivního výkonu pro kompenzaci účinníku. Indukčnost tlumivky má být 2,5 mH. Průřez sloupku magnetického obvodu je $15 \times 15 = 225 \text{ cm}^2$. Maximální dovolená indukce v magnetickém obvodu je $B_{\max} = 1,5 \text{ T}$ (amplituda)

Navazuje na

{Př. MG/44} Vlastní indukčnost cívek na jednoduchém magnetickém obvodu

{Př. MG/46} Návrh tlumivky určené k omezení zkratového proudu v obvodu - číselný příklad

{Př. MG/34} Napětí indukované v cívkách na magnetickém obvodu - ideální transformátor

Amplituda magnetické indukce musí být menší nebo rovna dovolené hodnotě

$$B_{\max} = 1,5 T$$

Pro zvolený průřez magnetického obvodu poteče magnetickým obvodem magnetický tok (amplituda)

$$\Phi_{\max} = B_{\max} S_{fe} = 1,5 \cdot 0,0225 = 0,03375 Wb$$

V tomto případě je třeba vycházet z napětí, které bude trvale připojeno na tlumivce, při zanedbání úbytků je to současně indukované napětí a pro jeho efektivní hodnotu bude podle příkladu ({Př. MG/34}) platit

$$U_{ef} = 4,44 f N \Phi_{\max}$$

Potřebný počet závitů, při kterém nedojde k přesycení tlumivky tedy bude

$$N = \frac{U_{ef}}{4,44 f \Phi_{\max}} = \frac{500}{4,44 \cdot 50 \cdot 0,03375} = 66,73 \approx 67 \text{ závitů}$$

Další postup by byl obdobný jako v příkladu ({Př. MG/46})

Pro určení velikosti vzduchové mezery je nutno vypočítat magnetický odpor ze vztahu

$$L = \frac{N^2}{R_m} \Rightarrow R_m = \frac{N^2}{L} = \frac{67^2}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 1,796 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

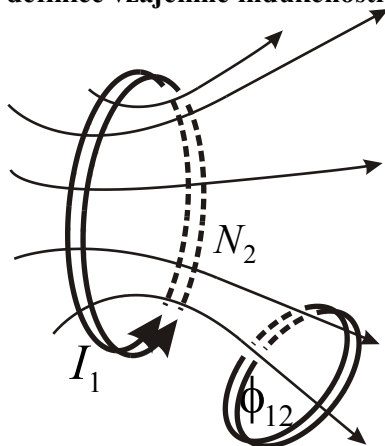
Pro velikost magnetického odporu ve vztahu k velikosti vzduchové mezery platí

$$R_m = \frac{\Delta}{\mu_0 S_{fe}} \Rightarrow \Delta = \mu_0 S_{fe} R_m = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,0225 \cdot 1,796 \cdot 10^6 = 0,051 \text{ m}$$

Velkou vzduchovou mezeru je třeba rozdělit na několik dílčích mezer, aby nedocházelo k vytlačení magnetického pole vně vzduchové mezery. U této tlumivky by bylo například možné použít čtyři vzduchové mezery přibližně po 13 mm.

MG-h Vzájemná indukčnost

Statická definice vzájemné indukčnosti



Vzájemná indukčnost je definována analogicky s vlastní indukčností. Udává vztah mezi proudem, který prochází jednou smyčkou, a magnetickým tokem vybuzeného magnetického pole, který prochází druhou smyčkou

$$\Phi_{12} = \iint_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}$$

$$\Phi_{12} = M_{12} \cdot I_1$$

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$$

Má-li druhá smyčka větší počet závitů, je třeba počítat s takzvaným spřaženým magnetickým tokem – tokem posčítaným pro všechny závity

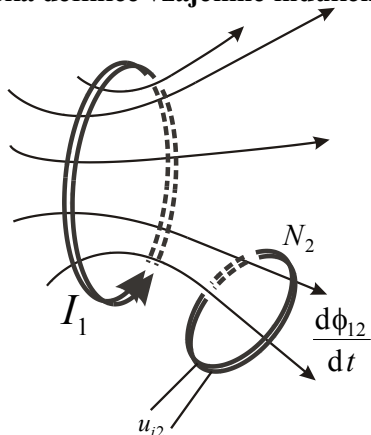
$$M_{12} = \frac{\sum \phi_{12}}{I_1}$$

Prochází-li všemi závity stejný tok, platí navíc

$$M_{12} = \frac{\sum \Phi_{12}}{I_1} = \frac{N_2 \cdot \Phi_{12}}{I_1}$$

(Obr. MG-82) Vzájemná indukčnost podle statické definice

Dynamická definice vzájemné indukčnosti



Podle dynamické definice je vzájemná indukčnost definována pomocí napětí indukovaného na svorkách druhé smyčky časovou změnou proudu v první smyčce

$$u_{i2} = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

(Obr. MG-83) Vzájemná indukčnost pomocí dynamické definice

Postup při výpočtu vzájemné indukčnosti

Z definic vyplývá, že vzájemná indukčnost mezi cívkami udává vztah mezi proudem v jedné cívce a vybuzeným magnetickým polem v druhé cívce, které je reprezentováno magnetickým tokem, který cívkou prochází. V lineárním prostředí je indukčnost konstanta zcela nezávislá na velikosti proudu. Její velikost je dána rozměry a vzájemnou polohou cívek, počtem závitů, vlastnostmi magnetického materiálu mezi cívkami. Máme-li však vzájemnou indukčnost vypočítat, musíme na začátku předpokládat, že jednou z cívek teče proud, i když se o něm nikde nemluví a v konečných vztazích se ani neobjeví. Pomocí tohoto proudu totiž vypočítáme velikost magnetického pole a k hodnotě vzájemné indukčnosti se zpětně dopočteme.

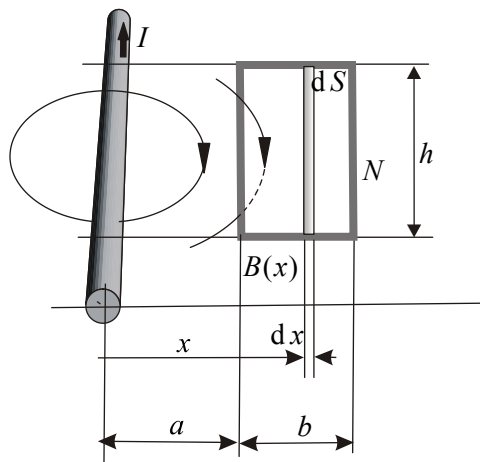
{Př. MG/48} Vzájemná indukčnost mezi vodičem vedení a obdélníkovou smyčkou

Jak velká je vzájemná indukčnost mezi vodičem vedení a obdélníkovou cívkou zadaných rozměrů s počtem závitů N ?

Navazuje na

MG-h Vzájemná indukčnost

{Př. MG/18} Magnetické pole v dlouhém válcovém vodiči



Na obrázku je relativně dlouhý vodič, který je protékán proudem I . V jedné rovině a rovnoběžně s vodičem je umístěna obdélníková smyčka s počtem závitů N . Vodič lze považovat za část nějakého obvodu (druhé smyčky). Ostatní části tohoto obvodu jsou natolik vzdáleny, že neovlivní magnetické pole v obdélníkové smyčce.

Při výpočtu vzájemné indukčnosti je vhodné vycházet ze statické definice. Podle této definice je vzájemná indukčnost konstanta udávající vztah mezi proudem v jedné smyčce a magnetickým tokem ve druhé smyčce, který je částí celkového magnetického toku vybuzeného první smyčkou.

$$M_{12} = \frac{N_2 \cdot \Phi_{12}}{I_1}$$

V našem případě je budící smyčka reprezentována vodičem, kterým protéká proud I . Vodič vybudí magnetické pole, které bude mít směr jako na obrázku. Je třeba vypočítat magnetický tok, který projde obdélníkovou smyčkou.

V místě x na obdélníkové smyčce je magnetická indukce vybuzeného pole

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

Vytknutou ploškou dS v místě x prochází magnetický tok

$$d\Phi = B(x) dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} h dx$$

Celou obdélníkovou smyčkou prochází magnetický tok

$$\Phi = \iint_S B(x) dS = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} h dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} h \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

Vzájemnou indukčnost lze z magnetického toku určit podle statické definice

$$M = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N}{2\pi} h \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

{Př. MG/49} Vzájemná indukčnost mezi vodičem a obdélníkovou smyčkou - číselný příklad

Vypočítejte vzájemnou indukčnosti mezi přímým vodičem a obdélníkovou smyčkou o $N=10$ závitech. Proud procházející přímým vodičem má harmonický průběh $I=5\sin(\omega t)$ A, $a=4$ cm, $b=3$ cm, $h=8$ cm. Dále stanovte indukované napětí ve smyčce $u_i(t)$ a jeho efektivní hodnotu U_{ef} , je-li frekvence proudu procházejícího přímým vodičem $f=50$ Hz.

Navazuje na

{Př. MG/48} Vzájemná indukčnost mezi vodičem vedení a obdélníkovou smyčkou

Vzájemná indukčnosti je

$$M = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot h}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) = \frac{\mu_0 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{2\pi} \ln\left(\frac{7 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-2}}\right) = 89,54 \text{ nH}$$

Indukované napětí spočteme jako

$$u_i(t) = M \frac{di(t)}{dt} = M \cdot 5 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) = 89,54 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot \cos(2\pi \cdot 50) = 28,13 \cdot \cos(314,16 \cdot t) \mu V$$

Efektivní hodnota indukovaného napětí je

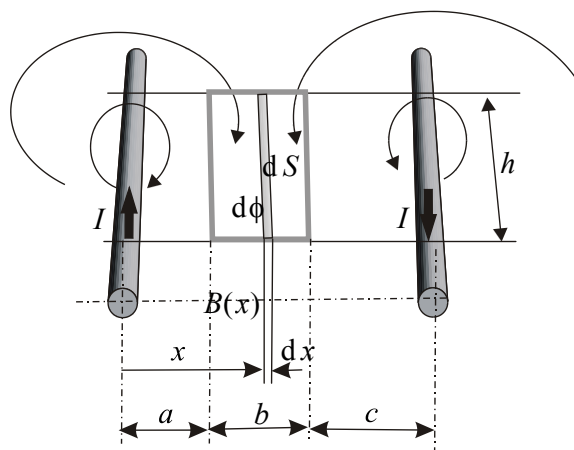
$$U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{28,13 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} = 19,9 \mu V$$

{Př. MG/50} Vzájemná indukčnost mezi dvojvodičovým vedením a obdélníkovou smyčkou vloženou mezi vodiče vedení

Jak velká je vzájemná indukčnost mezi dvouvodičovým vedením a obdélníkovou smyčkou, která je vložena mezi vodiče vedení podle obrázku (Obr. MG-84)?

Navazuje na

{Př. MG/48} Vzájemná indukčnost mezi vodičem vedení a obdélníkovou smyčkou



Úloha je velice podobná jako {Př. MG/48}, rozdíl je v tom, že je nutno v tomto případě započítat magnetické pole (toky) dvou vodičů. Magnetické pole se ve smyčce sčítá (viz obrázek (Obr. MG-84))

Levý vodič vybudí ve smyčce magnetický tok o velikosti {Př. MG/48}

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} h \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

Pravý vodič vybudí magnetický tok o velikosti {Př. MG/48}

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} h \ln\left(\frac{b+c}{c}\right)$$

(Obr. MG-84) Vzájemná indukčnost mezi obdélníkovou cívkou a dvouvodičovým vedením

Výsledný magnetický tok bude

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} h \left[\ln\left(\frac{a+b}{a}\right) + \ln\left(\frac{b+c}{c}\right) \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} h \ln\left(\frac{(a+b)(b+c)}{ac}\right)$$

Vzájemná indukčnost mezi vedením a smyčkou je tedy podle statické definice

$$M = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N}{2\pi} h \ln\left(\frac{(a+b)(b+c)}{ac}\right)$$

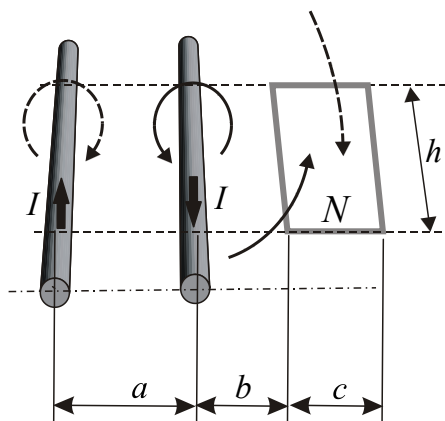
{Př. MG/51} **Vzájemná indukčnost mezi dvojvodičovým vedením a obdélníkovou smyčkou vloženou vně vedení**

Jak velká je vzájemná indukčnost mezi dvouvodičovým vedením a obdélníkovou smyčkou, která je vložena mezi vodiče vedení podle obrázku (Obr. MG-85)?

Navazuje na

{Př. MG/48} *Vzájemná indukčnost mezi vodičem vedení a obdélníkovou smyčkou*

{Př. MG/50} *Vzájemná indukčnost mezi dvojvodičovým vedením a obdélníkovou smyčkou vloženou mezi vodiče vedení*



(Obr. MG-85) Obdélníková smyčka vně dvouvodičového vedení

Úloha je velice podobná jako {Př. MG/50}, rozdíl je v tom, že se magnetické pole obou vodičů vedení odčítá

Levý vodič vybudí ve smyčce magnetický tok o velikosti {Př. MG/48}

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} h \ln\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)$$

Pravý vodič vybudí magnetický tok o velikosti {Př. MG/48}

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} h \ln\left(\frac{b+c}{b}\right)$$

Výsledný magnetický tok bude

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} h \left[\ln\left(\frac{b+c}{c}\right) - \ln\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right) \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot h \cdot \ln\left(\frac{(a+b)(b+c)}{c(a+b+c)}\right)$$

Vzájemná indukčnost mezi vedením a smyčkou je tedy podle statické definice

$$M = \frac{N\phi}{I} = \frac{\mu_0 N}{2\pi} h \ln\left(\frac{(a+b)(b+c)}{c(a+b+c)}\right)$$

{Př. MG/52} **Vzájemná indukčnost cívek na magnetickém obvodu**

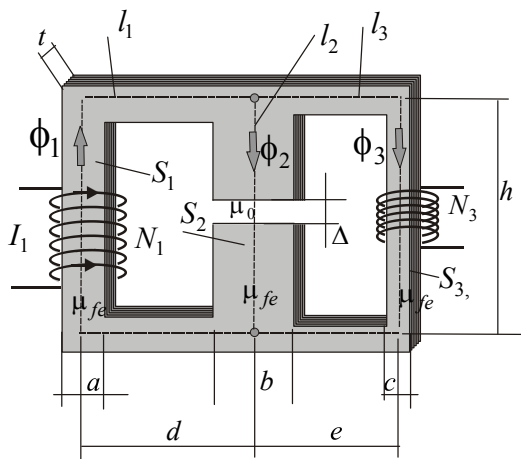
Jak velká je vzájemná indukčnost mezi cívkami na magnetickém obvodu s rozměry a parametry podle obrázku (Obr. MG-86)?

Navazuje na

MG-h *Vzájemná indukčnost*

{Př. MG/30} *Výpočet magnetického pole v magnetickém obvodu*

Rozložení magnetického pole v identickém magnetickém obvodu pro stejné cívky bylo vypočteno v příkladě ({Př. MG/30}).



(Obr. MG-86) Vzájemná indukčnost mezi cívkami na magnetickém obvodu

Pomocí statické definice vzájemné indukčnosti je nutné vypočítat tok cívkou na třetím sloupku Φ_3 , pokud bude procházet proud cívkou na prvním sloupku

$$M_{13} = \frac{N_3 \cdot \Phi_3}{I_1}$$

Podle ({Př. MG/30}) je magnetický tok v třetím sloupku

$$\Phi_3 = \Phi_1 \frac{R_{m2}}{R_{m2} + R_{m3}} = \frac{N_1 I_1 R_{m2}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m1} R_{m3} + R_{m2} R_{m3}}$$

Po zpětném dosazení do vztahu pro vzájemnou indukčnost

$$M_{13} = \frac{N_1 N_3 R_{m2}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m1} R_{m3} + R_{m2} R_{m3}}$$

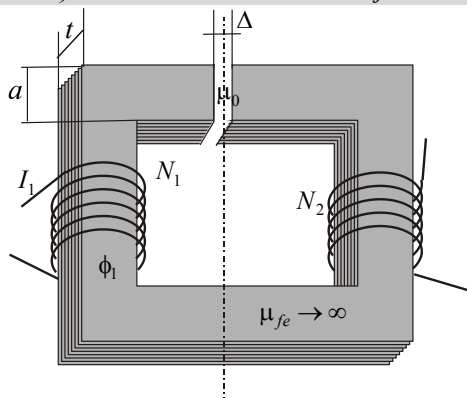
{Př. MG/53} Vzájemná indukčnost mezi cívkami na jednoduchém magnetickém obvodu

Jak velká je vzájemná indukčnost mezi cívkami nasazenými na jednoduchém magnetickém obvodu se vzduchovou mezerou podle obrázku (Obr. MG-81) za předpokladu, že magnetický odpor feromagnetického materiálu je podstatně menší, než magnetický odpor vzduchové mezery?

Navazuje na

MG-h Vzájemná indukčnost

{Př. MG/44} Vlastní indukčnost cívek na jednoduchém magnetickém obvodu



(Obr. MG-87) Vzájemná indukčnost cívek na jednoduchém magnetickém obvodu

Bude-li první cívku procházet proud I_1 , vybudí se magnetický tok, který bude v celém magnetickém obvodu stejný a bude mít velikost

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{N_1 I_1}{R_m}$$

Podle statické definice vzájemné indukčnosti bude platit

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_2}{I_1} = \frac{N_1 N_2}{R_m}$$

Takto umístěné cívky na magnetickém obvodu mají stoprocentní magnetickou vazbu. To znamená, že celý magnetický tok, který vybudí první cívka, projde i druhou cívku. Pro takto vázané cívky bude platit

$$M_{12} = \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{\frac{N_1^2}{R_m} \frac{N_2^2}{R_m}} = \frac{N_1 N_2}{R_m}$$

V obecném případě je vazba menší, tato skutečnost je respektována činitelem vazby

$$\chi \leq 1$$

$$M_{12} = \chi \sqrt{L_1 L_2}$$

{Př. MG/54} Vzájemná indukčnost cívek na magnetickém obvodu - číselný příklad

Na magnetickém obvodu podle obrázku (Obr. MG-87) jsou nasazené dvě cívky. Cívka na levém sloupcu má počet závitů $N_1=100$, cívka na pravém sloupcu počet závitů $N_2=50$. Průřez magnetického obvodu je $a=4$ cm, $t=2$ cm. V magnetickém obvodu je vzduchová mezerka s rozměry $\Delta=2$ mm. Magnetická vodivost materiálu magnetického obvodu se dá považovat za nekonečně velkou. Jak velká je vzájemná indukčnost mezi cívkami?

Navazuje na

{Př. MG/53} Vzájemná indukčnost mezi cívkami na jednoduchém magnetickém obvodu

Velikost vzájemné indukčnosti je dána vztahem

$$M_{12} = \frac{N_1 N_2}{R_m}$$

Velikost magnetického odporu je v tomto případě dána pouze velikostí magnetického odporu vzduchové mezery

$$R_m = \frac{\Delta}{\mu_0 S_{fe}} = \frac{0,002}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,04 \cdot 0,02} = 1,99 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

Vzájemná indukčnost mezi cívkami po dosazení je

$$M_{12} = \frac{N_1 N_2}{R_m} = \frac{100 \cdot 50}{1,99 \cdot 10^6} = 2,51 \text{ mH}$$

{Př. MG/55} Rozptylová indukčnost transformátoru

Jak velká je rozptylová indukčnost transformátoru s cívkami umístěnými na magnetickém obvodu s rozměry podle obrázku (Obr. MG-88)?

Navazuje na

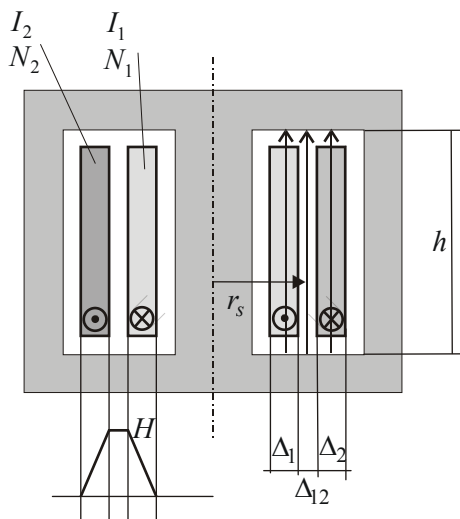
{Př. MG/29} {Př. MG/28} Magnetické pole v cívkách transformátoru

{Př. MG/28} Cívka se stínícím pláštěm

{Př. MG/41} Indukčnost cívky se stínícím pláštěm

V zatíženém transformátoru tečou primární a sekundární cívkou proudy, jejichž velikost je při zanedbání proudů naprázdno nepřímo úměrná počtu závitů. Ampérvávitý (součiny počtu závitů a proudu) jsou vyrovnané

$$N_1 I_1 = N_2 I_2$$



(Obr. MG-88) Rozptylová indukčnost transformátoru

Ve vinutí cívek a mezi nimi se vytvoří magnetické pole, které se nazývá **rozptylové**. Rozptylové je proto, že se neuzavírá pouze magnetickým obvodem, ale částečně i ve vzduchu. Velikost tohoto magnetického pole byla vypočtena v příkladu ({Př. MG/29}). Rozptylové magnetické pole má určitou energii a té odpovídá také určitá indukčnost. Tato indukčnost se **nazývá rozptylová** a má zásadní význam z hlediska chování transformátoru. Hlavní funkce transformátoru jako prvku elektrického obvodu spočívá v tom, že transformuje napětí a proudy v poměru závitů. Mimo to však představuje v obvodu určitou reaktanci, jejíž velikost je dána právě rozptylovou indukčností.

Celý výpočet rozptylové indukčnosti se dá rozdělit na část odpovídající energii magnetického pole v primární cívce, část odpovídající energii magnetického pole v sekundární cívce a část odpovídající energii magnetického pole v kanálu mezi cívkami.

V objemu vlastních cívek transformátoru intenzita magnetického pole lineárně klesá nebo stoupá. Zcela stejný průběh měla ve vinutí cívky se stínícím pláštěm (viz {Př. MG/28}). Toho lze využít a vypočítat odpovídající část indukčnosti zcela analogicky.

Indukčnost odpovídající energii magnetického pole v primární cívce

$$L_1 = \frac{\mu_0 2\pi r_s N_1^2 \Delta_1}{h 3}$$

Indukčnost odpovídající energii magnetického pole v sekundární cívce, přepočtené na ampérvávitý primární cívky

$$L_2 = \frac{\mu_0 2\pi r_s N_1^2 \Delta_2}{h 3}$$

Rozptylové magnetické pole v transformátoru je buzeno dvěma cívkami s různým počtem závitů a s různě velkým proudem. Ve vztazích pro výpočet intenzity magnetického pole však figurují takzvané ampérvávitý, součiny proudu a počtu závitů, které jsou u obou vinutí stejné

$$N_1 I_1 = N_2 I_2$$

Transformátor se skutečně v obvodu chová jako indukčnost, její velikost však záleží na tom, jestli ji pozorujeme z primární nebo sekundární strany, tedy ze vstupních nebo výstupních svorek transformátoru. Když při výpočtu pomyslně vyjádříme energii magnetického pole ve všech částech pomocí ampérvávitů primární strany

$$N_1 I_1$$

Dostaneme takzvanou **rozptylovou indukčnost přepočtenou na primární stranu** a právě tak by se transformátor z této strany choval. Stejně to platí i pro přepočet veličin na sekundární stranu.

V prostoru mezi primární a sekundární cívkou je magnetické pole konstantní, odpovídá mu energie

$$W_m = \frac{1}{2} BHV = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{N_1 I_1}{h} \right)^2 2\pi r_s \Delta_{12} h = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{N_1 I_1}{h} \right)^2 2\pi r_s \Delta_{12} h = \frac{1}{2} L_{12} I^2$$

Indukčnost odpovídající energii pole mezi cívkami

$$L_{12} = \frac{\mu_0 2\pi r_s N_1^2}{h} \Delta_{12}$$

Celková rozptylová indukčnost transformátoru přepočtená na primární stranu je součtem dílčích indukčností

$$L = L_1 + L_{12} + L_2 = \frac{\mu_0 2\pi r_s N_1^2}{h} \left(\frac{\Delta_1}{3} + \Delta_{12} + \frac{\Delta_2}{3} \right)$$

{Př. MG/56} Rozptylová indukčnost transformátoru - číselný příklad

Jak velká je rozptylová indukčnost a reaktance výkonového transformátoru s uspořádáním vinutí podle obrázku (Obr. MG-88), je-li střeň poloměr vinutí $r_s=110$ mm, šířka primárního vinutí $\Delta_1=20$ mm, šířka sekundárního vinutí $\Delta_2=15$ mm, mezi primárním a sekundárním vinutím je izolační kanál $\Delta_{12}=13$ mm? Obě vinutí jsou stejně vysoká, jejich výška je $h=900$ mm. Počet závitů primární cívky je $N_1=700$, počet závitů sekundární cívky je $N_2=20$.

Navazuje na

{Př. MG/55} Rozptylová indukčnost transformátoru

Rozptylová indukčnost transformátoru přepočtená na primární vinutí je

$$L' = \frac{\mu_0 2\pi r_s N_1^2}{h} \left(\frac{\Delta_1}{3} + \Delta_{12} + \frac{\Delta_2}{3} \right) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,11 \cdot 700^2}{0,9} \left(\frac{0,02}{3} + 0,013 + \frac{0,015}{3} \right) = 11,66 \text{ mH}$$

Jako takováto indukčnost se tedy transformátor bude chovat ze strany primárního vinutí. Při kmitočtu 50 Hz by představoval reaktanci

$$X' = \omega \cdot L' = 314 \cdot 11,66 \cdot 10^{-3} = 3,66 \Omega$$

Kdyby bylo na primární straně transformátoru připojené napětí s efektivní hodnotou $U_1=6000$ V a kdyby došlo ke zkratu na sekundárních svorkách, tekla by primárním vinutím a ze sítě ustálený zkratový proud

$$I_k' = \frac{U_1}{X'} = \frac{6000}{3,66} = 1640 \text{ A}$$

Zcela analogicky by se transformátor ze strany sekundárního vinutí choval jako indukčnost o velikosti

$$L'' = \frac{\mu_0 2\pi r_s N_2^2}{h} \left(\frac{\Delta_1}{3} + \Delta_{12} + \frac{\Delta_2}{3} \right) = L' \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 = 11,66 \cdot \left(\frac{20}{700} \right)^2 = 9,51 \mu\text{H}$$

Při kmitočtu 50 Hz by to odpovídalo reaktanci

$$X'' = \omega \cdot L'' = 314 \cdot 9,51 \cdot 10^{-6} = 2,98 \cdot 10^{-3} \Omega$$

MG-i Síly v magnetickém poli

Pro výpočet síly působící na vodič o délce l , který je protékán proudem o velikosti I a nachází se v magnetickém poli s magnetickou indukcí \mathbf{B} je možné využít definičního vztahu (viz {Př. MG/2} Silové působení a magnetická indukce vybuzená proudovými smyčkami ve vzduchu)

$$\mathbf{F} = I \int_l d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Budeme-li pomocí tohoto vztahu počítat vzájemnou sílu mezi dvěma objekty protékány proudem, například mezi dvěma vodiči nebo mezi dvěma cívkami, je třeba vzít magnetickou indukci vyvolanou jedním objektem v místě druhého objektu a proud druhého objektu. To vychází ze skutečnosti, že vodič sám na sebe nepůsobí silou, která by s ním dokázala pohybovat. Jeho vlastní magnetické pole sílu samozřejmě vyvolá, tato síla však působí deformaci tělesa.

Princip virtuálních prací v magnetickém poli

I v magnetickém poli platí princip virtuálních prací, podle kterého se uzavřená soustava snaží zaujmout takovou polohu, ve které by měla nejmenší energii. Síly tedy působí v takovém směru, aby se soustava do této polohy dostala. Necháme-li tyto síly působit na určité pomyslné virtuální dráze, vykoná soustava takzvanou virtuální práci, která se ovšem musí projevit jako úbytek akumulované energie a v tomto případě energie magnetického pole.

Pro energii v magnetického pole, které vybudí cívka o indukčnosti L bude platit

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{B} \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} L I^2$$

Virtuální práce vykonaná soustavou při elementárním posunu ve směru působících sil

$$dA = F dx = -dW_m$$

Působící síla

$$F = -\frac{\partial W_m}{\partial x} = -\frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial x}$$

Velká výhoda principu virtuálních prací při výpočtu sil je v tom, že se nemusíme zaobírat výpočtem magnetického pole, stačí nám znát pouze indukčnost a vědět, jak se bude hodnota indukčnosti měnit v závislosti na veličinách a vzdálenostech ve směru působících sil. Když známe například vztah pro indukčnost válcové cívky a víme, jak se bude tato indukčnost měnit při zmenšování výšky cívky, tedy když dokážeme hodnotu indukčnosti podle výšky cívky derivovat, je tato hodnota úměrná velikosti síly. Ze vztahu pro energii magnetického pole vyplývá, že soustava se snaží zaujmout polohu s co možná největší indukčností.

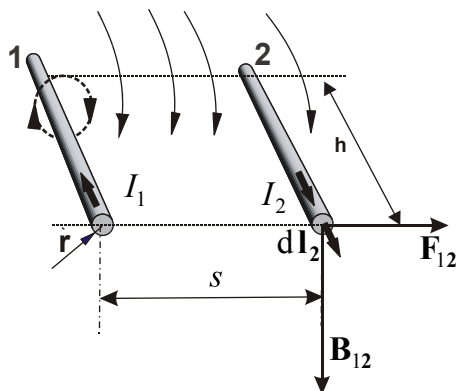
{Př. MG/57} Síla působící mezi dvěma rovnoběžnými vodiči

Jak velkou silou na sebe působí dva rovnoběžné vodiče v uspořádání podle obrázku (Obr. MG-89)?

Navazuje na

{Př. MG/17} Magnetické pole kolem přímého dlouhého tenkého vodiče

{Př. MG/3} Magnetická indukce a síly působící na element délky proudovodičů, pravidlo pravé a levé ruky, pravotočivý šroub



(Obr. MG-89) Síla působící na dva rovnoběžné vodiče protékané proudem

Sílu, kterou vodič 1 působí na vodič 2, je možno obecně určit ze vztahu

$$\mathbf{F}_{12} = I_2 \int_{l_2} d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_{12}$$

Integrace je provedena podél vodiče 2, $d\mathbf{l}_2$ je element vytknutý na vodiči 2 ve směru procházejícího proudu I_2 , což je proud protékající vodičem 2, \mathbf{B}_{12} je indukce magnetického pole vybuzená vodičem 1 v místě vodiče 2. Pro velikost magnetické indukce v libovolném místě vodiče 2 platí

$$B_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi s}$$

Magnetická indukce B_{12} je v každém místě kolmá na vodič **2**, vektor síly bude podle naznačeného vektorového součinu kolmý na vektor magnetické indukce i na element dráhy, bude mít smysl jako na obrázku. Pro velikost síly na jednotku délky vodiče bude platit vztah

$$F_{12}/l = B_{12}I_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi s}$$

Bude-li se jednat o dvojvodičové vedení, potom

$$I_1 = I_2 = I$$

Síla na jednotku délky, kterou na sebe vodiče působí

$$F_{12}/l = B_{12}I_2 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi s}$$

Stejný výsledek obdržíme na základě principu virtuálních prací

$$|F| = \frac{1}{2} I^2 \left| \frac{\partial L}{\partial x} \right|$$

Při výpočtu síly na jednotku délky je třeba derivovat indukčnost na jednotku délky dvouvodičového vedení

$$L/l = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left(\frac{s-a}{a} \right)$$

Pro velikost síly potom platí vztah

$$F/l = \frac{1}{2} I^2 \left| \frac{\partial L}{\partial x} \right| = \frac{1}{2} I^2 \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{s}{a} \right| = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0}{\pi} \frac{a}{s} \frac{1}{a} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi s}$$

{Př. MG/58} Síla působící mezi rovnoběžnými vodiči - číselný příklad

Jak byla definována jednotka elektrického proudu 1 Ampér ?

Na základě silového působení mezi dvěma tenkými, rovnoběžnými a nekonečně dlouhými vodiči byla původně definována jednotka proudu 1A. Prochází-li vodiči proud 1A (Ampér), potom na jeden metr jejich délky působí síla:

$$F/l = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi s} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1^2}{2\pi \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

{Př. MG/59} Síla působící mezi dvěma rovnoběžnými vodiči - číselný příklad

Dvouvodičové vedení podle obrázku (Obr. MG-89) s parametry: $s=3 \text{ cm}$, délkou $l=30 \text{ m}$ je zatíženo odporem $R=70 \Omega$. Jaké napětí U musíme na vedení připojit, aby se vodiče přitahovaly silou $F=1 \text{ N}$? S uvážením, že $I=U/R$ a

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi s}$$

dostaneme

$$U = \sqrt{\frac{F \cdot 2\pi \cdot s \cdot R^2}{\mu_0 \cdot l}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 70^2}{\mu_0 \cdot 30}} = 1565 \text{ V}$$

{Př. MG/60} Síla působící mezi dvěma tenkými pásovými vodiči

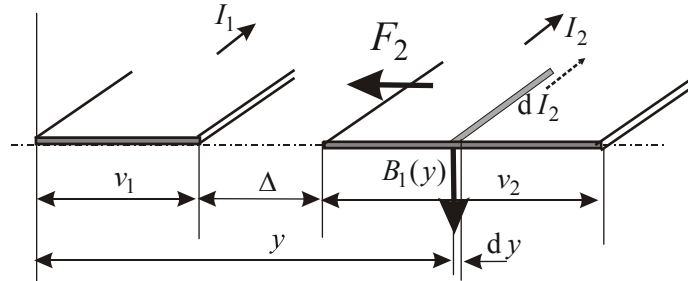
Jak velká síla a v jakém směru působí na dva pásové vodiče protékané proudem podle obrázku (Obr. MG-90)?

Navazuje na

MG-i Síly v magnetickém poli

{Př. MG/21} Magnetické pole na podélné ose vně tenkého vodivého pásu protékaného proudem

{Př. MG/57} Síla působící mezi dvěma rovnoběžnými vodiči



(Obr. MG-90) Síla působící mezi dvěma tenkými pásovými vodiči

Podle příkladu ({Př. MG/21}) vybudí levý pás v místě pravého pásu ve vzdálenosti y magnetickou indukci

$$B_1(y) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi v_1} \ln\left(\frac{y}{y-v_1}\right)$$

Vytkneme-li na pravém pásu elementární proudové vlákno o šířce dy , poteče tímto vláknem proud

$$dI_2 = \frac{I_2}{v_2} dy$$

Magnetická indukce od levého vodiče je orientována kolmo k vytknutému proudovému vláknem a podle vztahu

$$\mathbf{F} = I \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

bude na toto vlákno působit přitažlivá síla na jednotku délky, která směřuje po spojnici mezi vodiči a bude mít velikost

$$dF_2 = dI_2 B_1(y) = \frac{I_2}{v_2} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi v_1} \ln\left(\frac{y}{y-v_1}\right) dy$$

Celkovou sílu získáme sečtením příspěvku na všechna proudová vlákna, tedy integrací po délce pravého pásu

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi v_1 v_2} \int_{y=v_1+\Delta}^{y=v_1+v_2+\Delta} \ln\left(\frac{y}{y-v_1}\right) dy$$

Integrál ve vztahu je vyčíslitelný i analyticky. Po delších úpravách a dosazení mezí pro integraci vycházejí následující vztahy

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi v_1 v_2} \left[y \ln \frac{y}{y-v_1} - v_1 \ln \frac{v_1}{y-v_1} \right]_{v_1+\Delta}^{v_1+v_2+\Delta} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi v_1 v_2} \ln \left(\frac{(v_1+v_2+\Delta)^{(v_1+v_2+\Delta)} (v_2+\Delta)^{-(v_2+\Delta)}}{(v_1+\Delta)^{(v_1+\Delta)} \Delta^{-\Delta}} \right)$$

Platnost vztahu lze ověřit úvahou, podle které budeme předpokládat, že šířky pásů v_1 a v_2 jsou podstatně menší než jejich vzdálenost Δ

$$v_1, v_2 \ll \Delta$$

potom je možné ověřit, že bude platit

$$\ln \left(\frac{(v_1+v_2+\Delta)^{(v_1+v_2+\Delta)} (v_2+\Delta)^{-(v_2+\Delta)}}{(v_1+\Delta)^{(v_1+\Delta)} \Delta^{-\Delta}} \right) \rightarrow \frac{v_1 v_2}{\Delta}$$

Vztah pro sílu mezi pásovými vodiči přejde na stejný výraz, jaký platí pro sílu mezi relativně tenkými vodiči podle příkladu ({Př. MG/57}).

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \Delta}$$

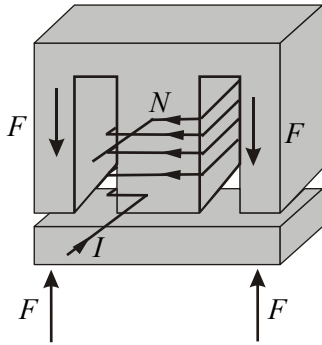
{Př. MG/61} Síla, kterou jsou přitahovány dvě části magnetického obvodu (elektromagnet)

Jakou silou na sebe působí dvě části magnetického obvodu s cívkou, kterou prochází proud I v uspořádání podle obrázku (Obr. MG-91)?

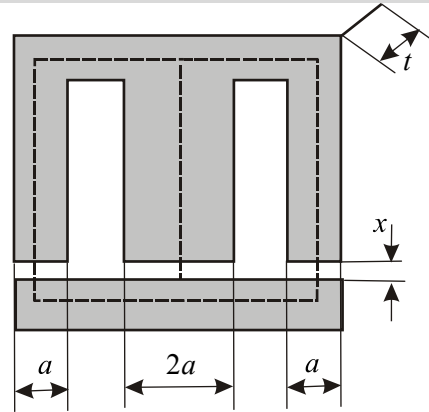
Navazuje na

MG-e Cívky na magnetických obvodech

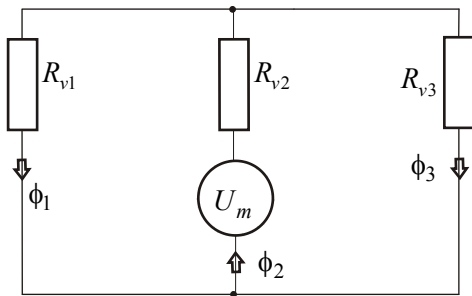
MG-i Síly v magnetickém poli



(Obr. MG-91) Síla působící na dvě části magnetického obvodu



(Obr. MG-92) Rozměry magnetického obvodu



(Obr. MG-93) Náhradní schéma magnetického obvodu

Umístíme-li na sloupek magnetického obvodu cívku o počtu závitů N a necháme-li jí protékat proud I , bude horní část magnetického obvodu ke spodní přitahována silou, kterou je možno určit na základě principu virtuálních prací

$$|F| = \left| \frac{\partial}{\partial x} W_m \right| = \frac{1}{2} I^2 \left| \frac{\partial L}{\partial x} \right|$$

Indukčnost cívky nasazené na feromagnetickém jádře je dána vztahem

$$L = \frac{N^2}{R_m}$$

Budeme-li uvažovat, že feromagnetický materiál má hodně velkou permeabilitu, potom lze zanedbat odpory železných částí magnetického obvodu vůči magnetickým odporům vzduchových mezer. Pro magnetický obvod lze nakreslit náhradní schéma jako na obrázku a napsat vztah

$$R_m = R_{v2} + \frac{R_{v1}R_{v3}}{R_{v1} + R_{v3}} = \frac{x}{\mu_0 2at} + \frac{1}{2} \frac{x}{\mu_0 at} = \frac{x}{\mu_0 at}$$

V tomto vztahu se vyskytují odpory vzduchových mezer pod jednotlivými sloupky

$$R_{v1} = \frac{x}{\mu_0 at}$$

$$R_{v2} = \frac{x}{\mu_0 2at}$$

$$R_{v3} = \frac{x}{\mu_0 at}$$

Indukčnost cívky na magnetickém obvodu bude

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a t}{x}$$

Pro sílu, kterou jsou k sobě přitahovány části magnetického obvodu, platí konečný vztah

$$|F| = \frac{1}{2} I^2 \left| \frac{\partial L}{\partial x} \right| = \frac{1}{2} I^2 \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu_0 N^2 a t}{x} \right| = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0 N^2 a t}{x^2}$$

{Př. MG/62} Síla, kterou jsou přitahovány dvě části magnetického obvodu (elektromagnet)

Jakým proudem I je třeba napájet cívku ($N=30$ záv.) elektromagnetu v uspořádání podle obrázku (Obr. MG-91), aby byl elektromagnet schopen uzvednout náklad o hmotnosti $m=10$ kg? Vzdálenost x uvažujte konstantní $x=1$ cm, $a=40$ cm, $t=20$ cm.

Navazuje na

{Př. MG/61} Síla, kterou jsou přitahovány dvě části magnetického obvodu (elektromagnet)

Pro velikost síly platí

$$|F| = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0 N^2 a t}{x^2}$$

a potřebná síla je $F = m \cdot g = 10 \cdot 10^3 \cdot 9,81 = 98,1$ kN

Takže:

$$I = \sqrt{\frac{|F| \cdot x^2}{\mu_0 \cdot N^2 \cdot a \cdot t}} = \sqrt{\frac{98,1 \cdot 10^3 \cdot (1 \cdot 10^{-2})^2}{\mu_0 \cdot 30^2 \cdot 40 \cdot 10^{-2} \cdot 20 \cdot 10^{-2}}} = 329,3 \text{ A}$$

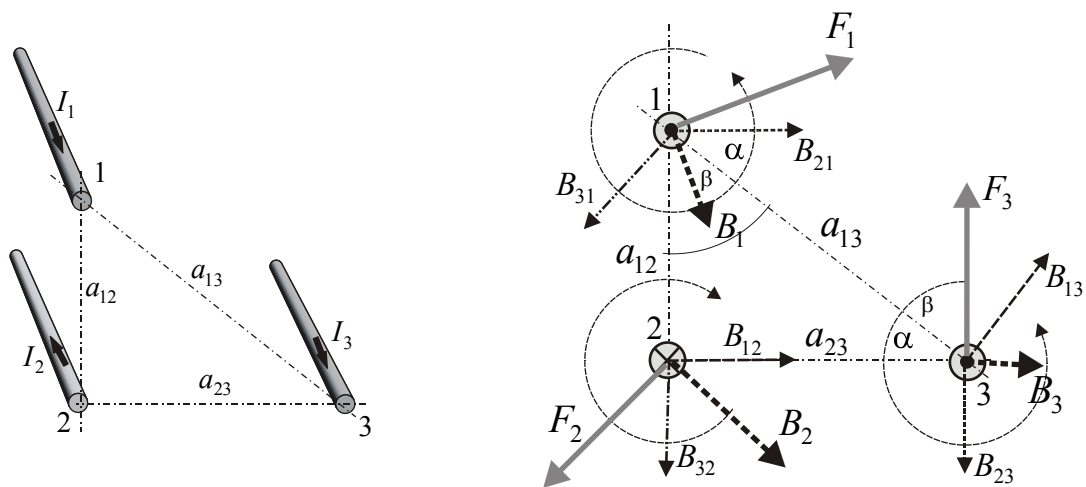
{Př. MG/63} Síla působící na soustavu rovnoběžných vodičů

Jaké síly působí na soustavu rovnoběžných vodičů podle obrázku (Obr. MG-94)?

Navazuje na

{Př. MG/17} Magnetické pole kolem přímého dlouhého tenkého vodiče

{Př. MG/3} Magnetická indukce a síly působící na element délky proudovodičů, pravidlo pravé a levé ruky, pravotočivý šroub



(Obr. MG-94) Síly působící na soustavu rovnoběžných vodičů

Vodič 1 vyvolá v místě vodiče 2 a 3 magnetickou indukci se směrem podle pravidla pravé ruky

$$B_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a_{12}}$$

$$B_{13} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a_{13}}$$

Vodič 2 vyvolá v místě vodiče 1 a 3 magnetickou indukci se směrem podle pravidla pravé ruky

$$B_{21} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a_{12}}$$

$$B_{23} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a_{23}}$$

Vodič 3 vyvolá v místě vodiče 1 a 2 magnetickou indukci se směrem podle pravidla pravé ruky

$$B_{31} = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi a_{13}}$$

$$B_{32} = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi a_{23}}$$

Výsledná magnetická indukce v místě jednoho vodiče by se musela vypočítat vektorovým součtem složek od druhých dvou vodičů. S ohledem na úhly, které spolu svírají spojnice mezi vodiči, je nejjednodušší výpočet výsledné hodnoty indukce a síly na vodič 2 se směry podle obrázku.

$$B_2 = \sqrt{B_{12}^2 + B_{32}^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{I_1}{a_{12}}\right)^2 + \left(\frac{I_3}{a_{23}}\right)^2}$$

Síla na jednotku délky vodiče 2 je kolmá na výslednou indukci B_2 , její smysl je dán pravidlem levé ruky a její velikost je

$$F_2 / l = B_2 I_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{I_1}{a_{12}}\right)^2 + \left(\frac{I_3}{a_{23}}\right)^2}$$

{Př. MG/64} Síly působící na vinutí cívek transformátoru

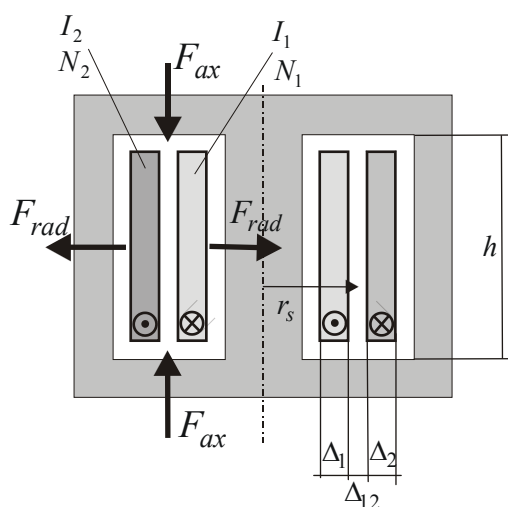
Jak velké síly a v jakém směru budou působit na vinutí transformátoru se symetricky uspořádanými stejně vysokými cívkami podle obrázku (Obr. MG-95)?

Navazuje na

MG-i Síly v magnetickém poli

{Př. MG/55} Rozptylová indukčnost transformátoru

Z energetického hlediska se transformátor chová jako soustava, ve které je akumulována energie magnetického pole o velikosti, která je dána rozptylovou indukčností transformátoru. Pokud jsou cívky transformátoru stejně vysoké a symetrické, je možné tuto indukčnost vypočítat jako v příkladu ({Př. MG/55}).



(Obr. MG-95) Síly působící na vinutí transformátoru

Pro rozptylovou indukčnost vztaženou k závitům primárního vinutí platí vztah

$$L = \frac{\mu_0 2\pi r_s N_1^2}{h} \left(\frac{\Delta_1}{3} + \Delta_{12} + \frac{\Delta_2}{3} \right)$$

Směr a smysl sil lze vystopovat z podmínky, že se soustava snaží zaujmout polohu s co největší indukčností. V tomto případě jsou dvě možnosti. Sníží se výška vinutí, což značí, že na vinutí budou působit axiální síly, které se ho budou snažit stlačit.

Druhá možnost je zvětšení mezery (kanálu) mezi cívkami a rozšíření cívek. Vnitřní vinutí je namáháno celkovou radiální silou, která ho stlačuje k magnetickému obvodu, vnější vinutí je naopak roztahováno a snaží se zvětšit svůj průměr.

Velikost celkové radiální a axiální síly se určí derivací podle příslušné veličiny.

Celková axiální síla derivací podle výšky

$$|F_{ax}| = \left| \frac{1}{2} I_1^2 \frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{\mu_0 2\pi r_s N_1^2}{h} \left(\frac{\Delta_1}{3} + \Delta_{12} + \frac{\Delta_2}{3} \right) \right] \right| = \frac{1}{2} I_1^2 \frac{\mu_0 2\pi r_s N_1^2}{h^2} \left(\frac{\Delta_1}{3} + \Delta_{12} + \frac{\Delta_2}{3} \right)$$

Celková radiální síla derivací podle šířky kanálu mezi vinutími

$$|F_{rad}| = \left| \frac{1}{2} I_1^2 \frac{\partial}{\partial \Delta_{12}} \left[\frac{\mu_0 2\pi r_s N_1^2}{h} \left(\frac{\Delta_1}{3} + \Delta_{12} + \frac{\Delta_2}{3} \right) \right] \right| = \frac{1}{2} I_1^2 \frac{\mu_0 2\pi r_s N_1^2}{h}$$

* Zápis derivací podle příslušných veličin není z formálního matematického hlediska správný, byl použit pro přehlednost a jednoduchost.