I. Úvod

Elektromagnetické pole je silové pole, silové účinky jsou tedy jedním z jeho základních projevů. Zmínky o existenci elektrických a magnetických sil se objevují hluboko v minulosti, podstatný rozvoj nauky o elektřině a magnetizmu nastal však až v 17. a 18. století.
Elektromagnetické jevy jsou svázány se samotnými vlastnostmi hmoty a částic, ze kterých je hmota tvořena. Mezi určitým typem částic můžeme totiž pozorovat specifický druh sil, které se nazývají **elektromagnetické**. V souvislostí s těmito silami hovoříme o existenci **elektromagnetického silového pole**.

Elektrický náboj
Částicím přisuzujeme s ohledem na elektromagnetické silové působení určitou vlastnost tím, když říkáme, že **nesou elektrický náboj**. S ohledem na elektromagnetické působení existují dva základní typy částic a tedy i dva typy náboje. Částice kladně nabité nesoucí **kladný náboj** a částice záporně nabité nesoucí **záporný náboj.** Ke kladně nabitým patří například **proton**, k záporně nabitým **elektron**. Jednotkou elektrického náboje je **Coulomb**. V elektrickém poli se **náboje stejného znaménka odpuzují**, **náboje různých znamének přitahují**.

Elektromagnetické síly se projevují mezi částicemi, které **jsou v klidu**, ale i mezi **částicemi, které jsou v pohybu**. Z hlediska charakteru rozdělujeme síly na **elektrické a magnetické**. **Magnetické síly** se projevují pouze mezi pohybujícími se částicemi.

Vlastnosti náboje
Náboj protonu a elektronu je stejně velký, ale s opačným znaménkem, přisuzujeme mu s ohledem na volbu jednotek velikost $\mathbf{1.6 \cdot 10^{-19}}$ **C**. Tento náboj nazýváme **elementární,** protože předpokládáme, že **již není dále dělitelný. N**ebyly totiž prokázány jiné částice, které by vykazovaly s ohledem na silové působení v elektromagnetickém poli menší velikost náboje. **Náboje nikde nevznikají ani nezanikají**, nabité částice se mohou v rámci určitých hmotných těles **přemísťovat, posouvat, hromadit**. **Elektromagnetické jevy se tak projevují i v makroskopickém měřítku a právě takovými makroskopickými jevy se zabývá makroskopická teorie elektromagnetického pole.** V této teorii již obvykle nedělíme materiál na jednotlivé elektrony a protony, zabýváme se pouze jejich sumárními účinky.
Kladně a záporně nabité těleso
O tělese, které má **přebytek částic s kladným nábojem**, říkáme, že je **kladně nabité.** Těleso s **přebytkem částic se záporných nábojem** nazýváme **záporně nabité**. Mezi takto nabitými tělesy se projevují elektromagnetické síly podobně jako mezi nabitými elementárními částicemi.**Tělesa nabitá nábojem se stejnou polaritou** působí na sebe **odpudivou elektrickou silou**, **nestejně nabitá přitažlivou silou**. Velikost magnetických sil závisí ještě na rychlosti a směru pohybujících se těles.
Volné a vázané náboje
S ohledem na strukturu materiálu můžeme vysledovat dva druhy nábojů – volné a vázané.

Volné náboje se mohou volně přesouvat, hromadit a dokonce přecházet z jednoho tělesa na druhé. Volný náboj je charakteristický pro materiály, které nazýváme **vodiče**. Nositelem volného náboje jsou **valenční elektrony**, které jsou v těchto materiálech velice slabě vázány k jádru, snadno se uvolňují a pohybují se v tělese v podobě pomyslného **elektronového plynu.**

Vázané náboje se mohou pouze **natáčet a posouvat**, nemohou se volně pohybovat. Vznik vázaných nábojů je charakteristický pro dielektrické materiály. Elektrony jsou v tomto případě pevně vázány k jádrům a není možné je odtrhnout, látky však mají schopnost vytvářet **elektrické dipóly - dvojice s kladným a záporným nábojem. Dipóly** vzniknou vzájemným posunutím těžiště kladných a záporných nábojů v atomech nebo molekulách. Elektrické dipóly mohou v materiálech existovat i v neutrálním stavu bez vlivu vnějšího elektrického pole. V neutrálním stavu jsou rozmístěny chaoticky a navenek se neprojevují, v elektrickém poli se natáčejí a posouvají tak, aby účinky vnějšího pole oslabily. U některých materiálů se dipóly v elektrickém poli teprve vytvářejí.
Z makroskopického pohledu se tento posuv a přeskupení nábojů projeví jako **celkový vázaný náboj**, který se objeví na povrchu dielektrika, nebo prostorový vázaný náboj rozložený s určitou hustotou v objemu dielektrického tělesa.

Klasifikace typů elektromagnetických polí

Pro usnadnění studia elektromagnetických jevů je možné v určitých případech sledovat elektrické a magnetické pole odděleně. Nejjednodušší modifikace elektrického pole je pole nepohyblivých nábojů, které nazýváme **elektrostatické pole.**

Elektrické pole nábojů, které se pohybují ustáleným pohybem v podobě **stacionárního elektrického proudu**, nazýváme **stacionárním proudové pole**.

Ve stacionárním proudovém poli se náboje pohybují a proto je splněna též podmínka pro vznik magnetického pole. V tomto případě mluvíme o **stacionárním magnetickém poli**.

V případech, ve kterých se velikost elektrického proudu v závislosti na čase mění, ale změny jsou relativně pomalé, můžeme také sledovat magnetické a elektrické pole odděleně, mluvíme o **kvazistacionárním elektrickém a magnetickém poli.**
V obecném případě vyvolává vždy časová změna elektrického pole magnetické pole a časová změna magnetického pole elektrické pole. Existuje tedy jedno duální pole, pole elektromagnetické, obě složky je nutné sledovat současně. V tomto případě mluvíme o **nestacionárním elektromagnetickém poli**.

II. ES - Elektrostatické pole

Elektrostatické pole je **zvláštním případem** elektrického pole, které je buzeno **nepohyblivými** (statickými) náboji. Na případě elektrostatického pole lze jednoduše demonstrovat řadu důležitých zákonitostí, které platí i obecně.

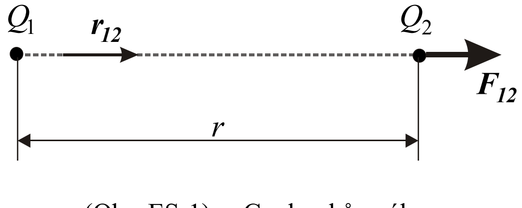
Bodový elektrický náboj
V souvislosti s makroskopickou teorií elektromagnetického pole zavádíme pojem **bodový náboj,** což je určitá abstrakce, pří které mluvíme o **náboji konečné velikosti umístěném na geometricky zanedbatelně velikém tělese.** Velikost tělesa je nutné posuzovat v relaci ke vzdáleností, ve které zkoumáme elektromagnetické účinky náboje. Když budeme zkoumat síly působící v atomu mezi elektrony a protony, bude bodovým nábojem přímo elektron, nebo proton. V některých případech se stejně jako bodový náboj může chovat relativně veliké nabité těleso, když posuzujeme účinky náboje ve velké vzdálenosti.
Zkoumání vlastností bodového náboje v elektrickém poli je z teoretického hlediska velice užitečné, protože libovolné nabité těleso je možno si představit jako souhrn bodových nábojů a výsledné elektrické pole jako součet elektrického pole pomyslných dílčích nábojů.

ES-a Elektrické pole bodového náboje

V této části jsou na příkladech popsány základní vlastnosti bodového náboje a je zde definována **intenzita elektrického pole**. Není potřebné rozlišovat, **zda se jedná o volný nebo vázaný náboj**. Vztahy platí obecně pro všechny druhy nábojů a proto není třeba ani rozlišovat, jestli se jedná o řešení úlohy ve vakuu či v nějakém dielektrickém materiálu.

{Př. ES/1} Elektrická síla působící mezi bodovými náboji – Coulombův zákon

Jak velká síla působí mezi dvěma bodovými náboji o velikosti $\boldsymbol{Q_1}$ a $\boldsymbol{Q_2}$, mezi kterými je vzdálenost $\boldsymbol{r}$ podle obrázku (Obr. ES-1)?



(Obr. ES-1) Coulombův zákon

Dva bodové náboje na sebe působí silou, jejíž velikost udává **Coulombův zákon**. Síla je přímo úměrná velikosti nábojů, nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti. Síla působí ve směru spojnice mezi náboji, smysl je dán polaritou nábojů. Náboje stejného znaménka se odpuzují a rozdílného přitahují. Ve vztahu (ES*1) je smysl síly respektován jednotkovým vektorem $\mathbf{r_{12}}$, který směřuje od náboje $\boldsymbol{Q_1}$ k náboji $\boldsymbol{Q_2}$. .

Při popisu silového působení je možné vycházet z představy, že náboje kolem sebe vytvoří silové elektrické pole, které existuje objektivně bez ohledu na to, zda je v blízkosti jeden nebo několik dalších nábojů, na kterých by se existence pole ověřila pomocí silových účinků. Lze tedy říci, že elektrické pole vybuzené bodovým nábojem $\boldsymbol{Q_1}$ působí na náboj $\boldsymbol{Q_2}$ silou

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\boldsymbol{r}_{12} \qquad [\mathrm{N; C, m^2}] \qquad (\mathrm{ES^*1})$$

Analogicky působí elektrické pole vybuzené nábojem $\boldsymbol{Q_2}$ na náboj $\boldsymbol{Q_1}$ silou, která je stejně veliká, ale má opačný směr

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\boldsymbol{r}_{21}$$

$$|\boldsymbol{F}_{12}| = |\boldsymbol{F}_{21}|$$

Celkový konstantní člen ve vztahu (ES*1) lze vyjádřit takto

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{10^{-7}}{\mu_0\varepsilon_0} = c^2\cdot 10^{-7} = \left(3\cdot 10^8\right)^2\cdot 10^{-7} = 9\cdot 10^9 . \qquad (\mathrm{ES^*2})$$

Konstanta ε_0 se nazývá **permitivita vakua** a má velikost

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\cdot\pi}\cdot 10^{-9} \qquad [\mathrm{F/m}]$$

Jednotka permitivity přímo nesouvisí s velikostí síly ani s velikosti náboje, vyplývá z definice a jednotky kapacity.

Konstanta μ_0 se nazývá **permeabilita vakua** a má velikost:

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7} \qquad [\mathrm{H/m}]$$

Jednotka permeability vakua souvisí s jednotkou indukčnosti.

Konstanta c je rychlost šíření světla ve vakuu

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3\cdot 10^8 \qquad [\mathrm{m/s}]$$

Poznámka

Ze značné číselné hodnoty výsledné konstanty ve vztahu (ES*1) by se mohlo zdát, že elektrické síly nabývají velkých hodnot.Velikost náboje se však často řádově pohybuje v hodnotách kolem $10^{-5} \approx 10^{-7}$C, velikost sil je obvykle nepatrná. Velikost elementárního náboje jednoho elektronu je $-1{,}6.10^{-19}$ C.

{Př. ES/2} Síla působící na bodový náboj v elektrickém poli – definice intenzity

Jak velká síla působí na bodový náboj v elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$ podle obrázku (Obr. ES-2)?

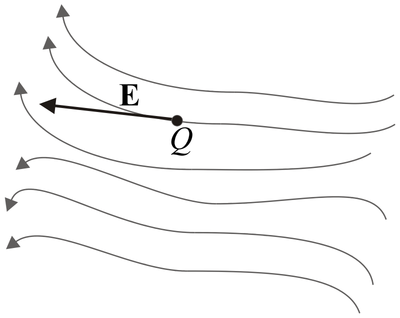
Navazuje na

{Př. ES/1} Elektrická síla působící mezi bodovými náboji

Intenzita elektrického pole je zavedena jako veličina, která popisuje elektrické pole z hlediska silových účinků a je definována obecným vztahem, který udává velikost a směr síly působící na bodový náboj v elektrickém poli

$$\boldsymbol{F} = Q.\boldsymbol{E} \qquad [\mathrm{N; C, V/m}] \qquad (\mathrm{ES^*3})$$

Intenzita elektrického pole je číselně rovna síle, která by působila na kladný jednotkový bodový náboj. Jednotkou intenzity elektrického pole je [V/m]. Tato jednotka nesouvisí přímo se silou, ale s prací, kterou by tato síla vykonala na jednotkové vzdálenosti, tedy s napětím na jednotku délky, protože napětí je práce, kterou pole vykoná přemístěním jednotkového kladného náboje viz {Př. ES/32}.



(Obr. ES-2) Siločáry v elektrickém poli

Intenzita elektrického pole se zobrazuje pomocí linií, které se nazývají **siločáry**.

Vektor intenzity je v každém místě tečný k siločáře. Siločára ukazuje směr, ve kterém by se v elektrickém poli pohyboval jednotkový kladný bodový náboj.

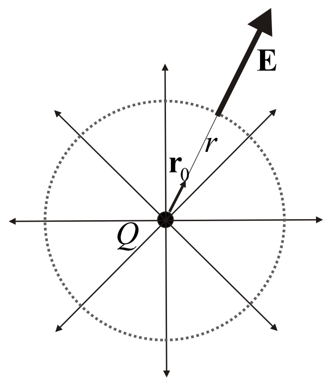
{Př. ES/3} Intenzita elektrického pole buzená bodovým nábojem

Jak velkou intenzitu elektrického pole vybudí ve vzdálenosti ***r*** bodový náboj o velikosti ***Q*** podle obrázku (Obr. ES-3)?

Navazuje na:
{Př. ES/1} Elektrická síla působící mezi bodovými náboji
{Př. ES/2} Síla působící na bodový náboj v elektrickém poli – definice intenzity

Pomyslným rozdělením Coulombova zákona (ES*1) na dvě části dostaneme s ohledem na (ES*3) pro intenzitu elektrického pole buzeného na libovolném poloměru vzdálenosti od bodového náboje ***Q***

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\boldsymbol{r}_0 \qquad \text{[V/m]} \qquad \text{(ES*4)}$$



(Obr. ES-3) Intenzita elektrického pole buzená bodovým nábojem

Absolutní hodnota vektoru intenzity elektrického pole je přímo úměrná velikosti náboje a nepřímo úměrná kvadrátu vzdálenosti od náboje. Ve vzdálenosti o konstantním poloměru ***r*** má tedy konstantní velikost. Směr intenzity elektrického pole je dán jednotkovým vektorem $\boldsymbol{r_0}$ po spojnici od místa, kde je umístěn budící náboj, k místu, ve kterém se určuje velikost pole. Představíme-li si **siločáru elektrického pole** jako pomyslnou linii, ke které jsou vektory intenzity elektrického pole v každém místě tečné, budou se siločáry v tomto případě symetricky a paprskovitě rozbíhat na všechny strany od bodového náboje, jako je tomu na obrázku (Obr. ES-3).

ES-b Chování vodiče v elektrostatickém poli

V elektricky vodivých materiálech, které mají v elektrotechnice zásadní význam, jsou valenční elektrony velmi slabě vázány k atomům, mohou se volně pohybovat, jsou tedy **volnými nosiči náboje.**

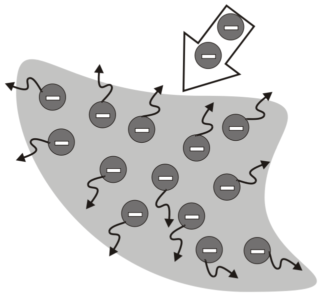
Elektrony se mohou dokonce přemísťovat z jednoho tělesa na druhé, potom mluvíme o tom, že je těleso kladně nebo záporně nabité. U tělesa, které není nabito, elektrony vykonávají chaotický pohyb a jejich záporné náboje jsou v každém místě vyváženy s kladnými náboji atomů s chybějícími valenčními elektrony. Těleso se jeví jako elektricky neutrální.

Na dalších příkladech je ukázáno, co se stane s volnými elektrony v případě, kdy je rovnováha porušena, to znamená tehdy, když je vodič nabit nebo vložen do vnějšího elektrického pole.

{Př. ES/4} Elektrické pole v nabitém vodiči

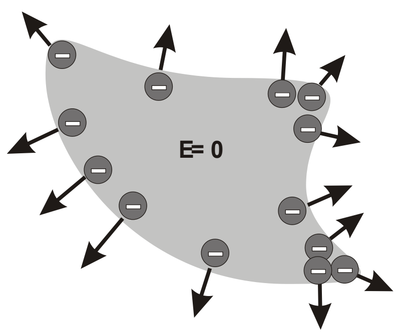
Jak se rozmístí náboje a jaké bude elektrické pole v nabitém vodivém tělese libovolného tvaru?

Navazuje na
{Př. ES/1} Elektrická síla působící mezi bodovými náboji



(Obr. ES-4) Vodivé těleso po nabití

Při nabití tělesa je část elektronů odebrána, nebo naopak přidána. V tomto případě hovoříme o nabití tělesa **kladným nebo záporným nábojem**. Na obrázku (Obr. ES-4) je vodivé těleso po nabití záporným nábojem.



(Obr. ES-5) Nabité vodivé těleso v ustáleném stavu

Volné náboje se dají vlivem odpudivých sil do pohybu a během krátké chvíle se uspořádají a rozmístí na povrchu tělesa tak (Obr. ES-5), aby na ně působily pouze vzájemné síly směřující kolmo vně z tělesa. **Siločáry intenzity elektrického pole vně nabitého tělesa tedy směřují kolmo k povrchu.** Kdyby to tak nebylo a existovala by ještě tečná složka intenzity elektrického pole v nabitém tělese, elektrony by se musely dál pohybovat, nejednalo by se o ustálený stav.

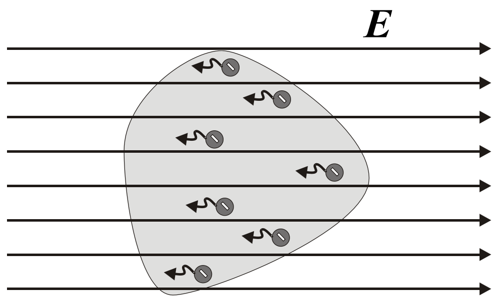
V elektrostatickém poli se v ustáleném stavu již žádné nosiče náboje nepohybují, to odpovídá **nulové intenzitě pole ve vlastním vodivém tělese**.

{Př. ES/5} Vodivé těleso vložené do elektrického pole

Jak se rozloží elektrické náboje a jaká bude intenzita elektrického pole po vložení vodivého tělesa libovolného tvaru do vnějšího elektrostatického pole s intenzitou ***E*** podle obrázku (Obr. ES-6)?

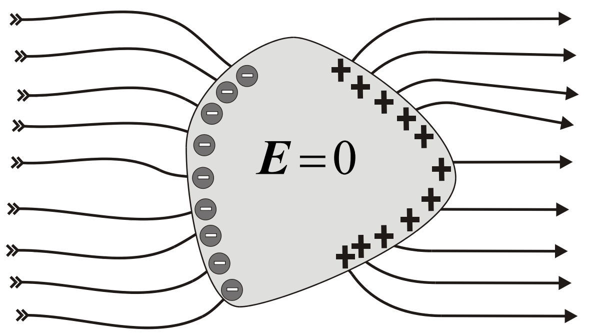
Navazuje na:
{Př. ES/4} Elektrické pole v nabitém vodiči

Vodivé těleso se bez přítomnosti vnějšího elektrického pole jeví jako neutrální. Záporný náboj volně pohyblivých elektronů je v každém místě vyvážen kladným nábojem jader atomů.



(Obr. ES-6) Vodivé těleso krátce po vložení do elektrického pole

Vložíme-li vodivé těleso do elektrického pole, které je v každém bodě jednoznačně popsáno vektorem intenzity elektrického pole (například homogenní pole jako na obrázku (Obr. ES-6)), dojde k pohybu volných elektronů proti směru elektrického pole.



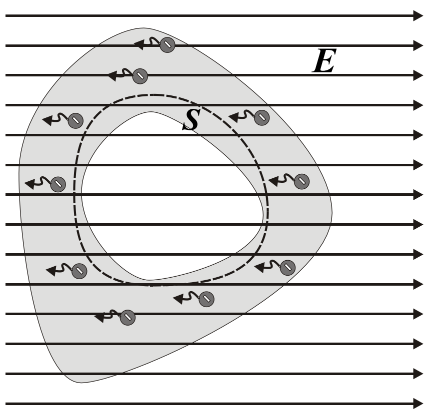
(Obr. ES-7) Vodivé těleso po vložení do elektrického pole v ustáleném stavu

Elektrony se záporným nábojem se usadí na jedné straně tělesa, na druhé straně po nich zbude kladný náboj. Elektrony se budou pohybovat tak dlouho, dokud nebude v tělese nulová intenzita elektrického pole. To nastane tehdy, až si nově rozmístěné náboje vytvoří vlastní elektrické pole, které bude v rovnováze s původním vnějším polem. Intenzita elektrického pole rozmístěných elektronů se superponuje na intenzitu původního pole, siločáry pole vně tělesa jsou deformovány a vtaženy kolmo do tělesa jako na obrázku (Obr. ES-7). Intenzita elektrického pole na povrchu tělesa musí vstupovat nebo vystupovat kolmo. Jedině v tomto případě nebudou již na elektrony působit síly, které by jimi v rámci tělesa pohybovaly.

{Př. ES/6} Pole v dutině vodiče vloženého do elektrického pole

Jak se rozmístí náboje po vložení vodiče s dutinou do elektrostatického pole? Jaká bude intenzita elektrického pole ve vodiči a v dutině?

Navazuje na:
{Př. ES/5} Vodivé těleso vložené do elektrického pole
ES-d Gaussova věta pro intenzitu elektrického pole



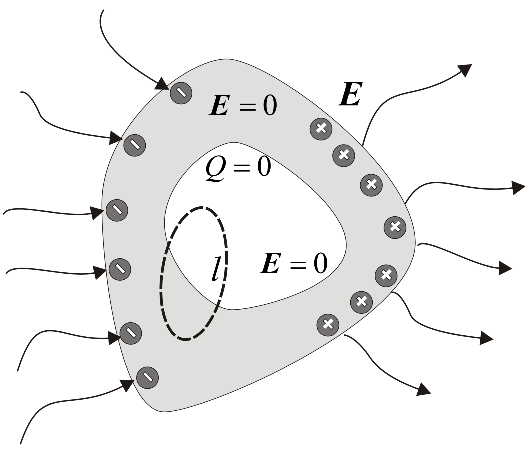
(Obr. ES-8) Vodič s dutinou po vložení do elektrostatického pole

Volné elektrony ve vodiči se přemístí tak, aby eliminovaly vnější elektrické pole. Výsledná intenzita elektrického pole ve vodiči musí být v ustáleném stavu nulová, na žádné další elektrony nepůsobí síly, náboje se již nikam dál nepřemísťují. Zvolíme-li myšlenou obalovou plochu pro integraci uvnitř vodiče podle obrázku (Obr. ES-8), musí být velikost integrálu podle Gaussovy věty (ES*11) nulová a tedy i nulový součtový náboj uvnitř plochy

$$\boldsymbol{E} = 0 \;\Rightarrow\; \oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; Q = 0\,.$$

Musí to platit i tehdy, když uzavřeme obalovou plochu těsně kolem vnitřní dutiny. Tato podmínka bude formálně splněna buď tak, že na stěně vnitřní dutiny nebude žádný náboj, nebo by tam mohl být stejně veliký kladný a záporný náboj.

Druhá alternativa se však dá vyloučit touto úvahou. Kdyby byl na stěnách dutiny stejně veliký kladný i záporný náboj, musely by dutinu protínat siločáry elektrického pole od kladného k zápornému náboji, elektrické pole by potom muselo být v dutině nenulové.



(Obr. ES-9) Vodič s dutinou v elektrostatickém poli – ustálený stav

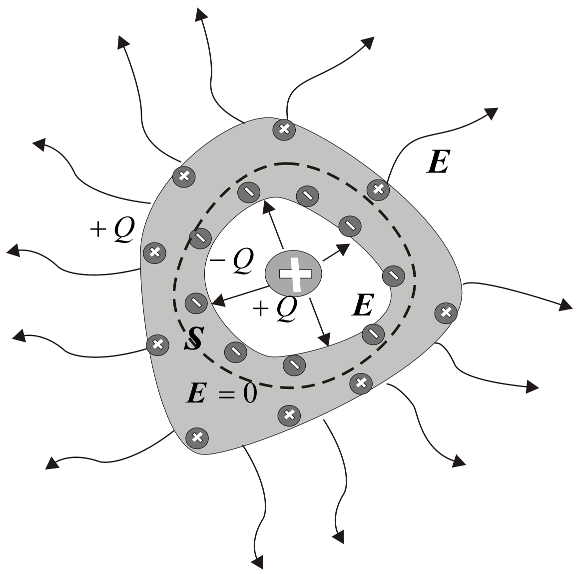
Když bychom nyní vytýčili uzavřenou dráhu podle obrázku (Obr. ES-9), která by dílem procházela podél siločáry dutinou vodiče a dílem vlastním vodičem, ve kterém je pole nulové, dostali bychom se do sporu s podmínkou potenciálovosti elektrostatického pole, podle které musí být integrál intenzity elektrického pole po uzavřené dráze vždy nulový.

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \overset{!}{=} 0$$

{Př. ES/7} Náboj vložený do dutiny vodivého tělesa

Jaké elektrické pole vybudí náboj vložený do dutiny vodivého tělesa? Jak se rozdělí náboj na vodiči?

Navazuje na:
{Př. ES/4} Elektrické pole v nabitém vodiči
{Př. ES/5} Vodivé těleso vložené do elektrického pole
{Př. ES/6} Pole v dutině vodiče vloženého do elektrického pole
ES-d Gaussova věta pro intenzitu elektrického pole



(Obr. ES-10) Náboj vložený do dutiny vodiče

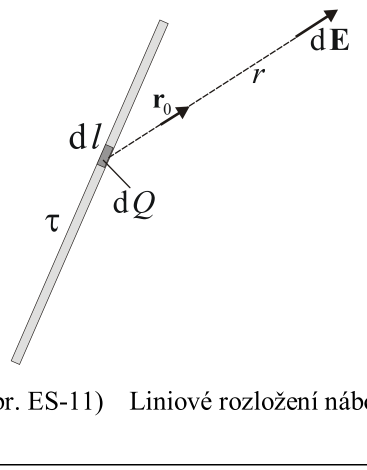
Výsledná intenzita elektrického pole ve vodiči musí být v ustáleném stavu nulová, na žádné další elektrony nepůsobí síly, náboje se již nikam dál nepřemísťují. Aby mohla být tato podmínka splněna, musí se na vnitřní ploše dutiny rozmístit podle Gaussovy věty stejně velký náboj jako náboj vložený do dutiny, ale s opačným znaménkem. V našem případě se tam nahromadí elektrony se záporným nábojem

$$\boldsymbol{E} = 0 \;\Rightarrow\; \oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{+Q-Q}{\varepsilon_0} = 0$$

Na vnějším povrchu tělesa, ze kterého se elektrony odsunuly, vznikne stejně veliký kladný náboj, jako byl vložen dovnitř dutiny. Intenzita elektrického pole na vnějšku i v dutině vodivého tělesa bude nenulová, bude dána velikostí a rozmístěním nábojů vložených v dutině a rozmístěním indukovaných nábojů na povrchu tělesa.

ES-c Superpozice pole bodových nábojů

Známe-li vztah pro velikost elektrického pole, které vybudí **bodový náboj**, stačilo by pomyslně rozdělit nabité těleso na dílčí bodové náboje a výsledné pole získat **sečtením polí těchto nábojů**. Takový postup je ovšem možný pouze v některých speciálních případech. Problém je v tom, že u reálných nabitých těles obvykle nevíme, jak je náboj na tělese skutečně rozložen a navíc se mohou v řešené úloze vyskytovat kromě volných budících nábojů ještě sekundárně vytvořené vázané náboje v dielektrických materiálech, či indukované volné náboje na vložených vodivých materiálech podobně jako na vodiči s dutinou v {Př. ES/7}. I tyto náboje by se musely do celkových účinků započítat, protože by měly zásadní vliv na tvar a velikost výsledného elektrického pole.
Přímou superpozicí lze tedy počítat elektrické pole nábojů, jejichž rozložení známe, což je pouze ve velmi omezeném počtu případů. I tak se však vyplatí se tímto problémem z teoretického hlediska zabývat.
Podle toho zda je náboj rozložen na určité ploše, v objemu či podél nějaké linie, zavádíme následující pomocné veličiny:



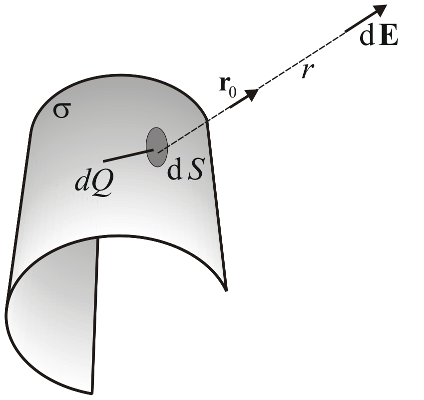
(Obr. ES-11) Liniové rozložení náboje

Liniová hustota náboje τ - náboj připadající na jednotku délky. Jako bodový náboj si můžeme představit náboj na elementu délky

$$\mathrm{d}Q = \tau \cdot \mathrm{d}l$$

Pro intenzitu elektrického pole jako součet pole pomyslných bodových nábojů by s ohledem na (ES*4) platilo

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\tau}{r^2}\,\mathrm{d}l\,\boldsymbol{r}_0$$



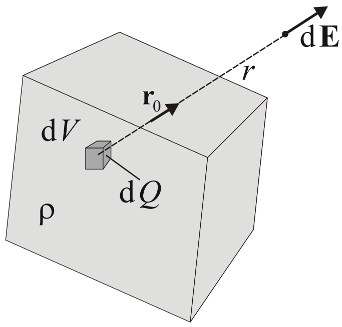
(Obr. ES-12) Náboj rozložený na ploše

Zavedeme-li pojem **plošná hustota náboje** $\boldsymbol{\sigma}$ jako náboj na jednotku plochy, můžeme si jako bodový náboj představit náboj na elementu plochy

$$\mathrm{d}Q = \sigma \cdot \mathrm{d}S$$

Pro intenzitu elektrického pole jako součet pole pomyslných bodových nábojů by s ohledem na (ES*4) i zde platilo

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma}{r^2} \,\mathrm{d}S \,\boldsymbol{r}_0$$



(Obr. ES-13) Náboj rozložený v objemu

Zavedeme-li pojem **objemová hustota náboje** $\boldsymbol{\rho}$ jako náboj v jednotce objemu, můžeme si jako bodový náboj představit náboj v elementu objemu

$$\mathrm{d}Q = \rho \cdot \mathrm{d}V$$

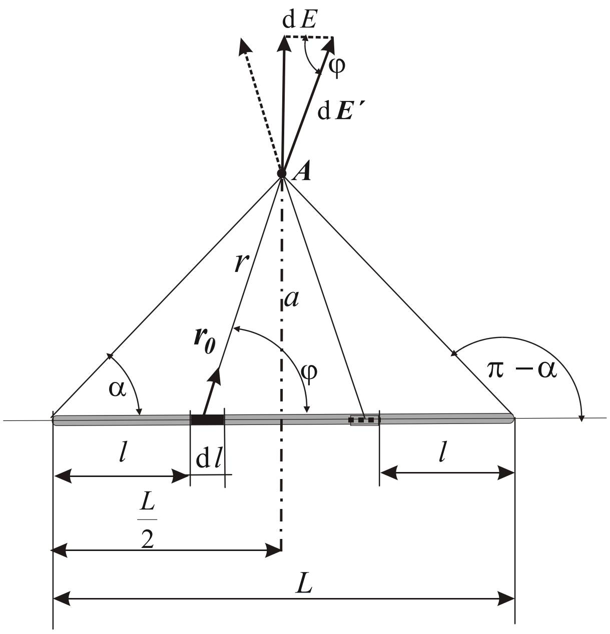
Pro intenzitu elektrického pole jako součet pole pomyslných bodových nábojů by s ohledem na (ES*4) platilo

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho}{r^2} \,\mathrm{d}V \,\boldsymbol{r}_0$$

{Př. ES/8} Elektrické pole buzené na příčné ose úseku nabitého tenkého vodiče

Vodič na (Obr. ES-14) o délce $\boldsymbol{L}$ je rovnoměrně nabit nábojem s liniovou hustotou $\boldsymbol{\tau}$ a umístěn ve vakuu. Jaký bude směr a velikost intenzity elektrického pole na příčné ose vodiče v bodě $\boldsymbol{A}$, který je ve vzdálenosti $\boldsymbol{a}$?

Navazuje na:
{Př. ES/3} Intenzita elektrického pole buzená bodovým nábojem



(Obr. ES-14) Elektrické pole buzené úsekem tenkého nabitého vodiče

Vodič na obrázku je možno pomyslně rozdělit na dílčí elementy o délce **d*l*** a na každý z nich hledět jako na bodový elektrický náboj o velikosti

$$\mathrm{d}Q = \tau \cdot \mathrm{d}l$$

Tento bodový náboj vybudí na ose ve vzdálenosti $\boldsymbol{a}$ intenzitu elektrického pole, jejíž směr půjde po spojnici od daného elementu vodiče k bodu $\boldsymbol{A}$, ve kterém elektrické pole počítáme. Její velikost bude podle {Př. ES/3}

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}' = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \boldsymbol{r}_0 = \frac{\tau \cdot \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \boldsymbol{r}_0$$

Vodič je symetrický vzhledem k příčné ose, ke každému elementu na levé straně od osy najdeme na pravé straně zcela stejný element, který vybudí intenzitu stejně velikou, ale s opačnou orientací. Složky intenzity elektrického pole v podélném směru se odečtou. **Výsledný směr intenzity bude tedy kolmý k nabitému vodiči**, pro výpočet absolutní hodnoty stačí sčítat pouze průměty vektoru do příčné osy. Pro velikost intenzity elektrického pole, která je buzena na ose elementem vodiče **d*l***, bude platit

$$\mathrm{d}E = |\mathrm{d}\boldsymbol{E}'| \cdot \sin(\varphi) = \frac{\tau \cdot \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin(\varphi)$$

Výslednou velikost intenzity získáme sečtením příspěvků od všech elementů po délce vodiče

$$E = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{l=0}^{l=L} \frac{1}{r^2} \sin(\varphi)\,\mathrm{d}l$$

V integrálu se vyskytují tři proměnné veličiny: r, φ, dl, které je nutno převést vhodnou substitucí na jednu veličinu, z hlediska snadné integrace je nejlepší volit úhel φ.

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{a}{\frac{L}{2} - l} \qquad \frac{L}{2} - l = a \cdot \mathrm{cotg}(\varphi) \qquad \mathrm{d}l = \frac{a}{\sin^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi$$

$$\sin(\varphi) = \frac{a}{r} \qquad \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2(\varphi)}{a^2}$$

Meze integrace

$$l = 0 \rightarrow \varphi = \alpha \qquad l = L \rightarrow \varphi = \pi - \alpha$$

Po dosazení

$$E = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\sin^2(\varphi)}{a^2} \sin(\varphi) \frac{a}{\sin^2(\varphi)} \mathrm{d}\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a} \Big| -\cos(\varphi) \Big|_{\alpha}^{\pi-\alpha} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a} \cos(\alpha) \qquad \text{(ES*5)}$$

Úhel α lze vyjádřit pomocí zadaných rozměrů na obrázku

$$\cos(\alpha) = \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + a^2}}$$

Výsledný vztah pro velikost intenzity elektrického pole v bodě A potom bude

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a} \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + a^2}} \qquad \text{(ES*6)}$$

{Př. ES/9} Elektrické pole nad nekonečně dlouhým nabitým vodivým vláknem

Jak velká je intenzita elektrického pole ve vzdálenosti ***a*** od nekonečně dlouhého, tenkého, rovnoměrně nabitého vodiče ve vakuu?

Navazuje na:
{Př. ES/8} Elektrické pole buzené na příčné ose úseku nabitého tenkého vodiče

Pro určení velikosti intenzity elektrického pole je možné použit výsledků platných pro úsek vodiče s konečnou délkou ***L*** podle {Př. ES/8}. Intenzita elektrického pole úseku vodiče je

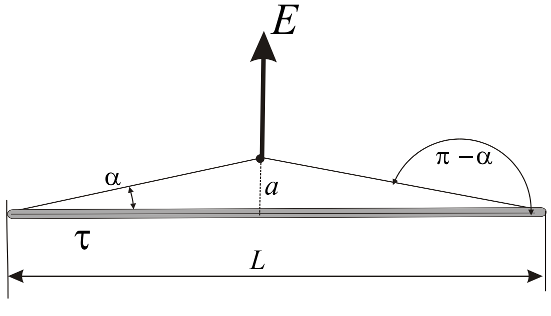
$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a} \cos(\alpha)$$

Pro vodič hodně dlouhý bude úhel α limitovat k nule

$$L \rightarrow \infty \quad , \quad \alpha \rightarrow 0$$

a bude platit

$$E = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a} \cos(\alpha) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a} \qquad \text{(ES*7)}$$



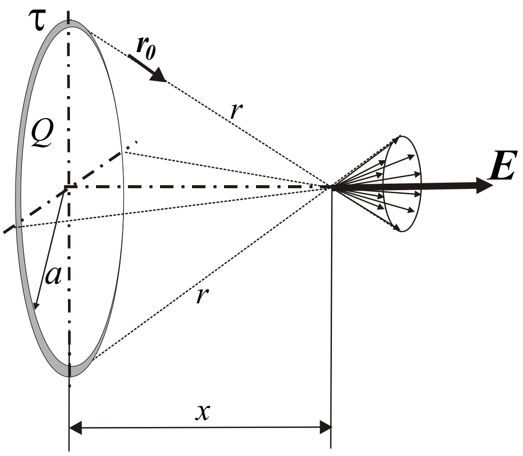
(Obr. ES-15) Elektrické pole dlouhého tenkého vodiče

V příkladu {Př. ES/19} bude stejná úloha vyřešena jednoduše přímou aplikací Gaussovy věty.

{Př. ES/10} Elektrické pole na ose tenkého nabitého prstence

Jak velká hodnota intenzity elektrického pole bude ve vzdálenosti $\boldsymbol{x}$ na ose tenkého vodivého prstence o poloměru $\boldsymbol{a}$ podle obrázku (Obr. ES-16)? Prstenec je rovnoměrně nabit celkovým nábojem $\boldsymbol{Q}$ a umístěn ve vakuu.

Navazuje na:
{Př. ES/8} Elektrické pole buzené na příčné ose úseku nabitého tenkého vodiče
{Př. ES/9} Elektrické pole nad nekonečně dlouhým nabitým vodivým vláknem



(Obr. ES-16) Elektrické pole na ose prstence

Je-li prstenec nabit celkovým nábojem Q, připadne na jednotku délky na obvodu prstence náboj

$$\tau = \frac{Q}{2\pi a}$$

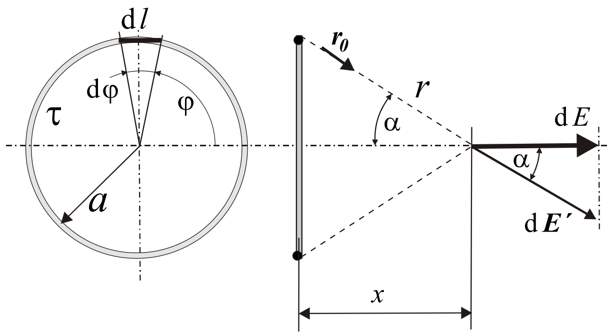
Vytkneme-li na obvodu prstence element o délce $\mathbf{d}\boldsymbol{l}$, bude na něm náboj o velikosti

$$\mathrm{d}Q = \tau\ \mathrm{d}l = \tau\, a\, \mathrm{d}\varphi$$

Tento náboj vybudí ve vzdálenosti $\boldsymbol{x}$ intenzitu elektrického pole

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}'(x) = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{\tau\cdot\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\boldsymbol{r_0}$$

jejíž směr jde po spojnici elementu a místa, ve kterém pole počítáme.



(Obr. ES-17) Výpočet elektrického pole na ose prstence

Při výpočtu celkové intenzity elektrického pole v místě o vzdálenosti $\boldsymbol{x}$ je třeba sečíst příspěvky všech elementů. Elementy jsou symetricky rozmístěny po obvodě kruhu, odpovídající vektory intenzity elektrického pole budou ležet na povrchu kužele, který je vyznačen na obrázku (Obr. ES-16). Při celkovém součtu se uplatní pouze složka ve směru osy prstence, normálová složka intenzity elektrického pole dvojice symetrických elementů se navzájem vyruší.

Výsledná intenzita elektrického pole v bodě o vzdálenosti x bude mít tedy pouze osový směr, její velikost je možno určit integrací

$$E(x) = \int_l \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos(\alpha)\,\mathrm{d}l = \frac{\tau}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(\frac{x}{r}\right)\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} a\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}\frac{a\,x}{r^3} =$$

$$= \frac{\tau}{2\varepsilon_0}\frac{a.x}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{2\pi\, a}\frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{a.x}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{(ES*8)}$$

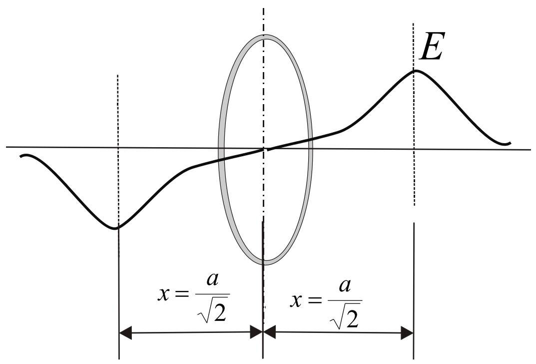
Intenzita elektrického pole uprostřed prstence bude

$$E(x=0) = 0$$

Ve velké vzdálenosti od prstence intenzita elektrického pole vymizí

$$E(x\to\infty) = 0$$

Místo, ve kterém je intenzita elektrického pole největší, lze najít pomocí extrému funkce pro intenzitu elektrického pole.



(Obr. ES-18) Průběh intenzity elektrického pole na ose nabitého prstence

Po derivaci ve vztahu (ES*8)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\cdot\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]=0$$

$$\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}+x\left(-\frac{3}{2}\right)\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x=0$$

$$a^2+x^2=3x^2$$

platí pro místa, ve kterých má intenzita elektrického pole maximum

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

{Př. ES/11} Elektrické pole na ose nabitého prstence-číselný příklad

Vypočteme intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti **x=50cm** na ose tenkého prstence o poloměru **a=1 m**, nabitého nábojem **Q=10 µC.** (Obr. ES-16), (Obr. ES-17).

Navazuje na
{Př. ES/10} Elektrické pole na ose tenkého nabitého prstence

Výsledná intenzita elektrického pole bude mít na ose x pouze osový směr s velikostí danou vztahem (ES*8)

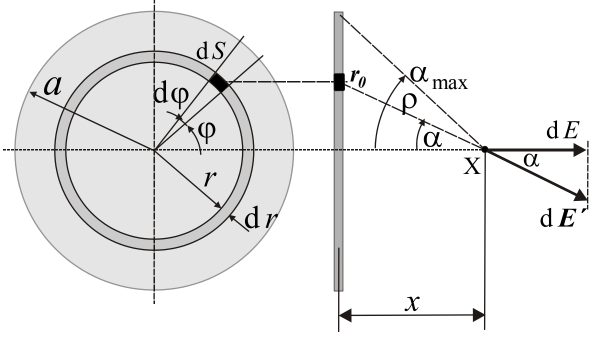
$$\mathrm{E}(x)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{10\cdot10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{50\cdot10^{-2}}{\left(1^2+\left(50\cdot10^{-2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=32{,}15\ \frac{kV}{m}$$

{Př. ES/12} Elektrické pole na ose rovnoměrně nabitého disku

Tenký elektricky vodivý disk o poloměru ***a*** podle obrázku (Obr. ES-19) je umístěn ve vakuu a rovnoměrně nabit elektrickým nábojem s plošnou hustotou $\boldsymbol{\sigma}$. Jak velká je intenzita elektrického pole v bodě ***X***, který je ve vzdálenosti ***x*** na příčné ose disku?

Poznámka:
Navazuje na příklad 2/ES : intenzita elektrického pole buzená bodovým nábojem.

Pozn. Ve skutečnosti nelze předpokládat, že by se náboj na takovémto tenkém disku rozložil rovnoměrně. Na okrajích by zcela jistě byla větší hustota náboje, než uprostřed.



(Obr. ES-19) Výpočet intenzity elektrického pole na ose tenkého nabitého disku

Vytkneme-li na ploše nabitého disku element o velikosti

$$\mathrm{d}S=r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

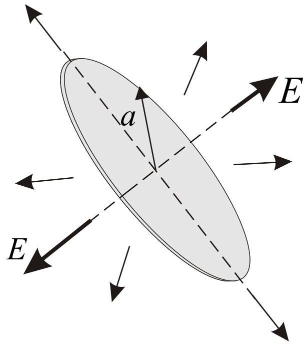
bude na něm náboj o velikosti

$$\mathrm{d}Q=\sigma\cdot\mathrm{d}S=\sigma\,r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

Tento náboj vyvolá v bodě ***X*** na ose disku ve vzdálenosti x intenzitu elektrického pole

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}'=\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho^2}\cdot\boldsymbol{r_0}=\frac{\sigma\,r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho^2}\cdot\boldsymbol{r_0}$$

jejíž směr je orientován po spojnici od elementu plochy k bodu ***X***.



(Obr. ES-20) Směr elektrického pole v okolí tenkého nabitého disku

Sečteme-li elektrické pole všech elementů po celé ploše disku, zjistíme, že ke každému existuje ve vztahu k ose symetrický element. Podobně jako v {Př. ES/10} se uplatní pouze složka elektrického pole v osovém směru, která bude mít velikost

$$\mathrm{d}E = |\mathrm{d}\boldsymbol{E}'|\cos\alpha = \frac{\sigma \cdot r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{\rho^2}\cos\alpha\,.$$

Celkovou intenzitu elektrického pole získáme sečtením pole všech elementů - integrací po ploše disku

$$E = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{r=0}^{r=a}\frac{\sigma\, r}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{\rho^2}\cos\alpha\cdot\mathrm{d}r\cdot\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_{r=0}^{r=a}\frac{\sigma\, r}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{\rho^2}\cos\alpha\cdot\mathrm{d}r$$

V naznačeném integrálu se vyskytují tři proměnné veličiny: r, ρ, α , které je nutno převést substitucí na jednu veličinu, z hlediska snadné integrace je nejlepší zvolit úhel α.

Vyjádření pro r $\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{r}{x} \quad r = x\cdot\tan\alpha \quad \mathrm{d}r = \frac{x}{\cos^2\alpha}\mathrm{d}\alpha$

Člen $\frac{1}{\rho^2}$ $\quad \cos\alpha = \frac{x}{\rho} \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\alpha}{x^2}$

Meze integrace $\quad r = 0 \rightarrow \alpha = 0 \quad r = a \rightarrow \alpha = \alpha_{\max}$

Velikost výsledné intenzity elektrického pole v bodě X bude po dosazení:

$$E(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{r=0}^{r=a} r\cdot\frac{1}{\rho^2}\cos\alpha\cdot\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{\alpha=0}^{\alpha_{\max}} x\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\frac{\cos^2\alpha}{x^2}\cos\alpha\cdot\frac{x}{\cos^2\alpha}\mathrm{d}\alpha =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{\alpha=0}^{\alpha_{\max}}\sin\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha_{\max}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right] \qquad \text{(ES*9)}$$

{Př. ES/13} Elektrické pole na ose tenkého nabitého vodivého disku - číselný příklad

Vypočteme intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti **x=50 cm** na ose tenkého elektricky vodivého disku podle obrázku (Obr. ES-19), (Obr. ES-20). Disk má poloměr **a=1 m,** je umístěn ve vzduchu a nabit nábojem **Q=10 μC**

Navazuje na
{Př. ES/10} Elektrické pole na ose tenkého nabitého prstence
{Př. ES/12} Elektrické pole na ose rovnoměrně nabitého disku

Plošná hustota náboje na disku **σ** bude: $\quad \sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi\, a^2} = \frac{10\cdot 10^{-6}}{\pi\cdot 1} = 3{,}18\ \frac{\mu C}{m^2}$

Po dosazení do (ES*9)

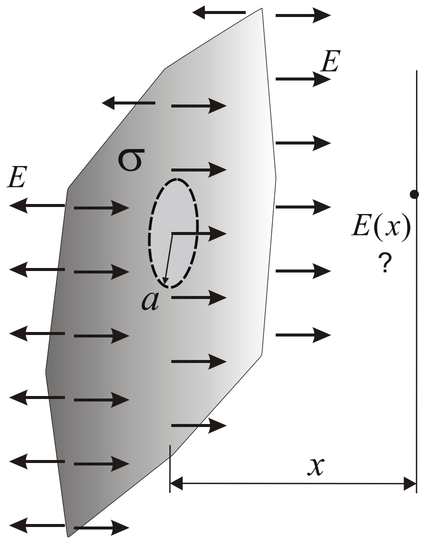
$$\mathrm{E}(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right] = \frac{3.18\cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{50\cdot 10^{-2}}{\sqrt{1^2+\left(50\cdot 10^{-2}\right)^2}}\right] = 99{,}27\,\frac{kV}{m}$$

Oproti intenzitě buzené prstencem {Př. ES/10} je v případě kruhové desky o stejném poloměru a náboji výsledná hodnota intenzity v dané vzdálenosti cca 3x větší. Jedná se však pouze o ilustrativní úlohu, ve skutečnosti by se náboj nerozložil na celé ploše desky se stejnou hustotou.

{Př. ES/14} Elektrické pole nad nabitou rozlehlou rovinou

Nekonečně rozlehlá vodivá rovina ve vakuu podle obrázku (Obr. ES-21) je rovnoměrně nabita elektrickým nábojem o povrchové hustotě $\boldsymbol{\sigma}$. Jak velké elektrické pole je ve vzdálenosti $\boldsymbol{x}$ od roviny?

Navazuje na:
{Př. ES/12} Elektrické pole na ose rovnoměrně nabitého disku



(Obr. ES-21) Elektrické pole rovnoměrně nabité rozlehlé roviny

Pro výpočet elektrického pole v okolí nekonečně rozlehlé nabité roviny lze použít výsledků z příkladu {Př. ES/12}, ve kterém bylo vypočteno elektrické pole ve vzdálenosti $\boldsymbol{x}$ na ose rovnoměrně nabitého disku. Necháme-li limitně růst poloměr disku ve vztahu (ES*9) nade všechny meze a budeme-li předpokládat, že $\boldsymbol{x}$ je podstatně menší než $\boldsymbol{a}$, musíme obdržet stejný výsledek jako při výpočtu pole nekonečně rozlehlé roviny.

$$E(x)=\lim_{a\to\infty}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\neq f(x)=konst$$

Intenzita elektrického pole vybuzená v okolí rozlehlé rovnoměrně nabité roviny je konstantní a nezávislá na vzdálenosti od roviny. Směr intenzity je v každé místě kolmý na rovinu a vystupuje rovnoměrně na obě strany roviny.

Poznámka:
V příkladu {Př. ES/21} bude stejný problém jednoduše řešen aplikací Gaussovy věty.

{Př. ES/15} Elektrické pole nad nabitou rozlehlou rovinou - číselný příklad

Při jakém minimálním poloměru $\boldsymbol{a}$ kruhové desky podle obrázku (Obr. ES-19), (Obr. ES-20) bude chyba výpočtu intenzity elektrického pole ve srovnání se vztahem pro nekonečnou vodivou rovinu (Obr. ES-21) menší než 10 %? Vzdálenost pro výpočet intenzity uvažujme ***x=50 cm***.,

Navazuje na
{Př. ES/12} Elektrické pole na ose rovnoměrně nabitého disku
{Př. ES/14} Elektrické pole nad nabitou rozlehlou rovinou

Vztah pro intenzitu nad nabitým vodivým diskem konečných rozměrů viz {Př. ES/12}

$$\mathrm{E}(x)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]$$

podle {Př. ES/14} limitně přechází pro nekonečně rozlehlou rovinu na

$$\mathrm{E}(x)=\lim_{a\to\infty}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Platí tedy

$$\frac{\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]}{\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}}<0{,}1$$

a postupnými úpravami dostaneme

$$a>\sqrt{\frac{x^2}{0.9^2}-x^2}=0{,}242\,m$$

ES-d Gaussova věta pro intenzitu elektrického pole

Podle Gaussovy věty je **tok vektoru intenzity elektrického pole** myšlenou uzavřenou plochou roven celkovému náboji, který je v této ploše obsažen, dělenému permitivitou vakua. Nezáleží na tom, zda se jedná o jeden nebo několik bodových nábojů, náboj spojitě rozložený na nějaké linii, ploše či v objemu. Nezáleží ani na tom, zda se jedná o náboj **volný či vázaný**. Zapíšeme-li Gaussovu větu pro intenzitu elektrického pole, bude platit:

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q_{cel}}{\varepsilon_0} = \frac{Q + Q_v}{\varepsilon_0} \qquad \text{(ES*10)}$$

$\boldsymbol{Q_{\mathrm{cel}}}$ značí v tomto případě celkový náboj a ten je obecně dán součtem volného a vázaného náboje.Volný náboj je nesen volně pohyblivými nosiči náboje, kterými jsou například elektrony ve vodičích. Vázaný náboj v objemu a na povrchu dielektrika je důsledkem jevu, který se nazývá **polarizace a** je makroskopickým projevem existence **elektrických dipólů**. Při řešení úloh ve vakuu existují pouze volné náboje, které jsou zdrojem elektrického pole, a platí:

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{(ES*11)}$$

Gaussovu větu lze využít v případech, kdy dokážeme jednoduše řešit definiční integrál. To je možné tehdy, když známe tvar pole, ale neznáme jeho velikost. Když **dokážeme vymezit myšlenou uzavřenou obalovou plochu tak, aby procházela místem, kde budeme určovat intenzitu elektrického pole, intenzita elektrického pole bude na této ploše konstantní a siločáry elektrického pole navíc k této ploše kolmé, p**otom se při integraci zbavíme jak skalárního součinu, tak i vlastní složité integrace a bude platit

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_S E \cdot \mathrm{d}S = E \cdot S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{(ES*12)}$$

Intenzitu elektrického pole je potom možné vypočítat jako prostý podíl náboje uzavřeného do obalové plochy a velikosti obalové plochy v daném místě

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \qquad \text{(ES*13)}$$

Podobný výpočet je možný pouze v některých speciálních případech, mezi které patří například **výpočet elektrického pole kulových, válcových či rovinných elektrod**. Jsou to však případy, které jsou z praktického hlediska poměrně důležité. Gaussova věta se hodí i pro některé teoretické úvahy, my jsme ji použili již při vyšetřovaní elektrického pole ve vodičích, které je v příkladech {Př. ES/6}, {Př. ES/7}.

{Př. ES/16} Gaussova věta použitá pro bodový náboj ve vakuu

Ukažme platnost Gaussovy věty v případě že:

a) bodový náboj leží uprostřed myšlené sférické obalové plochy

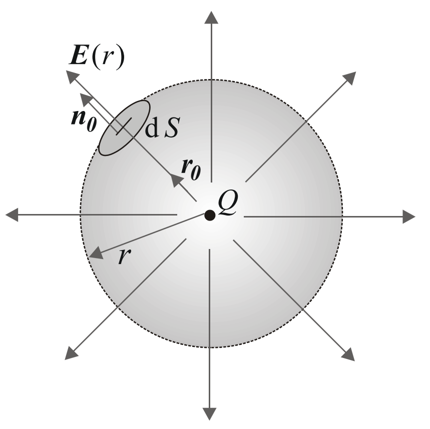
b) bodový náboj leží uvnitř myšlené obalové plochy obecného tvaru

c) siločáry elektrického pole protínají myšlenou obalovou plochu na několika místech

d) bodový náboj leží vně obalové plochy

Navazuje na:

{Př. ES/3} Intenzita elektrického pole buzená bodovým nábojem



(Obr. ES-22) Gaussova věta - sférická obalová plocha

a) Bodový náboj leží uprostřed sférické obalové plochy

Zvolíme-li kolem bodového náboje pomyslnou sférickou obalovou plochu s poloměrem $\boldsymbol{r}$ podle obrázku (Obr. ES-22), platí pro intenzitu elektrického pole na celé této ploše vztah s ohledem na {Př. ES/3}

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \boldsymbol{r}_0$$

Velikost obalové plochy (povrch koule) je

$$S = 4\pi \cdot r^2$$

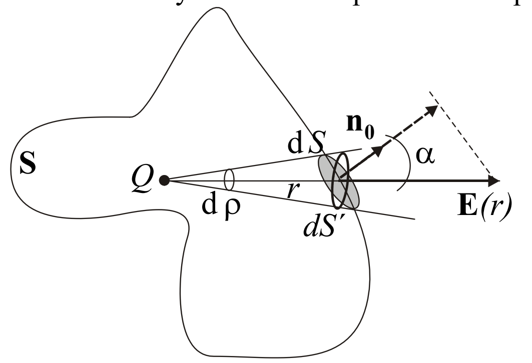
Intenzita elektrického pole má na této ploše konstantní velikost a její směr je všude kolmý na plochu. Ve vakuu se žádné vázané náboje nevyskytují a pro integrál z Gaussovy věty bude platit s ohledem na skalární součin ve vztahu

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint\!\!\!\oint_S |\boldsymbol{E}||\mathrm{d}\boldsymbol{S}|\,\boldsymbol{r_0}\,\boldsymbol{n_0} = \oint\!\!\!\oint_S E\cdot \mathrm{d}S = E.S = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}}_{E}\cdot\underbrace{4\pi r^2}_{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Gaussova věta tedy skutečně alespoň v tomto speciální případě platí.

b) bodový náboj leží v libovolném místě uzavřené obalové plochy obecného tvaru

Stačí dokázat, že Gaussova věta platí pro jeden bodový náboj obklopený uzavřenou plochou libovolného tvaru. Podle principu superpozice lze potom libovolně rozmístěný náboj chápat jako sumu bodových nábojů.



(Obr. ES-23) Náboj na libovolném místě obalové plochy

Když si na obalové ploše vytkneme pomocí elementárního kužele o ***prostorovém úhlu*** $\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}$ elementární plochu o velikosti $\mathbf{d}\boldsymbol{S}$, bude platit pro silový tok touto plochou vztah:

$$\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}S\,\boldsymbol{n_0} = |\boldsymbol{E}(r)|\,\mathrm{d}S\cos(\alpha) = |\boldsymbol{E}(r)|dS' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}r^2\cdot\mathrm{d}\rho = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\rho \qquad \text{(ES*14)}$$

$\mathbf{n_0}$ je jednotkový vektor směřující v kolmém směru vně z uzavřené plochy. Při této volbě je tok vystupující z plochy kladný a tok vstupující do plochy záporný.

dS´ je průmět elementární plochy dS do směru kolmého na poloměr, což je současně plocha, kterou by vytknul ve vzdálenosti $\boldsymbol{r}$ prostorový elementární kužel na sférické ploše

$$\mathrm{d}\,S' = r^2\cdot\mathrm{d}\,\rho$$

Je vidět, že velikost silového toku elementární plochou vůbec nezávisí na vzdálenosti od náboje ani na úhlu, který v daném bodě svírá plocha s vektorem intenzity elektrického pole. Závisí pouze na velikosti náboje a elementárního prostorového úhlu d$\boldsymbol{\rho}$.

Vztah mezi velikostí vytknutého plošného elementu kuželem s určitým prostorovým úhlem na sférické ploše o daném poloměru je podobný, jako vztah mezi obloukovým elementem vytknutým pod elemntárním úhlem na kruhové dráze s daným poloměrem

$$\mathrm{d}\,l = r\cdot\mathrm{d}\,\varphi$$

Integrací přes celý prostorový úhel musíme dostat povrch sférické plochy

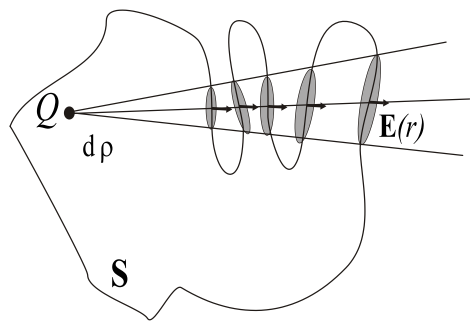
$$S = \oint\!\!\!\oint_S \mathrm{d}\,S = \int_{\rho=0}^{\rho=4\pi} r^2\cdot\mathrm{d}\,\rho = 4\pi\,r^2$$

Když sečteme dílčí toky všemi elementárními plochami přes celý prostorový úhel zjistíme, že Gaussova věta platí i v tomto případě:

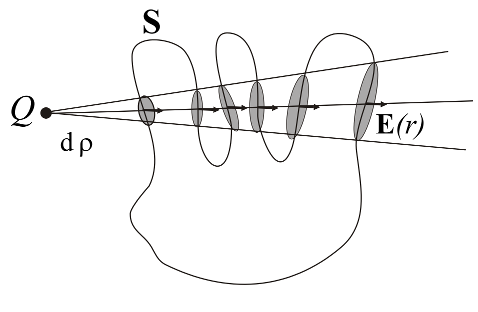
$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\rho=0}^{4\pi}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\,\rho = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{(ES*15)}$$

c) Siločáry elektrického pole protínají plochu na několika místech

Je-li i v tomto případě v ploše uzavřen náboj, protne elementární kužel plochu na lichém počtu míst. Tok elementárními plochami však nezávisí s ohledem na (ES*14) na jejich vzdálenosti od náboje, je u všech ploch stejně velký. S ohledem na orientaci elementární plochy je **vytékající tok kladný a vtékající tok záporný**. Toky se na sudém počtu míst odečtou, výsledný tok bude mít pouze velikosti toku jednou elementární plochou. Pro tok celou uzavřenou plochou potom platí stejný výsledek jako v (ES*15).



(Obr. ES-24) Složitě členěná obalová plocha



(Obr. ES-25) Náboj vně obalové plochy

d) Náboj leží vně uzavřené plochy

V tomto případě protne elementární kužel plochu na sudém počtu míst. **S ohledem na orientaci elementární plochy je vytékající tok kladný a vtékající tok záporný**. Toky se na sudém počtu míst odečtou, výsledný tok bude nulový. To potvrzuje předpoklad, že tok uzavřenou plochou je nenulový pouze v případě, je-li do plochy uzavřen náboj.

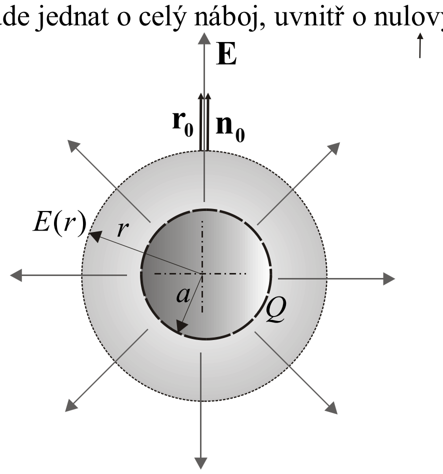
$$\oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \qquad \text{(ES*16)}$$

{Př. ES/17} Elektrické pole nabité vodivé koule ve vakuu

Jak veliká je intenzita elektrického pole uvnitř a vně rovnoměrně nabité elektricky vodivé koule podle obrázku (Obr. ES-26), (Obr. ES-27), která je umístěna ve vakuu a má poloměr ***a***?

Navazuje na:
{Př. ES/4} Elektrické pole v nabitém vodiči
{Př. ES/16} Gaussova věta použitá pro bodový náboj ve vakuu

Elektrický náboj se rozloží pouze na povrchu elektrody (viz {Př. ES/4}), u dokonalé koule lze navíc předpokládat, že všude se stejnou hustotou, a tak zůstane zachována sférická symetrie pole. Pro aplikaci Gaussovy věty je možné použít opět sférických obalových ploch. Velikost náboje uzavřeného do plochy se bude lišit podle toho, zda se budeme nacházet uvnitř, nebo vně kulové elektrody. Vně elektrody se tedy bude jednat o celý náboj, uvnitř o nulový náboj.



(Obr. ES-26) Elektrické pole vně nabité koule

a) Počítáme-li elektrické pole vně nabité koule pro poloměry

$$r \geq a\,,$$

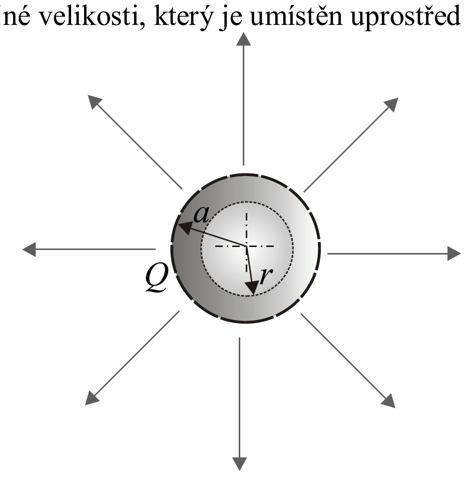
je třeba zvolit sférickou obalovou plochu o stejném poloměru, jako je vzdálenost uvažovaného místa. V tomto případě je do této plochy uzavřen vždy celý náboj, kterým je koule nabita, a platí

$$\oiint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = E(r)\cdot S = E(r)\cdot 4\pi\, r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Z toho vyplyne pro velikost intenzity elektrického pole

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Intenzita elektrického pole vně nabité koule je zcela shodná s intenzitou buzenou bodovým nábojem o stejné velikosti, který je umístěn uprostřed kulové elektrody.



b) Při výpočtu intenzity uvnitř koule na poloměru

$$r < a$$

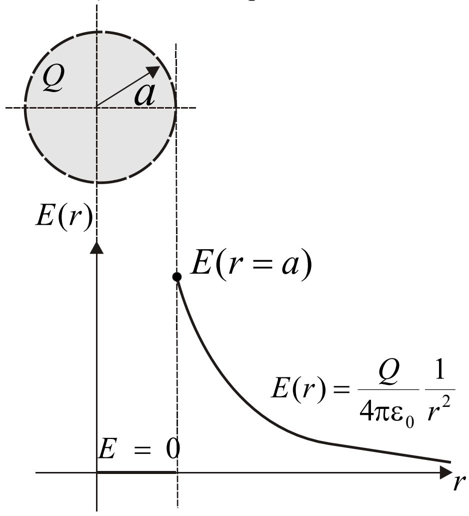
je do obalové plochy uzavřen nulový náboj, celý náboj leží totiž na povrchu koule

$$\oiint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = E(r)\cdot S = E(r).4\pi.r^2 = 0$$

Z toho vyplývá, že elektrické pole uvnitř nabité vodivé koule je nulové.

$$E(r) = 0$$

(Obr. ES-27) Elektrické pole uvnitř nabité koule



(Obr. ES-28) Rozložení intenzity uvnitř a vně nabité koule

Na povrchu nabité koule je intenzita elektrického pole o velikosti

$$E(r = a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}$$

Intenzita elektrického pole klesá s kvadrátem vzdálenosti a postupně vymizí

$$\lim_{r\to\infty} E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = 0$$

{Př. ES/18} Intenzita elektrického pole na povrchu vodivé koule-číselný příklad

Vypočtěme minimální poloměr ***a*** elektricky vodivé koule, aby na jejím povrchu ještě nedošlo k sršení. Koule je nabitá nábojem **Q=1 μC** a umístěná ve vzduchu s elektrickou pevností $\boldsymbol{E_P}$**=1 kV/mm.**

Ze vztahu

$$\mathrm{E}(r = a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}$$

udávajícího velikost intenzity na povrchu koule vypočteme minimální poloměr

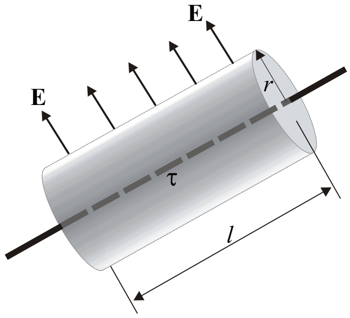
$$a > \sqrt{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 E_P}} = \sqrt{\frac{1\cdot 10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0 1\cdot 10^{6}}} = 94\ mm$$

{Př. ES/19} Elektrické pole rovnoměrně nabitého dlouhého tenkého vodiče ve vakuu

Jak veliká je intenzita elektrického pole na poloměru ***r*** od tenkého vodiče rovnoměrně nabitého liniovou hustotou náboje $\boldsymbol{\tau}$? Vodič je relativně dlouhý, jeho průměr je vůči délce zanedbatelně veliký.

Navazuje na:
{Př. ES/9} Elektrické pole nad nekonečně dlouhým nabitým vodivým vláknem

Tato úloha již byla vyřešena v kapitole o superpozici v příkladu {Př. ES/9} jako limitní případ výpočtu elektrického pole části rovnoměrně nabitého přímého vodiče v {Př. ES/8}. Podobným způsobem je možné počítat pole pomocí Gaussovy věty.



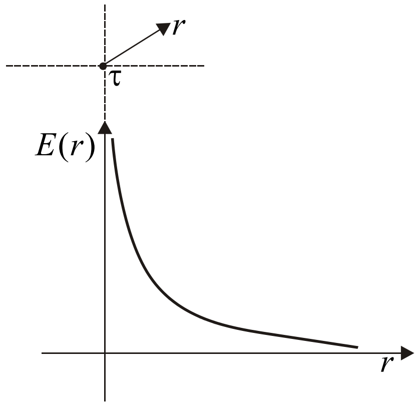
(Obr. ES-29) Elektické pole tenkého nabitého vodiče

Elektrické pole bude mít válcovou symetrii jako v příkladu {Př. ES/9}, siločáry budou vystupovat kolmo z vodiče. Zvolíme-li jako uzavřenou plochu válec se stejným poloměrem, jako je místo, ve kterém počítáme velikost intenzity elektrického pole, bude silový tok procházet pouze pláštěm válce, intenzita bude k této válcové ploše kolmá a bude zde konstantní. Na podstavách válce je vektor intenzity rovnoběžný s plochou a silový tok bude nulový. Pro intenzitu elektrického pole na libovolném poloměru bude platit

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E(r)\cdot S = E(r)\cdot 2\pi\, r\cdot l = \frac{\tau\cdot l}{\varepsilon_0}$$

Pro intenzitu elektrického pole na poloměru ***r*** bude tedy platit vztah

$$E(r) = \frac{\tau}{2\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$



(Obr. ES-30) Průběh intenzity elektrického pole v libovolné vzdálenosti od nabité přímky

Pro poloměr jdoucí k nule roste intenzita nade všechny meze. To je dané abstrakcí spočívající v uvažování nekonečně tenkého vodiče.

$$\lim_{r \to 0} E(r) = \infty$$

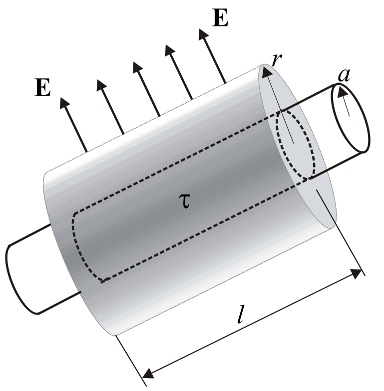
Ve skutečnosti má vodič vždy konečný poloměr a proto nabývá intenzita elektrického pole vždy konečné hodnoty.

{Př. ES/20} Elektrické pole rovnoměrně nabitého dlouhého válcového vodiče

Jak veliká je intenzita elektrického pole na poloměru $\boldsymbol{r}$ od dlouhého válcového vodiče podle obrázku (Obr. ES-31) Vodič má poloměr $\boldsymbol{a}$, je nabit nábojem s liniovou hustotou $\boldsymbol{\tau}$ a umístěn ve vakuu.

Navazuje na:
{Př. ES/9} Elektrické pole nad nekonečně dlouhým nabitým vodivým vláknem
{Př. ES/17} Elektrické pole nabité vodivé koule ve vakuu
{Př. ES/19} Elektrické pole rovnoměrně nabitého dlouhého tenkého vodiče ve vakuu

Náboj se rozloží s určitou **plošnou hustotou** rovnoměrně na **povrchu válcového vodiče**. Podobně jako u tenkého vodiče lze předpokládat, že se náboj rozloží rovnoměrně i v podélném směru. Na jednotku délky připadne celkový náboj o velikosti τ. Není jediný důvod, aby nezůstala zachovaná válcová symetrie elektrického pole. Pro výpočet elektrického pole podle Gaussovy věty je opět třeba volit obalovou válcovou plochu, do které bude odpovídající náboj uzavřen. Uvnitř válce to bude nulový náboj, protože celý náboj sídlí na povrchu vodiče. Vně válcového vodiče to bude celý náboj, kterým je válec nabit.



(Obr. ES-31) Elektrické pole nabitého válcového vodiče

a) Výpočet intenzity na poloměru r vně nabitého válcového vodiče

$$r \geq a$$

$$\oiint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = E(r) \cdot S = E(r) \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\tau \cdot l}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

Pro intenzitu elektrického pole vně válcového vodiče tedy platí stejný vztah jako pro tenké nabité vlákno.

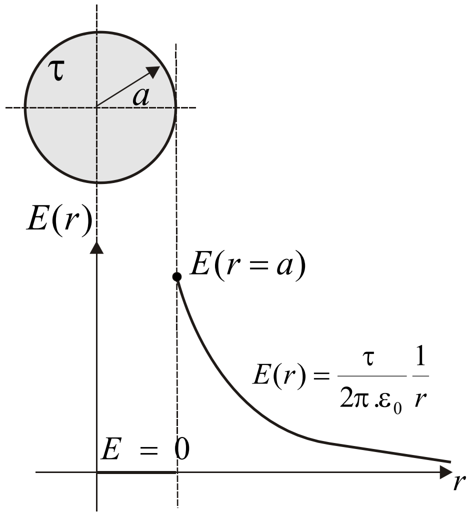
b) Výpočet intenzity na poloměru uvnitř nabitého válce

$$r < a$$

$$\oiint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = E(r) \cdot S = E(r) \cdot 2\pi r \cdot l = 0$$

$$E(r) = 0$$

Intenzita elektrického pole uvnitř válce je nulová.



(Obr. ES-32) Průběh intenzity elektrického pole nabitého válcového vodiče

Na povrchu nabitého válce bude intenzita elektrického pole o velikosti

$$E(r=a)=\frac{\tau}{2\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

Intenzita elektrického pole klesá nepřímo úměrně se vzdáleností a limituje k nule

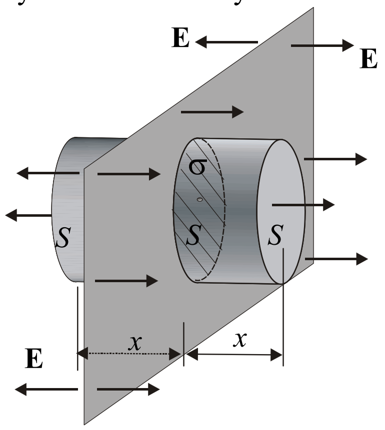
$$\lim_{r\to\infty}E(r)=0$$

{Př. ES/21} Elektrické pole nekonečně rozlehlé rovnoměrně nabité vodivé roviny

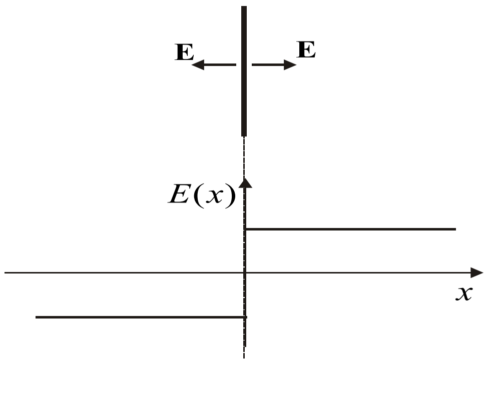
Jak veliká je intenzita elektrického pole ve vzdálenosti $\boldsymbol{x}$ od nekonečně rozlehlé roviny nabité rovnoměrně nábojem s povrchovou hustotou $\boldsymbol{\sigma}$?

Navazuje na:
{Př. ES/12} Elektrické pole na ose rovnoměrně nabitého disku
{Př. ES/14} Elektrické pole nad nabitou rozlehlou rovinou

Tato úloha již byla vyřešena v {Př. ES/14} jako limitní případ výpočtu elektrického pole rovnoměrně nabitého vodivého disku v kapitole o superpozici. Zde se jedná o výpočet pomocí Gaussovy věty. Elektrické pole bude vystupovat podle {Př. ES/12} kolmo z nabité roviny na obě strany, na rovnoběžných rovinách a tedy i rovinách ve vzdálenosti $\boldsymbol{x}$ bude mít všude konstantní velikost.



(Obr. ES-33) Elektrické pole v okolí rovnoměrně nabité roviny



(Obr. ES-34)
(Obr. ES-35) Průběh intenzity od nabité roviny

Obalovou plochu pro výpočet pomocí Gaussovy věty je třeba zvolit tak, aby procházela místem, kde pole počítáme. I v tomto případě lze volit obalovou plochu v podobě povrchu válce, může to však být i libovolný jiný uzavřený útvar, který vytkne na nabité rovině i rovinách procházejících místy uvažovanými pro výpočet stejnou plochu a má podélné stěny kolmé na rovinu. Silový tok potom prochází na obě strany kolmo podstavami válce, pláštěm válce nebude procházet žádný silový tok, protože jsou jeho podélné stěny rovnoběžné s vektorem intenzity elektrického pole.

Pro celkový tok vektoru intenzity elektrického pole danou uzavřenou plochou bude platit

$$\oiint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}=E(x)\cdot 2\cdot S=\frac{Q}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma\cdot S}{\varepsilon_0}$$

$$E(x)=\frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon_0}=konst\neq f(x)$$

Elektrické pole nabité rozlehlé roviny je všude konstantní, nezávislé na vzdálenosti. Ve skutečnosti má každá rovina konečné rozměry, uvedené výsledky platí pouze ve vzdálenosti podstatně menší, než jsou rozměry roviny. Ve větších vzdálenostech bude intenzita elektrického pole klesat s kvadrátem vzdálenosti.

ES-e Zobecnění Gaussovy věty pro elektrickou indukci

Tok vektoru intenzity elektrického pole uzavřenou plochou je podle Gaussovy věty roven celkovému náboji, který je v ploše uzavřen, tedy součtu volného i vázaného náboje dělenému permitivitou vakua

$$\oiint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q_{cel}}{\varepsilon_0} = \frac{Q+Q_v}{\varepsilon_0}$$

Gaussovu větu jsme zatím použili pouze pro vyšetřování polí ve vakuu, kde se vyskytovaly pouze volné náboje. Když se budeme zabývat i problémy v dielektrických materiálech, bude nutné zohlednit vliv polarizace dielektrika, tedy vznik elektrických dipólů. K volným nábojům je třeba připočítat ještě vázané náboje.

Pro popis jevu **polarizace dielektrika,** který souvisí se vznikem elektrických dipólů a jejich natáčením v elektrickém poli, slouží stejnojmenná vektorová veličina **polarizace *P***. Tok vektoru polarizace určitou plochou je dán celkovým kladným vázaným nábojem, který touto plochou v dielektriku projde při polarizaci

$$\iint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_v \qquad \text{(ES*17)}$$

Když si zvolíme uvnitř homogenního dielektrika, ve kterém je objemová hustota elektrických dipólů všude stejně veliká, uzavřenou obalovou plochu kolem určitého objemu, vstoupí do této plochy stejně veliký vázaný náboj posouvajících se dipólů, jako z ní i vystoupí, tok vektoru polarizace je nulový. Při popisu tohoto jevu pro elementární objem s elementární obalovou plochou platí diferenciální vztah

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{P} = 0$$

Na povrchu dielektrika, ze kterého se dipóly již nemohou nikam dále posouvat, se objeví celkový vázaný náboj, který je roven normálové složce vektoru polarizace.

$$|P_n| = \sigma_v$$

Zvolíme-li v Gaussově větě uzavřenou plochu kolem nabité elektrody umístěné v dielektrickém prostředí (viz {Př. ES/22}),(Obr. ES-36)) , bude v této ploše obsažen volný náboj na elektrodě a současně vázaný náboj, který touto plochou projde při polarizaci:

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q_{cel}}{\varepsilon_0} = \frac{Q+Q_v}{\varepsilon_0} = \frac{Q - \oiint_S P\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(ES*18)}$$

Znaménka jsou zvolena s ohledem na posun dipólů. Bude-li na elektrodě kladný náboj, do uzavřené plochy obklopující elektrodu se přesune záporný vázaný náboj dipólů. Jednoduchou úpravou vztahu (ES*18) dostaneme rovnici

$$\oiint_S (\varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

Na základě tohoto vztahu je možné zavést veličinu, která se nazývá elektrická indukce

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \qquad [\mathrm{C/m^2}] \qquad \text{(ES*19)}$$

Tok vektoru elektrické indukce uzavřenou plochou je roven pouze volnému náboji uvnitř plochy. Tento vztah lze označit jako Gaussovu větu pro elektrickou indukci ***D***

$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_0 \qquad \text{(ES*20)}$$

Za předpokladu, že **polarizace bude lineární** a tedy velikost dipólového momentu bude přímo úměrná intenzitě elektrického pole, lze celý jev polarizace respektovat pomocí **jediné důležité konstanty**, která se nazývá **relativní permitivita ε_r.**

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \chi\varepsilon_0\boldsymbol{E} = \varepsilon_0(1+\chi)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}$$

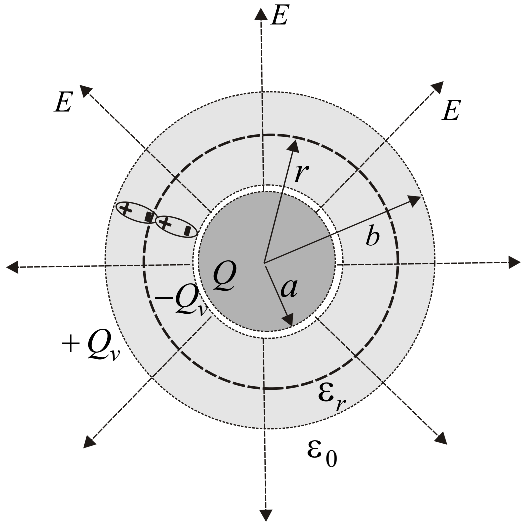
Konstatnta úměrnosti mezi polarizací ***P*** a intenzitou elektrického pole ***E*** se nazývá elektrická susceptibilita χ.

Význam a vliv relativní permitivity je dobře vidět na příkladech {Př. ES/22}, {Př. ES/26}, {Př. ES/27}.

{Př. ES/22} Kulová elektroda s dielektrickým pláštěm umístěná ve vzduchu

Kulová elektroda o poloměru ***a*** je nabita volným nábojem ***Q*** a těsně obklopena dielektrickým pláštěm o vnějším poloměru ***b***. Plášť má permitivitu ε_r, koule s pláštěm je umístěna ve vzduchu. Jaká je velikost intenzity elektrického pole uvnitř a vně dielektrického pláště? Jak velký vázaný náboj se objeví na rozhraní mezi elektrodou a pláštěm a pláštěm a okolním vzduchem?

Vychází z:
ES-e Zobecnění Gaussovy věty pro elektrickou indukci



(Obr. ES-36) Nabitá kulová elektroda s dielektrickým pláštěm

Tok vektoru elektrické indukce uzavřenou plochou se rovná celkovému volnému náboji, který je v ploše obsažen

$$\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

Zvolíme-li obalovou plochu, která prochází dielektrickým pláštěm, obklopíme celý volný náboj, co bude na povrchu elektrody. Pole bude mít sférickou symetrii, proto je vhodné zvolit i sférickou obalovou plochu. Pro elektrickou indukci bude platit na libovolném poloměru vně koule

$$r \ge a$$

$$\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D(r)\cdot S = D(r)\cdot 4\pi\, r^2 = Q$$

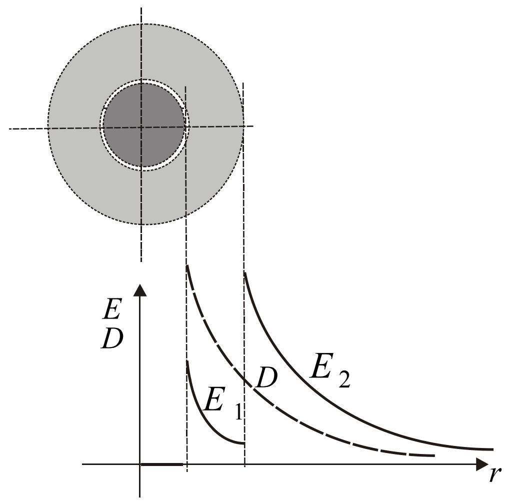
$$D(r) = \frac{Q}{4\pi\, r^2}$$

Tento vztah pro elektrickou indukci platí zcela stejně i pro kulovou elektrodu bez dielektrického pláště, elektrická indukce je závislá pouze na volných nábojích. Na intenzitě v dielektrickém obalu se však projeví vliv vázaných nábojů, který je respektován relativní permitivitou.

$$a \le r \le b$$

$$E_1(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$E_1(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r^2}$$



(Obr. ES-37) Rozložení indukce a intenzity el. pole

Vně dielektrického obalu již žádné vázané náboje nebudou, relativní permitivita bude jednotková. Když při výpočtu elektrického pole vně stínícího pláště vedeme tímto místem obalovou plochu, bude do ní formálně uzavřen pouze volný náboj na kulové elektrodě. Celkový vázaný náboj na vnitřním a vnějším povrchu dielektrického pláště bude stejně veliký, ale s opačným znaménkem, jeho účinek se vyruší.

$$r \ge b$$

$$E_2(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

Celkový průběh elektrické indukce a intenzity elektrického pole je na (Obr. ES-37).

Známe-li velikost elektrické indukce a intenzity elektrického pole, můžeme velikost vázaného náboje, který se objeví na povrchu dielektrika, vypočítat pomocí definičního vztahu pro polarizaci

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

Pro velikost vektoru polarizace v dielektrickém plášti bude platit

$$P_1(r) = D(r) - \varepsilon_0 E_1(r) = \frac{Q}{4\pi\, r^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)$$

Ve vzduchu vně dielektrického pláště musí být polarizace samozřejmě nulová

$$P_2(r) = D(r) - \varepsilon_0 E_2(r) = \frac{Q}{4\pi\, r^2} - \varepsilon_0 \frac{Q}{4\pi\, \varepsilon_0\, r^2} = 0$$

Normálová složka vektoru polarizace na povrchu dielektrika je rovna plošné hustotě vázaného náboje, který se na povrchu dielektrika objeví

$$P_n = \sigma_v$$

Pro vázaný náboj, který se objeví na povrchu dielektrického pláště na hranici s elektrodou v naší úloze, bude tedy platit

$$\iint_S \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = P_1 \cdot S = P_1 \cdot 4\pi\, r^2 = Q_v$$

$$Q_v = Q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

Náboj v dielektriku se "posunul", zcela stejný náboj, ale s opačným znaménkem, se musí objevit na druhé straně dielektrického pláště na hranici se vzduchem.
Po zpětném dosazení do Gaussovy věty pro intenzitu elektrického pole za celkový náboj je možné se přesvědčit, že uvedené vztahy skutečně platí:

$$\oiint_S \boldsymbol{E}_1 . \mathrm{d}\boldsymbol{S} \overset{!}{=} \frac{Q + Q_v}{\varepsilon_0}$$

$$E_1(r) \cdot S \overset{!}{=} \frac{Q - Q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)}{\varepsilon_0}$$

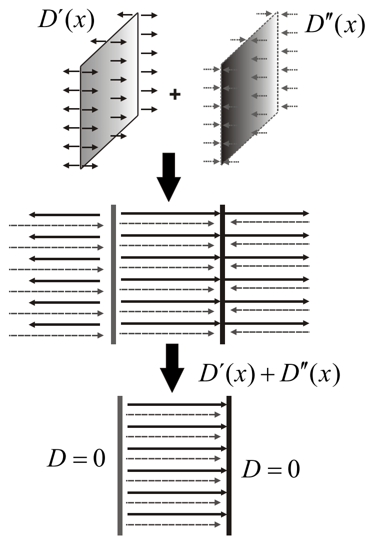
$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \overset{!}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \overset{!}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

{Př. ES/23} Elektrické pole dvou opačně nabitých rovin

Jaká bude velikost elektrického pole v okolí dvou rozlehlých opačně nabitých vodivých rovin?

Navazuje na:
{Př. ES/14} Elektrické pole nad nabitou rozlehlou rovinou
{Př. ES/21} Elektrické pole nekonečně rozlehlé rovnoměrně nabité vodivé roviny



(Obr. ES-38) Elektrické pole dvou opačně nabitých rovin

Rovina na levé straně je nabita nábojem s plošnou hustotou **+σ.** Elektrická indukce vystupuje rovnoměrně z roviny na obě strany a má velikost:

$$D'(x) = \frac{\sigma}{2} = konst \neq f(x)$$

Rovina na pravé straně je nabita nábojem o plošné hustotě **-σ.** Elektrická indukce je stejně veliká, její směr je však opačný

$$D''(x) = \frac{\sigma}{2} = konst \neq f(x)$$

Směry jsou dány zvolenými kladnými smysly. Jestliže je intenzita elektrického pole číselně rovna síle působící na jednotkový kladný náboj, kladná elektroda tento jednotkový náboj odpuzuje, siločáry elektrického pole směřují vně, záporná elektroda přitahuje, siločáry směřují dovnitř.

Sečteme-li elektrické pole dvou rovin jako na obrázku (Obr. ES-38), dostaneme mezi rovinami dvojnásobnou hodnotu elektrické indukce

$$D(x) = D'(x) + D''(x) = 2 \cdot D'(x) = \sigma = konst \neq f(x)$$

Mimo roviny se indukce odečte, pole zde bude nulové.
Velikost intenzity elektrického pole mezi rovinami je závislá na permitivitě prostředí:

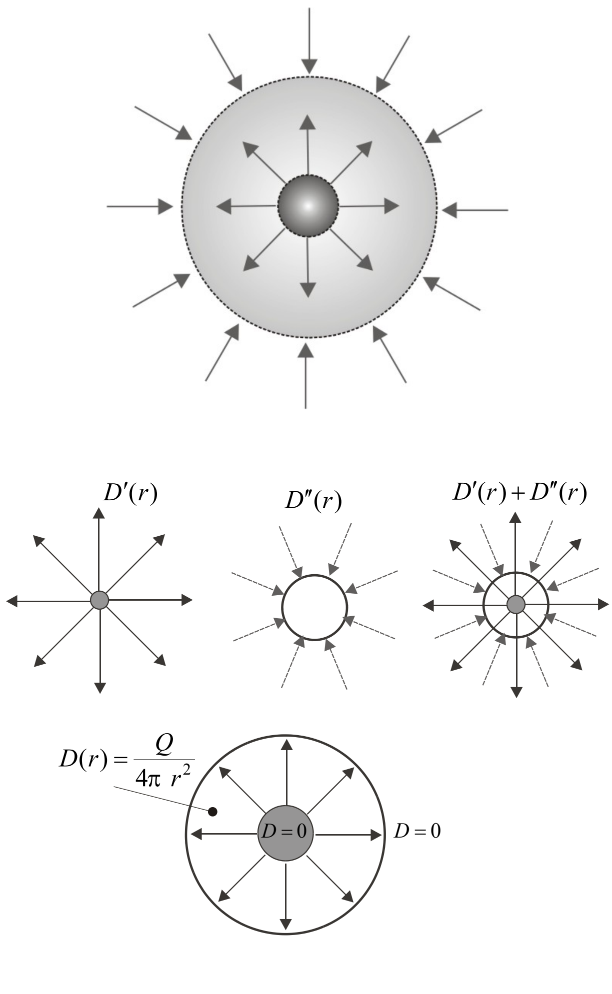
$$E(x) = \frac{D(x)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = konst \neq f(x)$$

{Př. ES/24} Elektrické pole dvou opačně nabitých koncentrických koulí

Jak veliká bude elektrická indukce v okolí dvou opačně nabitých koncentrických koulí ?

Navazuje na
{Př. ES/17} Elektrické pole nabité vodivé koule ve vakuu
{Př. ES/23} Elektrické pole dvou opačně nabitých rovin

Podobně jako elektrického pole dvou opačně nabitých rovin lze i zde obdržet výsledné pole superpozicí pole dílčích elektrod podle {Př. ES/17}.



(Obr. ES-39) Elektrické pole opačně nabitých koncentrických koulí

Kladná vnitřní kulová elektroda bude mít uvnitř nulové pole a vně pole o velikosti

$$D'(r) = \frac{Q}{4\pi\, r^2}$$

Elektrická indukce bude směřovat v radiálním směru ze středu ven z elektrody.
Záporná vnější elektroda bude mít uvnitř v dutině nulovou indukci, vně indukci o velikosti dané stejným vztahem

$$D''(r) = \frac{Q}{4\pi\, r^2}$$

Indukce směřuje s ohledem na kladné smysly v radiálním směru dovnitř elektrody.
Sečtením pole vnitřní a vnější koule zjistíme, že ve vnitřní kouli a vně vnější koule je elektrické pole nulové, v prostoru mezi vnitřní a vnější kulovou elektrodou je elektrická indukce stejná, jako kdyby tam byla pouze vnitřní elektroda.

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi\, r^2}$$

Intenzita elektrického pole mezi elektrodami bude závislá na permitivitě prostředí

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{1}{r^2}$$

Ke stejnému závěru dojdeme při znalosti geometrie pole přímým použitím Gaussovy věty. Elektrické pole bude mít sférickou symetrii jako u bodového náboje nebo samostatné nabité kulové elektrody. Musí platit

$$\oiint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

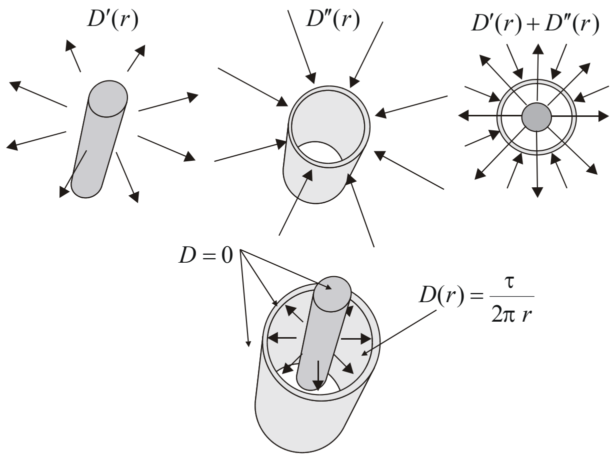
Zvolíme-li uzavřenou obalovou plochu uvnitř vnitřní elektrody, neobemkneme žádný náboj, protože celý kladný náboj leží na povrchu vnitřní elektrody, elektrická indukce zde bude nulová.
Zvolíme-li uzavřenou obalovou plochu mezi vnitřní a vnější elektrodou, obklopíme celý kladný náboj vnitřní elektrody. Zde proto bude pole stejné, jako by bylo buzeno jenom vnitřní elektrodou.
Zvolíme-li uzavřenou obalovou plochu vně obou elektrod, obklopíme celý kladný náboj vnitřní elektrody a celý záporný náboj vnější elektrody, tedy celkově nulový náboj a elektrická indukce bude nulová.

{Př. ES/25} Elektrické pole dvou opačně nabitých koaxiálních válců

Jak velká elektrická indukce bude v okolí dvou opačně nabitých koaxiálních válců?

Navazuje na:
{Př. ES/20} Elektrické pole rovnoměrně nabitého dlouhého válcového vodiče
{Př. ES/23} Elektrické pole dvou opačně nabitých rovin
{Př. ES/24} Elektrické pole dvou opačně nabitých koncentrických koulí

Podobně jako u elektrického pole dvou opačně nabitých rovin a koulí lze i zde obdržet výsledné pole superpozicí pole dílčích elektrod z příkladu {Př. ES/20}.



(Obr. ES-40) Elektrické pole dvou opačně nabitých válců

Kladná vnitřní válcová elektroda bude mít uvnitř nulové pole a vně pole o velikosti

$$D'(r)=\frac{\tau}{2\pi r}$$

Elektrická indukce bude směřovat v radiálním směru ze středu ven z elektrody.
Záporná vnější elektroda bude mít uvnitř v dutině nulovou indukci, vně indukci o velikosti dané stejným vztahem

$$D''(r)=\frac{\tau}{2\pi r}$$

Indukce směřuje s ohledem na kladné smysly v radiálním směru dovnitř elektrody.

Sečtením pole vnitřního a vnějšího válce zjistíme, že ve vnitřním válci a vně vnějšího válce je elektrické pole nulové, v prostoru mezi vnitřní a vnější válcovou elektrodou je elektrická indukce stejná, jako kdyby tam byla pouze vnitřní elektroda.

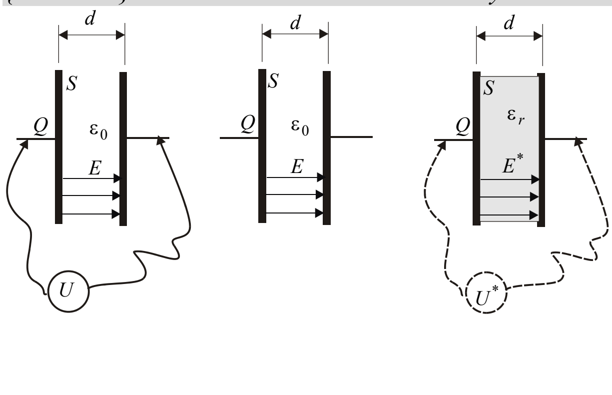
$$D(r)=\frac{\tau}{2\pi r}$$

Ke stejnému závěru dojdeme při znalosti geometrie pole přímým použitím Gaussovy věty jako v {Př. ES/24}.

{Př. ES/26} Vložení dielektrika do nabitého kondenzátoru, význam relativní permitivity

Vzduchový deskový kondenzátor byl nabit pomocí zdroje s napětím o velikosti ***U*** nábojem o velikosti ***Q***, poté byl zdroj odpojen a mezi desky byl vložen dielektrický materiál s permitivitou ε_r. Jak se to projeví na velikosti elektrického pole v kondenzátoru a jak velký vázaný náboj se objeví na povrchu dielektrika?

Navazuje na:
ES-e Zobecnění Gaussovy věty pro elektrickou indukci
{Př. ES/23} Elektrické pole dvou opačně nabitých rovin
{Př. ES/38} Kapacita deskového kondenzátoru s homogenním dielektrikem
{Př. ES/61} Elektrické namáhání mezi rovinnými elektrodami s homogenním dielektrikem



(Obr. ES-41) Deskový kondenzátor před a po vložení dielektrika

Po připojení napětí se kondenzátor musí nabít nábojem, který je dán velikostí kapacity kondenzátoru:

$$Q=C\cdot U=\frac{\varepsilon_0 S}{d}U$$

Tento náboj je s ohledem na zvolenou terminologii volný, je dán přemístěním volných nosičů náboje ve vodiči - elektronů, z jedné elektrody na druhou s pomocí zdroje napětí. Po odpojení od zdroje se již velikost tohoto náboje nemůže změnit a zůstane konstantní

$$Q=konst$$

Elektrická indukce bude mít hodnotu

$$D = \frac{Q}{S}$$

Intenzita elektrického pole

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{S \cdot \varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U = \frac{U}{d}$$

Po vložení dielektrického materiálu mezi desky dojde k polarizaci dielektrika - k natočení elektrických dipólů proti směru vnějšího elektrického pole. To má za následek oslabení původního pole. Vliv polarizace je respektován relativní permitivitou $\boldsymbol{\varepsilon_r}$.

Volný náboj na deskách se nemůže změnit, zůstane konstantní, změní se ale kapacita i napětí. Potom bude platit

$$Q = C \cdot U = C^* \cdot U^* = konst$$

Kapacita se po zasunutí dielektrika změnila na hodnotu

$$C^* = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$

Po dosazení vyplyne

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} \cdot U^* = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \cdot U$$

Napětí na odpojeném kondenzátoru se zmenší $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ násobně. Ve stejném poměru poklesne i intenzita elektrického pole

$$U^* = \frac{U}{\varepsilon_r} \qquad\qquad E^* = \frac{E}{\varepsilon_r}$$

Velikost vázaného náboje lze určit z definiční rovnice pro polarizaci

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

V dielektrickém materiálu bude mít polarizace velikost

$$P = D - \varepsilon_0 E^* = \frac{Q}{S} - \varepsilon_0 E^* = \frac{Q}{S} - \varepsilon_0 \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{Q}{S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

Tok vektoru polarizace určitou plochou je dán celkovým vázaným nábojem, který plochou projde při polarizaci. Normálová složka vektoru polarizace na povrchu dielektrika udává plošnou hustotu vázaného náboje. Na povrchu dielektrika se tedy objeví celkový vázaný náboj

$$Q_v = \iint_S \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = P \cdot S = \frac{Q}{S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \cdot S = Q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

$$Q_v = Q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

Vázaný náboj bude na jedné straně dielektrika kladný na druhé záporný a právě opačně polarizovaný, než sousední volné náboje na deskách.

Na celý problém je možné se podívat ještě z druhé strany. Po vložení dielektrika vzniknou na jeho povrchu vázané náboje, které si pomyslně vybudí svoje vlastní elektrické pole s intenzitou E´. Toto pole působí proti původnímu elektrickému poli o intenzitě E, protože i rozmístění vázaných nábojů je opačné, než volné náboje na elektrodách. Výsledné pole musí být dáno součtem těchto dílčích polí.

Gaussova věta platí pro celkový náboj a výslednou intenzitu elektrického pole

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{E}^* \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint\!\!\!\oint_S (E - E') \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q_{cel}}{\varepsilon_0} = \frac{Q + Q_v}{\varepsilon_0}$$

Pro intenzitu původního pole ve vzduchu a intenzitu pole vázaných nábojů bude tedy platit

$$E \cdot S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \qquad\qquad E' \cdot S = \frac{Q_v}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E' = \frac{Q_v}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

Výsledné elektrické pole tedy skutečně bude

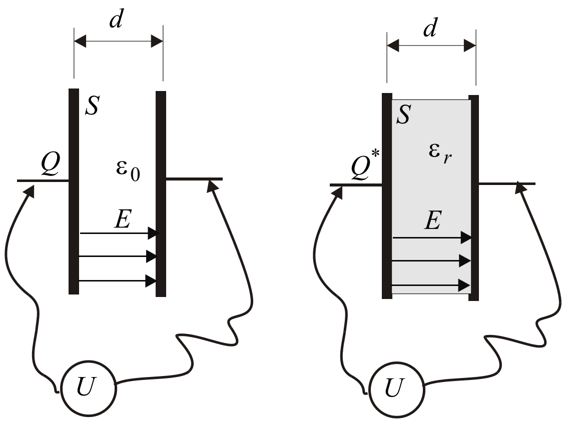
$$E^* = E - E' = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} - \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{E}{\varepsilon_r}$$

{Př. ES/27} Vložení dielektrika do kondenzátoru připojeného na konstantní napětí U

Vzduchový deskový kondenzátor byl nabit pomocí zdroje s napětím o velikosti U nábojem o velikost Q. Poté byl mezi desky kondenzátoru vložen dielektrický materiál s permitivitou ε_r. Jak se to projeví na velikosti elektrického pole v kondenzátoru a náboji na deskách?

Navazuje na
ES-e Zobecnění Gaussovy věty pro elektrickou indukci
{Př. ES/26}Vložení dielektrika do nabitého kondenzátoru, význam relativní permitivity

Situace bude podobná jako v {Př. ES/26} s tím rozdílem, že kondenzátor zůstane připojen na napětí, napětí musí zůstat konstantní



$$U = konst$$

Konstantní musí zůstat i intenzita elektrického pole

$$E = E^* = \frac{U}{d}$$

Když se změní kapacita a napětí zůstane konstantní, musí se změnit i volný náboj na elektrodách

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q^*}{C^*} = konst$$

$$\frac{Q}{\frac{\varepsilon_0 S}{d}} = \frac{Q^*}{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}}$$

Na deskách kondenzátoru se tedy objeví náboj

$$Q^* = \varepsilon_r Q$$

Původní náboj na deskách se ε_r krát zvětšil, aby vykompenzoval vliv vázaných nábojů v dielektriku. Intenzita elektrického pole musí zůstat konstantní.

ES-f Metoda zrcadlení

Metoda zrcadlení umožňuje řešit elektrické pole nabitých objektů, které se nacházejí nad dokonale elektricky vodivými rovinami. Podobně jako vodivá rovina se chová například i povrch země.

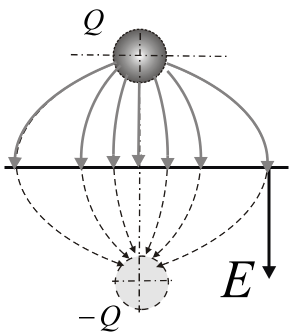
Z podmínek na rozhraní s vodičem v elektrickém poli musí platit tyto skutečnosti:

a) Siločáry elektrického pole vstupují do vodivé roviny kolmo

Důsledkem toho je další podmínka, která však vyplývá z té první a naopak:

b) **povrch vodiče je ekvipotenciální plocha**

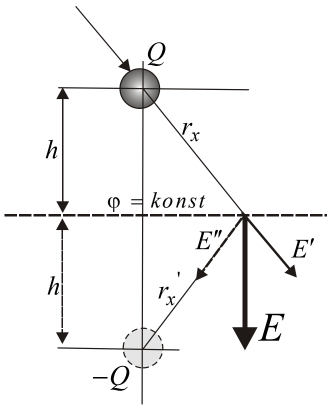
Podmínky na rozhraní splníme tím, že v matematickém modelu reprezentujeme vliv vodivé roviny **stejně velikým, symetricky umístěným nábojem**. Na tomto principu je založena **metoda zrcadlení**.



(Obr. ES-42) Náboj nad vodivou rovinou

Doplníme-li symetricky na druhou stranu obraz skutečného náboje s opačným znaménkem a sečteme-li v libovolném místě roviny vektory intenzity elektrického pole těchto nábojů, bude skutečně výsledný vektor intenzity elektrického pole vstupovat do roviny kolmo viz (Obr. ES-42), (Obr. ES-43).

Podobně platí pro výsledný potenciál na rovině:



(Obr. ES-43) Vektorový obrázek pro metodu zrcadlení

Potenciál vybuzený prvním nábojem

$$\varphi(r_x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_x} + K_1$$

Potenciál vybuzený druhým nábojem

$$\varphi(r_x^{'}) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_x^{'}} + K_2$$

Vzdálenost obou nábojů k libovolnému místu na rovině je vždy stejná

$$r_x = r_x^{'}$$

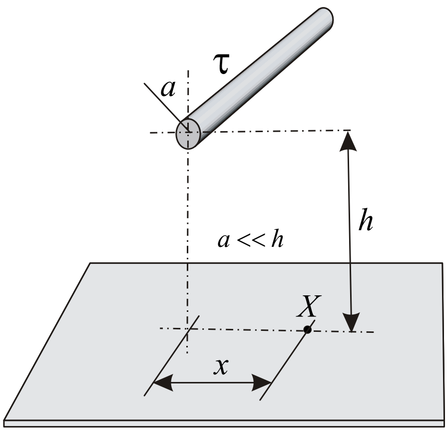
Pro výsledný potenciál bude platit

$$\varphi = \varphi(r_x) + \varphi(r_x^{'}) = K_1 + K_2 = konst$$

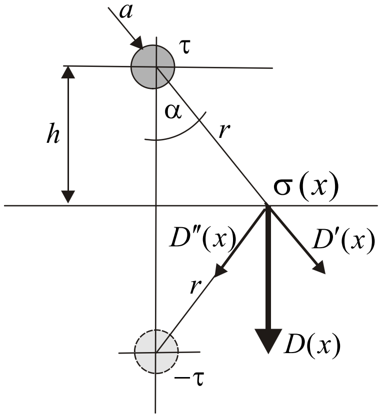
{Př. ES/28} Válcový vodič nad vodivou rovinou

Jak velká je intenzita elektrického pole a elektrická indukce v bodě ***X*** na vodivé rovině podle obrázku (Obr. ES-44)? Rovina se nachází pod dlouhým vodičem nabitým liniovou hustotou náboje $\boldsymbol{\tau}$.

Navazuje na
ES-f Metoda zrcadlení
{Př. ES/20} Elektrické pole rovnoměrně nabitého dlouhého válcového vodiče



(Obr. ES-44) Vodič nad vodivou rovinou



(Obr. ES-45) Náhradní model pro výpočet

Vliv roviny je respektován fiktivním vodičem, který je nabit stejně velkým nábojem a umístěn na druhé straně roviny.

Elektrická indukce vyvolaná originálním vodičem má velikost

$$D'(x) = \frac{\tau}{2\pi\, r}$$

Vzdálenost vodiče k místu **X** lze vyjádřit

$$r = \sqrt{h^2 + x^2}$$

Elektrická indukce vyvolaná obrazem vodiče má velikost

$$D''(x) = \frac{\tau}{2\pi\, r}$$

Výsledná indukce je vektorový součet dílčích indukcí

$$D(x) = D'(x) + D''(x) = 2\frac{\tau}{2\pi\, r}\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{h}{r}$$

$$D(x) = 2\frac{\tau}{2\pi\, r}\frac{h}{r} = \frac{\tau\, h}{\pi\, r^2} = \frac{\tau\, h}{\pi\,(x^2 + h^2)}$$

Podle Gaussovy věty a z podmínek na rozhraní vyplývá, že normálová složka indukce na rozhraní je rovna plošné hustotě volného náboje

$$D(x) = \sigma(x)$$

Přímo pod vodičem je tedy hustota náboje

$$D(x=0) = \frac{\tau}{\pi\, h}$$

Intenzita elektrického pole je závislá na permitivitě. V případě, že se vodič nachází ve vzduchu, bude pro intenzitu elektrického pole platit

$$E(x) = \frac{D(x)}{\varepsilon_0}$$

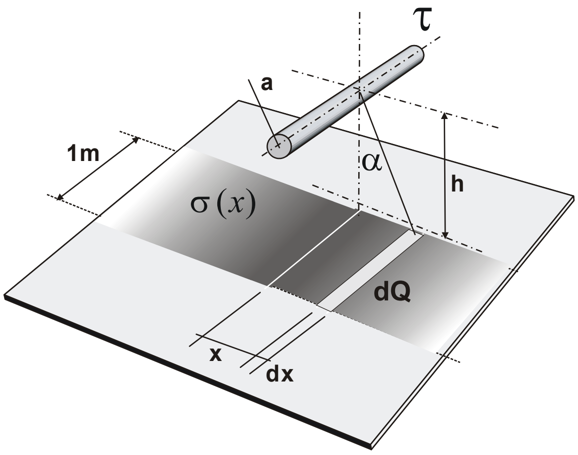
{Př. ES/29} Rozložení náboje na vodivé rovině, nad kterou se nachází nabitý vodič

S jak velikou plošnou hustotou je rozložen náboj na vodivé rovině pod vodičem nabitým liniovou hustotou náboje τ? Jak velký celkový náboj se indukuje do vodivé roviny?

Navazuje na:
{Př. ES/28} Válcový vodič nad vodivou rovinou

Hustota náboje v určitém místě na rozhraní je rovna normálové složce elektrické indukce v tomto místě. Tato skutečnost vyplývá přímo z Gaussovy věty.
Je-li rozhraní tvořeno vodivou rovinou, je zde pouze normálová složka elektrické indukce.

$$D(x) = \sigma(x)$$



(Obr. ES-46) Nabitý válcový vodič nad rozlehlou rovinou

V místě na rovině, které je ve vzdálenosti x od kolmého průmětu vodiče, je tedy indukce a hustota náboje

$$D(x) = \sigma(x) = \frac{\tau\, h}{\pi\,(x^2 + h^2)}$$

Vytkneme-li na rovině pás o jednotkové šířce, bude na části o délce **dx** tohoto pásu celkový náboj

$$\mathrm{d}Q(x) = \sigma(x)\,\mathrm{d}S = \sigma(x)\,\mathrm{d}x \cdot 1 = \sigma(x)\,\mathrm{d}x$$

Celkový náboj na vytknutém pásu bude

$$Q(h=1) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \sigma(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Při integraci je vhodnější převést proměnnou veličinu x na proměnný úhel α

$$\cos(\alpha) = \frac{h}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

$$\sigma(\alpha) = D(\alpha) = \frac{\tau}{\pi\, h}\cos^2(\alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{x}{h} \qquad \mathrm{d}x = \frac{h}{\cos^2(\alpha)}\mathrm{d}\alpha$$

Integraci lze provádět z důvodu symetrie pouze pro polovinu délky a výsledek vynásobit dvěmi

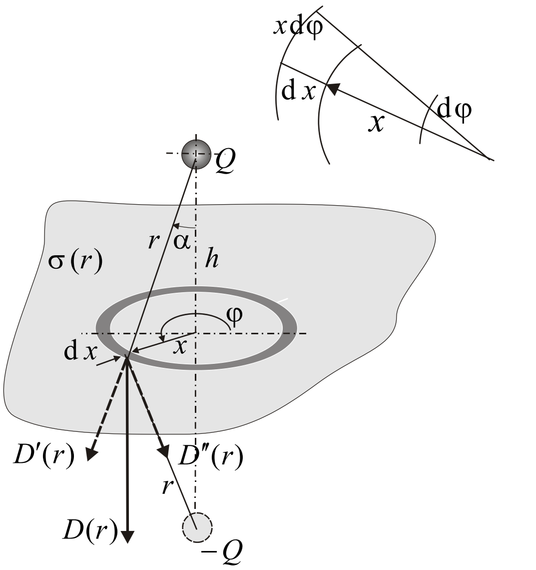
$$Q(h=1) = 2\int_{\alpha=0}^{\pi/2} \frac{\tau}{\pi}\,\mathrm{d}\alpha = 2\,\frac{\tau}{\pi}\,\frac{\pi}{2} = \tau$$

Na rovině se objeví stejně velký náboj jako na vodiči, má však opačné znaménko. Tak to musí být, protože vlivem rozdílného potenciálu mezi elektrodami došlo pouze k rozdělení náboje na dvě části.

{Př. ES/30} Nabitá koule nad vodivou rovinou - rozložení náboje na rovině

Jaká je hustota indukovaného náboje na vodivé rovině pod kulovou elektrodou nabitou nábojem Q? Jaký celkový náboj se objeví na rovině?

Navazuje na:
ES-f Metoda zrcadlení
{Př. ES/17} Elektrické pole nabité vodivé koule ve vakuu
{Př. ES/29} Nabitá koule nad vodivou rovinou - rozložení náboje na rovině



(Obr. ES-47) Nabitá kulová elektroda nad rozlehlou vodivou rovinou

Ve vzdálenosti ***x*** od místa pod kulovou elektrodou budou složky elektrické indukce od náboje elektrody a jeho obrazu stejně veliké

$$D'(x) = D''(x) = \frac{Q}{4\pi\, r^2}\,.$$

Výsledná indukce ve vzdálenosti ***x*** je po vektorovém sečtení

$$D(x) = 2D'(x)\cos(\alpha)\,.$$

Hustota indukovaného náboje na rovině je rovna normálové složce indukce, ale indukce má zde stejně pouze normálovou složku

$$\sigma(x) = D(x) = 2\frac{Q}{4\pi r^2}\cos(\alpha) = \frac{Q}{2\pi r^2}\cos(\alpha)\,.$$

Celkový náboj, který se objeví na rovině lze získat integrací přes celou plochu roviny

$$Q' = \iint_S \sigma\, \mathrm{d}S = \iint_S \frac{Q}{2\pi r^2}\cos(\alpha)\cdot x\cdot \mathrm{d}\varphi\cdot \mathrm{d}x$$

Element plochy byl vyjádřen pomocí vztahu

$$\mathrm{d}S = x\cdot \mathrm{d}\varphi\cdot \mathrm{d}x$$

Všechny proměnné veličiny v integraci lze převést na úhel α a φ.

$$\tan(\alpha) = \frac{x}{h} \quad \Rightarrow x = h\tan(\alpha)$$

$$\mathrm{d}x = \frac{h}{\cos^2(\alpha)}\mathrm{d}\alpha$$

$$\cos(\alpha) = \frac{h}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2(\alpha)}{h^2}$$

Po dosazení

$$Q' = \iint_S \sigma\, \mathrm{d}S = \int_{\alpha=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{Q}{2\pi}\frac{\cos^2(\alpha)}{h^2}\cos(\alpha)\, h\tan(\alpha)\frac{h}{\cos^2(\alpha)}\mathrm{d}\varphi\cdot \mathrm{d}\alpha$$

$$Q' = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\alpha=0}^{\pi/2} \frac{Q}{2\pi}\sin(\alpha)\mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\varphi = Q$$

Podle očekávání se na vodivé rovině pod nabitou kulovou elektrodou objeví stejně velký náboj, jako je náboj na elektrodě, ale s opačným znaménkem.

ES-g Napětí a potenciál v elektrostatickém poli

Elektrostatické pole je potenciálové, práce vykonaná po uzavřené dráze je nulová. Mezi **intenzitou elektrického pole, napětím a potenciálem** je podobný vztah, jako například mezi **silou**, **prací** a **potenciální energií** v gravitačním poli, které je také potenciálové. Veličiny v elektrickém poli jsou však vztaženy k pomyslnému **jednotkovému kladnému bodovému náboji**.

Intenzita elektrického pole E je číselně rovna **síle**, která by působila v elektrickém poli na jednotkový kladný bodový náboj.
Napětí mezi dvěma body v elektrickém poli je **práce**, kterou pole vykoná přenesením jednotkového bodového kladného náboje mezi těmito body.
Potenciál v určitém bodě v elektrickém poli je roven **potenciální energii**, kterou by měl v tomto bodě kladný jednotkový bodový náboj. Potenciál stejně jako potenciální energie není jednoznačný. Stane se jednoznačným v případě, jestliže přiřadíme jednomu konkrétnímu místu nebo oblasti v potenciálovém poli konkrétní hodnotu potenciálu. Zvolíme tedy místo nebo oblast, ke kterému bude hodnota potenciálu vztažena.
Potenciál v určitém bodě může mít hodnotu kladnou i zápornou. Zápornou v případě, že by bylo při přenesení kladného jednotkového náboje do referenčního bodu nutné práci dodat, ta by se projevila přírůstkem energie elektrostatického pole. Kladnou v případě, že by práci při přenesení do referenčního bodu vykonalo elektrostatické pole na úkor nahromaděné energie.

Napětí mezi dvěma body v elektrickém poli jako práce tedy **musí být rovno rozdílu potenciálů -** potenciálních energií. **Potenciál musí být rozložen spojitě**. Kdyby mělo v nějakém bodě dojít ke skokové změně potenciálu (potenciální energie), znamenalo by to, že zde musí působit síla (intenzita elektrického pole) o nekonečné velikosti, což samozřejmě není možné.
Oblasti s **konstantním potenciálem** se nazývají **ekvipotenciální**. Jako ekvipotenciální oblasti v elektrostatickém poli se jeví například vodiče. Ve vodiči je totiž intenzita elektrického pole nulová, při pohybu z jednoho místa ne druhé se nekoná žádná práce. Ekvipotenciální je i povrch vodičů. Elektrické pole vystupuje kolmo a nemá na povrchu vodičů tečnou složku. Při pohybu po povrchu vodičů se v elektrostatickém poli také nekoná žádná práce.
V matematické teorii je pro popis **chování skalární funkce** zaveden **operátor gradient**. Gradient skalární funkce v určitém bodě je definován jako **vektor**, který **ukazuje směr největšího spádu(kladné změny) skalární funkce**, jeho velikost představuje velikost změny skalární funkce na jednotku délky při pohybu ve směru největšího spádu. Budeme-li mít například skalární funkci

$$\psi(x, y, z)$$

která přiřadí každému bodu v prostoru určitou konkrétní skalární hodnotu, můžeme pomocí gradientu vypočítat změnu této skalární funkce, když z daného bodu přejdeme o elementární úsek popsaný co do velikosti i směru vektorovým elementem

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z).$$

Změna skalární funkce je potom dána skalárním součinem gradientu a elementu dráhy

$$\mathrm{d}\psi = \mathrm{grad}\,\psi(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \text{(ES*21)}$$

Interpretace této rovnice je následující. Když přejdeme o jednotkovou vzdálenost ve směru gradientu(největšího spádu), bude změna skalární funkce maximální možná a rovna absolutní hodnotě gradientu

$$\mathrm{d}\psi = \left|\mathrm{grad}\,\psi(x, y, z)\right|$$

Přejdeme-li z daného bodu kolmo na směr gradientu (kolmo na směr největšího spádu), bude velikost skalárního součinu a tedy i změna skalární funkce nulová.

$$\mathrm{d}\psi = 0$$

Chápeme-li intenzitu elektrického pole jako sílu, integrál intenzity po dráze jako práci a uvážíme-li, že vykonaná nebo dodaná práce souvisí s potenciální energií v elektrostatickém poli (potenciálem), změní se při posunu o element dráhy

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

potenciál definovaný v určitém bodě o hodnotu práce, kterou pole vykoná

$$-\mathrm{d}\varphi = \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \text{(ES*22)}$$

Znaménko mínus souvisí s definicí intenzity jako síly působící na kladný jednotkový náboj a potenciálu jako potenciální energie, kterou má jednotkový kladný náboj v elektrostatickém poli. Bude-li se náboj pohybovat ve směru intenzity elektrického pole, velikost skalárního součinu bude kladná, změna potenciálu záporná. V tomto případě to znamená, že elektrické pole vykonalo práci na úkor potenciální energie. Budeme-li nábojem pohybovat kolmo na intenzitu elektrického pole, nebude se konat žádná práce, hodnota skalárního součinu bude nulová. V případě posuvu proti směru elektrického pole bude skalární součin záporný, změna potenciálu bude kladná. Pro tento posuv by bylo třeba vykonat práci, která by se projevila jako přírůstek potenciální energie v elektrostatickém poli.
Srovnáním rovnic (ES*21) a (ES*22) zjistíme, že operátor gradient se nám pro popis potenciálu jako skalární funkce velice dobře hodí. Plyne z toho základní obecný vztah mezi intenzitou elektrického pole a potenciálem

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}(\varphi) \qquad \text{(ES*23)}$$

Obecné vztahy pro gradient skalární funkce se poměrně snadno odvodí, jsou závislé na volbě souřadné soustavy. V následujících příkladech se všechny tyto vztahy ve zjednodušené podobě využijí.
V kartézské soustavě platí

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \qquad \text{(ES*24)}$$

Ve válcové soustavě platí

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \qquad \text{(ES*25)}$$

Ve sférické soustavě platí

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}, \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right) \qquad \text{(ES*26)}$$

{Př. ES/31} Potenciál bodového náboje

Jak velký je skalární potenciál na libovolném poloměru vzdálenosti r od bodového náboje?

Navazuje na:
ES-g Napětí a potenciál v elektrostatickém poli
{Př. ES/3} Intenzita elektrického pole buzená bodovým nábojem

V případě bodového náboje má elektrostatické pole sférickou symetrii, je vhodné ho popsat ve sférické soustavě. Celý problém se ovšem velice zjednoduší tím, když uvážíme, že jsou všechny veličiny závislé pouze na poloměru vzdálenosti od náboje.

Obecný definiční vztah mezi intenzitou a potenciálem

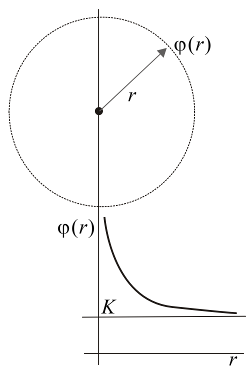
$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}(\varphi)$$

přejde s ohledem na (ES*26) na

$$E(r) = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$$

Intenzita elektrického pole bodového náboje je

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon \cdot r^2}\,.$$



(Obr. ES-48) Skalární potenciál bodového náboje

Pro skalární potenciál bude platit obecný vztah

$$\varphi(r) = -\int E(r)\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r} + K \qquad \text{(ES*27)}$$

Konstanta **K** respektuje skutečnost, že potenciál je obecně nejednoznačný. Jednoznačný se stane tehdy, když mu přiřadíme v jednom konkrétním místě určitou konkrétní hodnotu. Velikost konstanty **K** vyplyne přímo ze vztahu (ES*27), je to vlastně velikost potenciálu v nekonečně velké vzdálenosti od náboje.

$$\lim_{r\to\infty}\varphi(r)=K$$

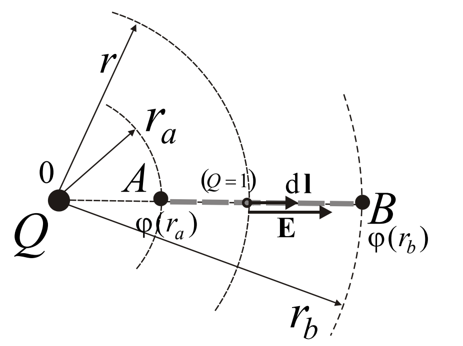
Bodový náboj je fyzikální abstrakce. V místě, kde je bodový náboj, je nekonečně velká intenzita elektrického pole, tudíž by bylo třeba vykonat nekonečně velkou práci při přemístění jednotkového bodového kladného náboje do tohoto místa. Tomu odpovídá i nekonečně velký potenciál jako potenciální energie, která by se tím získala.

$$\lim_{r\to 0}\varphi(r)=\infty$$

{Př. ES/32} Napětí mezi dvěma body v elektrickém poli

Jak velkou práci vykoná elektrostatické pole při přenesení jednotkového kladného náboje mezi dvěma body v elektrickém poli, které je vybuzeno druhým bodovým nábojem? Jaká bude práce v opačném směru?

Navazuje na
{Př. ES/3} Intenzita elektrického pole buzená bodovým nábojem
ES-g Napětí a potenciál v elektrostatickém poli
{Př. ES/31} Potenciál bodového náboje



(Obr. ES-49) Napětí mezi bodem A a B

Napětí mezi dvěma body v elektrickém poli je definováno jako práce, kterou vykoná elektrické pole přenesením jednotkového kladného bodového náboje mezi těmito body.
Práce obecně je dána integrálem síly po dráze

$$A=\int_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

V našem případě je síla působící na bodový jednotkový náboj rovna intenzitě elektrického pole

$$\boldsymbol{F}(Q=1)=(Q=1)\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$$

Když vybudíme elektrické pole pomocí náboje ***Q***, který bude v bodě **0**, a necháme ho působit na druhý jednotkový zkušební náboj, který bude v bodě ***A***, bude se tento náboj pohybovat ve směru siločáry do bodu ***B***, **elektrostatické pole vykoná práci** o velikosti, která bude rovna napětí mezi bodem ***A*** a ***B***

$$U_{AB}=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{rb}^{r_a}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

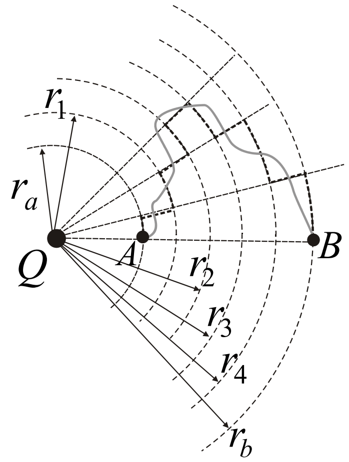
Srovnáme-li tento vztah se vztahem pro potenciál bodového náboje (ES*24), vidíme, že je napětí skutečně dáno rozdílem potenciálů v bodě A a B a že na velikosti konstant vůbec nezáleží, ve vztazích se odečtou.

$$U_{AB}=\varphi(r_a)-\varphi(r_b)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_a}+K-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_b}-K=$$
$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_a}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_b}$$

Když budeme chtít bodový náboj přemístit zpět z bodu ***B*** do bodu ***A***, budeme naopak muset práci vykonat, protože budeme působit proti směru síly(intenzity) v elektrickém poli. Když si zvolíme mezi body pro obecnost křivočarou dráhu, je možno jí rozdělit na velký počet schodových úseků a dráhu dostatečně přesně aproximovat. Práce se bude konat pouze na úsecích v radiálním směru. K dráze v tečném směru je intenzita kolmá a vykonaná práce je nulová. V našem případě bude platit

$$\int_B^A \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{rb}^{r4} E(r)\,\mathrm{d}r + \int_{r4}^{r3} E(r)\,\mathrm{d}r + \int_{r3}^{r2} E(r)\,\mathrm{d}r + \int_{r2}^{r1} E(r)\,\mathrm{d}r + \int_{r1}^{r_a} E(r)\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r3} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_a}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right) = \varphi_B - \varphi_A$$



(Obr. ES-50) Zpětný přesun náboje z bodu B do bodu A

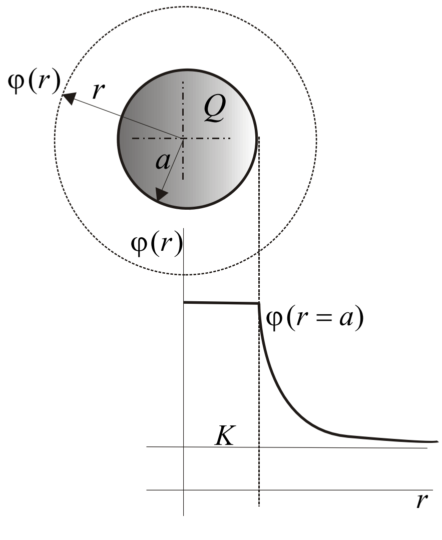
Podle očekávání jsme museli vykonat stejně velikou práci, jako jsme původně získali, elektrostatické pole je potenciálové, platí

$$\oint_l \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

{Př. ES/33} Potenciál nabité vodivé koule

Jak velký je skalární potenciál nabité vodivé koule v elektrostatickém poli?

Navazuje na
ES-g Napětí a potenciál v elektrostatickém poli
{Př. ES/17} Elektrické pole nabité vodivé koule ve vakuu



(Obr. ES-51) Potenciál nabité vodivé koule

Elektrické pole vně koule na libovolném poloměru ***r*** je zcela stejné, jako pole bodového náboje. Zachová svoji sférickou symetrii. Pro intenzitu pole a tedy i pro potenciál bude platit stejný vztah, jako pro bodový náboj

$$r \geq a$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon \cdot r^2}$$

$$\varphi(r) = -\int E(r)\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r} + K$$

Na povrchu koule bude mít potenciál hodnotu

$$\varphi(r = a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a} + K$$

Uvnitř koule bude tato hodnota již zachována. Potenciál už se nebude měnit, intenzita elektrického pole je zde nulová, žádná další práce se nekoná

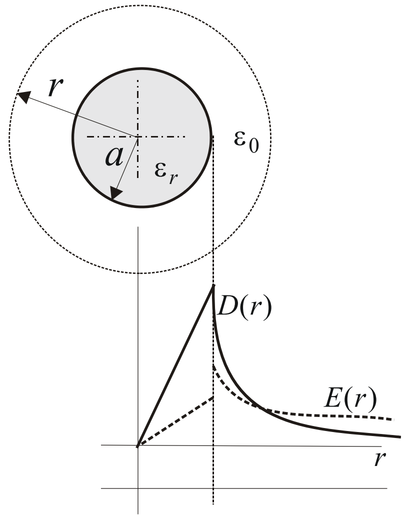
$$r \leq a$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a} + K = konst$$

{Př. ES/34} Potenciál nabité dielektrické koule

Jak velká je intenzita elektrického pole a potenciál uvnitř a vně dielektrické koule s permitivitou ε_r, která je umístěna ve vzduchu a rovnoměrně nabita elektrickým nábojem s objemovou hustotou ρ?

Navazuje na
ES-e Zobecnění Gaussovy věty pro elektrickou indukci
{Př. ES/17} Elektrické pole nabité vodivé koule ve vakuu
ES-g Napětí a potenciál v elektrostatickém poli



(Obr. ES-52) Potenciál nabité dielektrické koule

Podle Gaussovy věty musí platit pro elektrickou indukci na libovolném poloměru vztah

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi\, r^2}$$

Náboj Q je celkový volný náboj, který je uzavřen do obalové plochy vedené daným místem. Budeme-li počítat elektrické pole uvnitř dielektrické koule pro poloměry

$$r \le a$$

obalíme do pomyslné sférické plochy část volného náboje o velikosti

$$Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

Elektrická indukce uvnitř koule bude

$$D(r) = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi . r^3}{4\pi\, r^2} = \frac{\rho \cdot r}{3}$$

Pro intenzitu elektrického pole uvnitř koule bude platit

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\rho \cdot r}{3\varepsilon_0 \varepsilon_r},$$

pomocí permitivity jsme do vztahu započítali i účinek vázaných nábojů v dielektriku. Na povrchu a vně dielektrické koule pro poloměry

$$r \ge a$$

obemkne obalová plocha celý náboj a pro elektrickou indukci bude platit

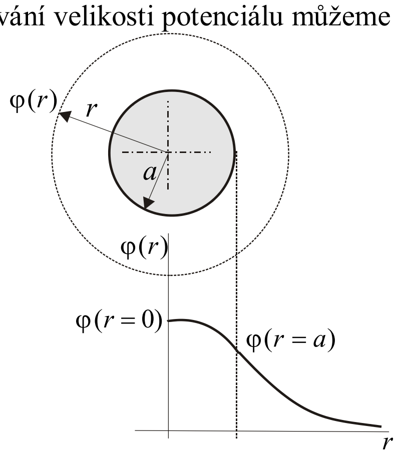
$$D(r) = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi . a^3}{4\pi . r^2} = \frac{\rho \cdot a^3}{3 \cdot r^2}$$

a pro intenzitu elektrického pole

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\rho \cdot a^3}{3\varepsilon_0\, r^2}$$

Při určování velikosti potenciálu můžeme naopak postupovat z vnějšku dovnitř koule.

$$r \ge a$$



(Obr. ES-53) Potenciál nabité dielektrické koule

Zvolíme-li hodnotu potenciálu v nekonečnu nulovou, bude pro potenciál elektrického pole vně koule platit:

$$\varphi(r \to \infty) = 0 \Rightarrow K_1 = 0$$

Obecně si můžeme zvolit hodnotu potenciálu v kterémkoliv bodě jakoukoliv, tato volba je nejjednodušší, protože se konstanty zbavíme.

$$\varphi(r) = -\int E(r)\,\mathrm{d}\,r + K_1 = \frac{\rho \cdot a^3}{3\varepsilon_0\, r}$$

Potenciál musí být všude spojitý, na hranici s dielektrickou koulí bude mít hodnotu

$$\varphi(r=a)=\frac{\rho\cdot a^2}{3\varepsilon_0} \qquad \text{(ES*28)}$$

Uvnitř koule bude pro potenciál opět platit obecný vztah, ovšem s jinou konstantou, jejíž velikost se musí stanovit z podmínky spojitosti potenciálu na rozhraní

$$\varphi(r)=-\int E(r)\,\mathrm{d}r+K_2=-\int\frac{\rho\cdot r}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}\,\mathrm{d}r+K_2=-\frac{\rho\, r^2}{6\,\varepsilon_0\varepsilon_r}+K_2$$

Na hranici dielektrické koule s vnějším prostorem bude pro potenciál platit

$$\varphi(r=a)=-\frac{\rho\, a^2}{6\,\varepsilon_0\varepsilon_r}+K_2$$

a srovnáním s hodnotou na rozhraní z druhé strany bude

$$\varphi(r=a)=-\frac{\rho\, a^2}{6\,\varepsilon_0\varepsilon_r}+K_2=\frac{\rho\, a^2}{3\varepsilon_0}$$

$$K_2=\frac{\rho\, a^2}{6\,\varepsilon_0\varepsilon_r}+\frac{\rho\, a^2}{3\varepsilon_0}$$

Obecný vztah pro potenciál uvnitř dielektrické koule potom bude

$$\varphi(r)=-\frac{\rho\, r^2}{6\,\varepsilon_0\varepsilon_r}+\frac{\rho\, a^2}{6\,\varepsilon_0\varepsilon_r}+\frac{\rho\, a^2}{3\varepsilon_0}$$

Potenciál uprostřed koule bude

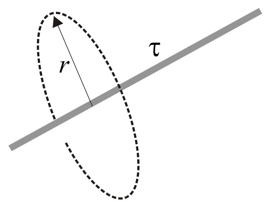
$$\varphi(r=0)=\frac{\rho\, a^2}{6\,\varepsilon_0\varepsilon_r}+\frac{\rho\, a^2}{3\varepsilon_0}$$

{Př. ES/35} Skalární potenciál tenkého nabitého vlákna

Jak velký skalární potenciál vybudí na poloměru $\boldsymbol{r}$ tenké, nekonečně dlouhé vlákno, nabité nábojem s liniovou hustotou $\boldsymbol{\tau}$?

Navazuje na
{Př. ES/19} Elektrické pole rovnoměrně nabitého dlouhého tenkého vodiče ve vakuu
ES-g Napětí a potenciál v elektrostatickém poli
{Př. ES/31} Potenciál bodového náboje

V případě náboje rozloženého na přímce má elektrostatické pole válcovou symetrii, je vhodné ho popsat ve válcové soustavě, celý problém se navíc velice zjednoduší tím, když uvážíme, že jsou všechny veličiny závislé pouze na poloměru vzdálenosti od nabitého vlákna, z hlediska symetrie vůbec nemůže záležet na axiální vzdálenosti nebo úhlu natočení.



(Obr. ES-54) Potenciál nabitého vlákna

Obecný definiční vztah

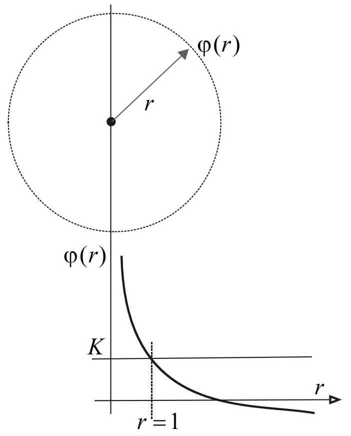
$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}(\varphi)$$

přejde s ohledem na (ES*25) na

$$E(r)=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$$

Intenzita elektrického pole buzeného nabitým vláknem je podle {Př. ES/19}

$$E(r)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r}$$



(Obr. ES-55) Rozložení potenciálu tenkého nabitého vlákna

Pro potenciál bude obecně platit

$$\varphi(r) = -\int E(r)\,\mathrm{d}r + K = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln r + K = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{r} + K$$

Potenciál je nejednoznačný, konstanta ***K*** představuje v tomto případě velikost potenciálu na jednotkovém poloměru

$$\varphi(r=1) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{r=1} + K = K$$

Na nulovém poloměru i nekonečně velkém poloměru je potenciál nekonečně veliký

$$\lim_{r\to 0}\varphi(r) = +\infty$$

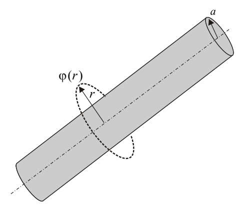
$$\lim_{r\to\infty}\varphi(r) = -\infty$$

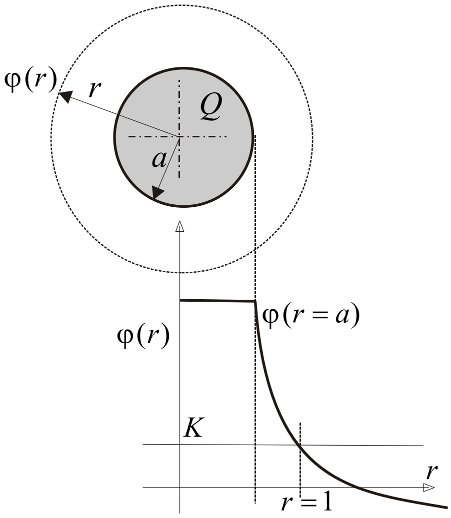
Nekonečně veliké hodnoty potenciálu v hraničních bodech vyplývají z fyzikálního hlediska z dvojí abstrakce, kterou nabité vlákno představuje. Vlákno je nekonečně tenké, náboj je natěsnaný na nekonečně malém prostoru, má tedy na sobě nekonečně velikou intenzitu elektrického pole. Vlákno je i nekonečně dlouhé, představuje tedy součtem nekonečně velký náboj.

{Př. ES/36} Potenciál nabitého válcového vodiče

Jak velký skalární potenciál vybudí na poloměru **r** dlouhý válcový vodič rovnoměrně nabitý liniovou hustotou náboje **τ**?

Navazuje na
ES-g Napětí a potenciál v elektrostatickém poli
{Př. ES/35} Skalární potenciál tenkého nabitého vlákna





(Obr. ES-56) Rozložení potenciálu od válcového vodiče

Elektrické pole vně válce na poloměru

$$r \geq a$$

zachová svoji válcovou symetrii. Pro intenzitu pole a tedy i pro potenciál bude platit stejný vztah, jako pro nabité vlákno

$$E(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r}$$

$$\varphi(r) = -\int E(r)\,\mathrm{d}r = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln r + K = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{r} + K$$

Konstanta K opět představuje velikost potenciálu na jednotkovém poloměru

$$\varphi(r=1) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{1} + K = K$$

Na povrchu válce bude mít potenciál hodnotu

$$\varphi(r=a) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{a} + K$$

Uvnitř válce bude tato hodnota již zachována. Potenciál už se nebude měnit, intenzita elektrického pole je zde nulová

$$r \leq a$$

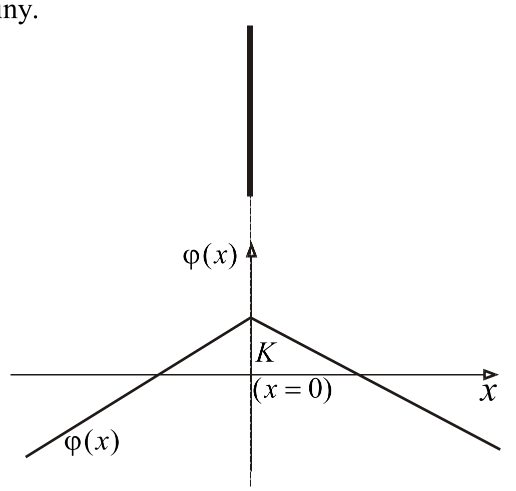
$$\varphi(r \leq a) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{a} + K = konst$$

{Př. ES/37} Potenciál rovnoměrně nabité rozlehlé roviny

Jak velký skalární potenciál vybudí ve vzdálenosti **x** nekonečně rozlehlá rovina rovnoměrně nabitá nábojem s plošnou hustotou $\boldsymbol{\sigma}$?

Navazuje na
ES-g Napětí a potenciál v elektrostatickém poli
{Př. ES/21} Elektrické pole nekonečně rozlehlé rovnoměrně nabité vodivé roviny

V případě náboje rozloženého na rovině má elektrostatické pole rovinnou symetrii, je vhodné ho popsat v kartézské soustavě souřadnic. Celý problém se však velice zjednoduší tím, když uvážíme, že jsou všechny veličiny závislé z hlediska symetrie pouze na jednom rozměru a to kolmé vzdálenosti od roviny.



Obecný vztah

$$\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}(\varphi)$$

přejde s ohledem na (ES*24) na

$$E(x) = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

Pro elektrické pole ve vzdálenosti x od roviny platí podle {Př. ES/21}

$$E(x) = \frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon_0} = konst \neq f(x)$$

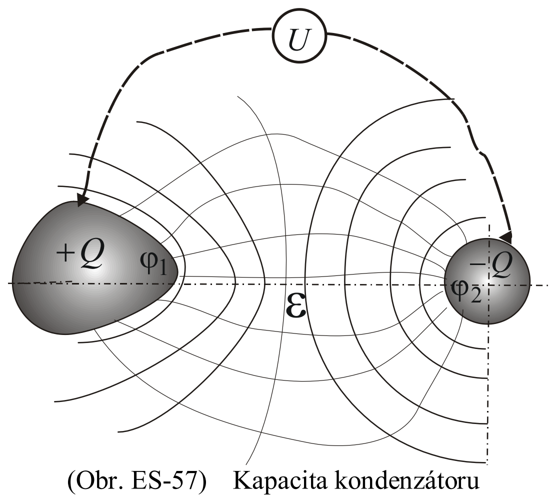
Pro potenciál bude potom platit

$$\varphi(x) = -\int E(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\sigma}{2\varepsilon}x + K \qquad \text{(ES*29)}$$

Potenciál klesá lineárně na obě strany od nabité roviny. Konstanta ***K*** představuje obecně velikost potenciálu na vlastní rovině

$$\varphi(x=0) = K$$

ES-h Kapacita



(Obr. ES-57) Kapacita kondenzátoru

Kapacita kondenzátoru udává vztah mezi napětím na elektrodách a nábojem mezi elektrodami. Připojíme-li mezi dvě elektrody zdroj napětí, dojde k přesunu elektronů z jedné elektrody na druhou. Po krátkém čase se objeví na jedné elektrodě kladný náboj, na druhé záporný. Náboje se budou přelévat tak dlouho, dokud se nevyrovná napětí zdroje s napětím daným integrálem intenzity elektrického pole nahromaděných nábojů. Velikost náboje je tedy přímo úměrná napětí. Konstanta úměrnosti se nazývá kapacita.

$$Q = C\cdot U$$

Jednotkou kapacity je Farad [F]. Kondenzátor je součást elektrických obvodů, která se vyznačuje vlastností, že má kapacitu.

Kapacita je závislá na tvaru a vzdálenosti elektrod a také na permitivitě materiálu, který se nachází mezi elektrodami. Podle tvaru elektrod rozlišujeme několik základních druhů kondenzátorů: Kondenzátor deskový, válcový nebo s kulovými elektrodami.

Chceme-li určit kapacitu, musíme pro určité napětí mezi elektrodami stanovit celkovou velikost náboje, který by se na elektrodách objevil. Numerické programy obvykle vypočítají pro dané tvary elektrod a napětí mezi nimi elektrické pole například řešením Poissonovy rovnice pro skalární potenciál, z hodnot elektrické indukce na obalové ploše kolem elektrody stanoví velikost volného náboje a určí kapacitu.

Kapacitu lze určit i z celkové hodnoty energie elektrického pole v kondenzátoru, kterou vypočteme integrací ze známé hodnoty intenzity elektrického pole a elektrické indukce v libovolném místě.

$$W_e = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}V$$

Pro některé jednoduché tvary elektrod, u kterých se dají veličiny pole vypočítat, lze kapacitu poměrně jednoduše určit pomocí následujícího schématu, jehož praktické použití bude ukázáno na řadě příkladů.

Na počátku známe rozměry elektrod, vzdálenost a permitivitu materiálu mezi elektrodami.

a) Předpokládáme pomyslně, že mezi elektrody **přivedeme napětí**, na elektrodách se objeví s**tejně velké náboje s opačným znaménkem**.

b) Pro předpokládaný náboj na elektrodách lze určit s ohledem na tvar elektrod **rozložení elektrické indukce a potom také rozložení intenzity elektrického pole nebo skalárního potenciálu**

$$\boldsymbol{E} = f(Q)$$
$$\varphi = f(Q)$$

c) Z veličin elektrického pole je možné se zpětně dostat k odpovídajícímu napětí na elektrodách buď integrací intenzity elektrického pole nebo z rozdílu potenciálů

$$U = \int \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}\boldsymbol{l} = g(Q)$$
$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = g(Q)$$

d) Převrácením vztahu pro napětí a srovnáním s definičním vztahem pro kapacitu dostaneme závislost, ze které velikost kapacity přímo vyplyne

$$Q = g^{-1}(U) \quad \Rightarrow \quad Q = C \cdot U \quad \Rightarrow \quad C$$

Velikost kapacity lze také určit přímo z energie elektrického pole, pokud jeho hodnoty ve všech bodech známe

$$C = \frac{2W_e}{U^2} = \frac{\iiint_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}V}{U^2}$$

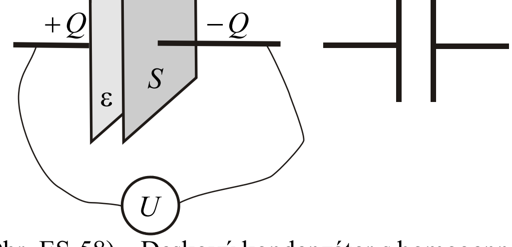
Velice důležitý vztah udávající závislost intenzity elektrického pole na napětí mezi elektrodami dostaneme zpětným dosazením náboje z bodu d) do výchozího vztahu pro intenzitu elektrického pole v bodě b) výpočtu. Maximální dovolená intenzita elektrického pole v určitém uspořádání a pro určité izolační materiály je mírou elektrické pevnosti. To bude popsáno ve zvláštní kapitole.

$$\mathbf{E} = f(Q) = f(g^{-1}(U))$$

{Př. ES/38} Kapacita deskového kondenzátoru s homogenním dielektrikem

Jak velká je kapacita deskového kondenzátoru, který má rozměry podle obrázku (Obr. ES-58)? Mezi deskami je dielektrikum s relativní permitivitou ε_r.

Navazuje na:
ES-h Kapacita
{Př. ES/23} Elektrické pole dvou opačně nabitých rovin



(Obr. ES-58) Deskový kondenzátor s homogenním dielektrikem

Kapacita kondenzátoru je konstanta udávající vztah mezi nábojem a napětím na elektrodách

$$Q = C \cdot U$$

Aby bylo možné se k tomuto vztahu dopočítat, je nutné na začátku pomyslně předpokládat, že jsme mezi desky kondenzátoru přiložili napětí a na deskách se objevily stejně veliké ale opačné náboje, na levé desce například +Q, na pravé desce –Q.

Pro tento náboj vznikne mezi deskami elektrické pole, které je totožné s polem dvou rovnoběžných rovin. Elektrická indukce a intenzita elektrického pole bude podle {Př. ES/23}

$$D = \frac{Q}{S} = konst\,, \qquad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = konst$$

Máme-li vyjádřeny veličiny elektrického pole pro daný náboj na deskách Q, je možné zpětně dopočítat odpovídající napětí mezi deskami a získat tak vztah pro kapacitu. Pro napětí platí

$$U = \int_{x=0}^{x=d} E(x) \cdot \mathrm{d}\,x = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} \int_{x=0}^{x=d} \mathrm{d}\,x = Q \frac{d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}\,.$$

Z definičního vztahu pro kapacity vyplyne po převrácení předchozího vztahu

$$Q = C \cdot U = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} U \qquad \text{(ES*30)}$$

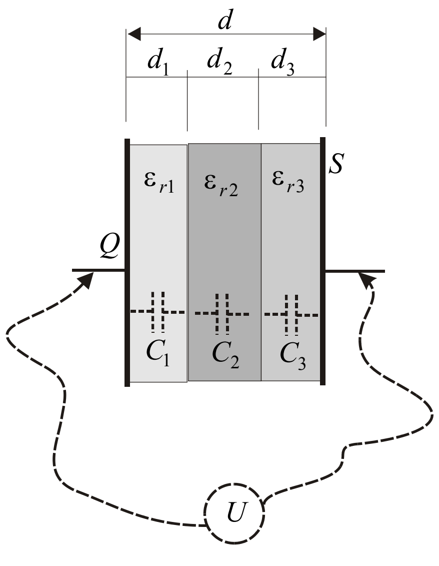
Kapacita deskového kondenzátoru je tedy

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} \qquad \text{(ES*31)}$$

{Př. ES/39} Kapacita deskového kondenzátoru se složeným dielektrikem

Jak velká je kapacita v deskovém kondenzátoru s dielektrikem děleným na tři části a s rozměry podle obrázku (Obr. ES-59)?

Navazuje na
ES-h Kapacita
{Př. ES/38} Kapacita deskového kondenzátoru s homogenním dielektrikem
{Př. ES/23} Elektrické pole dvou opačně nabitých rovin



(Obr. ES-59) Deskový kondenzátor se složeným dielektrikem

Mezi deskami kondenzátoru bude podle {Př. ES/23} po přivedení napětí všude stejná elektrická indukce

$$D = \frac{Q}{S} = konst$$

Intenzita elektrického pole však závisí na polarizaci dielektrika, je respektována relativní permitivitou a bude mít v každém úseku jinou hodnotu

V prvním úseku

$$0 \le x \le d_1$$

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S}$$

Ve druhém úseku

$$d_1 \le x \le d_1 + d_2$$

$$E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S}$$

Ve třetím úseku

$$d_1 + d_2 \le x \le d_1 + d_2 + d_3$$

$$E_3 = \frac{D}{\varepsilon_3} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r3} S}$$

Integrací lze zpětně vypočítat napětí mezi deskami

$$U = \int_{x=0}^{x=d_1+d_2+d_3} E(x).\mathrm{d}\,x = \int_{x=0}^{d_1} E_1(x).\mathrm{d}\,x + \int_{x=d_1}^{d_1+d_2} E_2(x).\mathrm{d}\,x + \int_{x=d_1+d_2}^{d_1+d_2+d_3} E_3(x).\mathrm{d}\,x$$

$$U = Q\left[\frac{d_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S} + \frac{d_3}{\varepsilon_0\varepsilon_{r3}S}\right]$$

Výpočtem náboje z předchozího vztahu se dostaneme k definičnímu vztahu pro kapacitu

$$Q = C\cdot U = \frac{1}{\left[\frac{d_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S} + \frac{d_3}{\varepsilon_0\varepsilon_{r3}S}\right]}\cdot U \qquad \text{(ES*32)}$$

Pro kapacitu deskového kondenzátoru s děleným dielektrikem potom vyplyne

$$C = \frac{1}{\left[\frac{d_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S} + \frac{d_3}{\varepsilon_0\varepsilon_{r3}S}\right]} = \frac{\varepsilon_0 S}{\left[\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} + \frac{d_3}{\varepsilon_{r3}}\right]} \qquad \text{(ES*33)}$$

Toto uspořádání se chová tak, jako by se jednalo o tři kondenzátory spojené do série, kapacita každého pomyslného kondenzátoru odpovídá kapacitě jedné vrstvy dielektrika

$$C = \frac{1}{\left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right]}$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S}{d_1} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S}{d_2} \qquad C_3 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r3}S}{d_3}$$

{Př. ES/40} Kapacita deskového kondenzátoru - číselný příklad

Vypočtěme kapacitu **C** deskového kondenzátoru se složeným dielektrikem podle (Obr. ES-59), Rozměry a permitivity jednotlivých částí kondenzátoru jsou: **$S=ab=25\ cm^2$**, **$d_1=3$ mm**, **$\varepsilon_{r1}=5$**, **$d_2=6$ mm**, **$\varepsilon_{r2}=2$**, **$d_3=2$ mm**, **$\varepsilon_{r3}=10$**.

Navazuje na

{Př. ES/39} Kapacita deskového kondenzátoru se složeným dielektrikem

Podle vztahu (ES*33) je kapacita dána vztahem

$$C = \frac{1}{\left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right]} = \frac{1}{\left[\frac{d_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S} + \frac{d_3}{\varepsilon_0\varepsilon_{r3}S}\right]} =$$

$$= \frac{1}{\left[\frac{3\cdot 10^{-3}}{\varepsilon_0 5\cdot 25\cdot 10^{-2}} + \frac{6\cdot 10^{-3}}{\varepsilon_0 2\cdot 25\cdot 10^{-2}} + \frac{2\cdot 10^{-3}}{\varepsilon_0 10\cdot 25\cdot 10^{-2}}\right]} = 582{,}6\ pF$$

Tento vztah představuje pomyslně kapacitu 3 deskových kondenzátorů řazených do série. Kapacity dílčích kondenzátorů jsou

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S}{d_1} = \frac{\varepsilon_0\cdot 5\cdot 25\cdot 10^{-2}}{3\cdot 10^{-3}} = 3{,}69\ nF$$

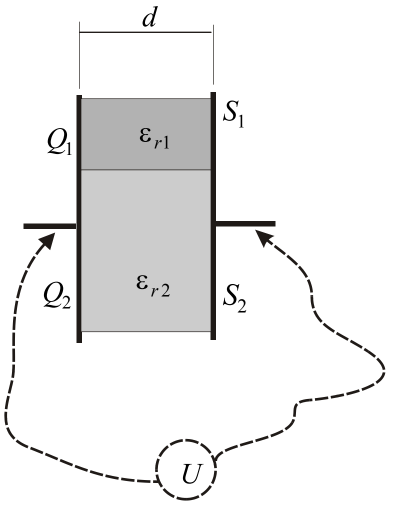
$$C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S}{d_2} = \frac{\varepsilon_0\cdot 2\cdot 25\cdot 10^{-2}}{6\cdot 10^{-3}} = 737{,}8\ pF$$

$$C_3 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r3}S}{d_3} = \frac{\varepsilon_0\cdot 10\cdot 25\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{-3}} = 11{,}1\ nF$$

{Př. ES/41} Kapacita deskového kondenzátoru s příčně děleným dielektrikem

Jak velká je kapacita deskového kondenzátoru s příčně děleným dielektrikem s rozměry a parametry dielektrika podle obrázku (Obr. ES-60)?

Navazuje na
ES-h Kapacita
{Př. ES/39} Kapacita deskového kondenzátoru se složeným dielektrikem



(Obr. ES-60) Kondenzátor s příčně děleným dielektrikem

Napětí na obou částech kondenzátoru musí být stejné

$$U = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}.$$

Kapacita jednotlivých částí kondenzátoru je

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S_1}{d} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S_2}{d}$$

Na každé části kondenzátoru bude tedy náboj

$$Q_1 = C_1 U$$
$$Q_2 = C_2 U$$

Celkový náboj na kondenzátoru je

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U = (C_1 + C_2)U = C \cdot U$$

Z definičního vztahu vyplývá pro celkovou kapacitu

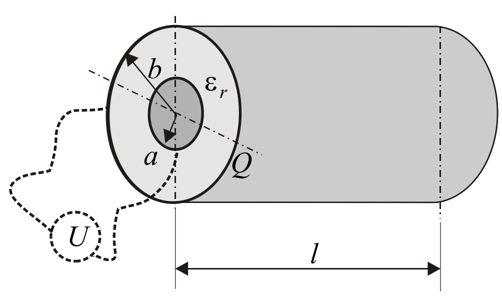
$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S}{d}$$

Celá soustava se chová jako dva kondenzátory spojené paralelně.

{Př. ES/42} Kapacita válcového kondenzátoru s homogenním dielektrikem

Jak veliká je kapacita válcového kondenzátoru s homogenním dielektrikem a rozměry podle obrázku (Obr. ES-61)?

Navazuje na
ES-h Kapacita
{Př. ES/25} Elektrické pole dvou opačně nabitých koaxiálních válců



(Obr. ES-61) Válcový kondenzátor s homogenním dielektrikem

Mezi deskami kondenzátoru vznikne po připojení napětí elektrické pole stejné jako mezi koncentrickými, opačně nabitými válci. Elektrická indukce bude v celém kondenzátoru popsána vztahem

$$D(r) = \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot l} = \frac{\tau}{2\pi \cdot r}$$

Intenzita elektrického pole bude

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}\frac{1}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r}$$

Napětí mezi deskami bude po integraci

$$U = \int_{r=a}^{b} E(r).\mathrm{d}r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}\int_{r=a}^{b}\frac{1}{r}\mathrm{d}r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Výpočtem náboje z předchozího vztahu vyplyne přímo definiční vztah pro kapacitu

$$Q = C \cdot U = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} l \cdot U$$

Kapacita válcového kondenzátoru bude tedy

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} l\,.$$

V případě koaxiálního kabelu, který je velice podobný válcovému kondenzátoru, nemůžeme mluvit o pevně specifikované délce. V tomto případě používáme pojem kapacita na jednotku délky

$$C/l = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\,.$$

{Př. ES/43} Kapacita válcového kondenzátoru - číselný příklad

Navrhněte vnější poloměr koaxiální kabelu ***b*** tak, aby měl při délce ***l***=75 cm kapacitu 50 pF. Poloměr vnitřního vodiče ***a***=1mm a relativní permitivita dielektrika ε_r=3.2.

Navazuje na
{Př. ES/41} Kapacita deskového kondenzátoru s příčně děleným dielektrikem

Kapacita je dána vztahem

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} l$$

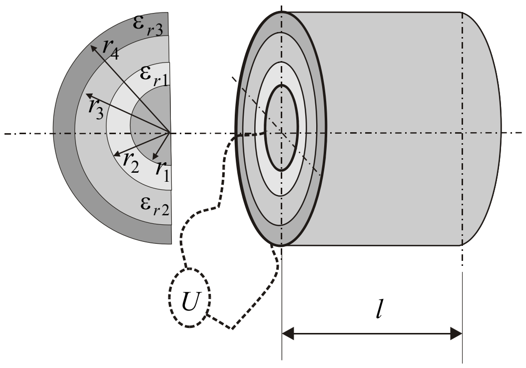
takže

$$b = a\cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}{C}} = 1\cdot 10^{-3}\cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi\varepsilon_0\cdot 3.2\cdot 75\cdot 10^{-2}}{50\cdot 10^{-12}}} = 14.45\text{mm}$$

{Př. ES/44} Kapacita válcového kondenzátoru se složeným dielektrikem

Jak velká je kapacita válcového kondenzátoru se složeným dielektrikem a rozměry podle obrázku (Obr. ES-62) ?

Navazuje na
ES-h Kapacita
{Př. ES/42} Kapacita válcového kondenzátoru s homogenním dielektrikem



(Obr. ES-62) Válcový kondenzátor se složeným dielektrikem

Po připojení napětí se na elektrodách objeví opačné náboje ***Q*** a vznikne mezi nimi elektrické pole, jehož indukce bude všude stejná bez ohledu na velikost permitivity

$$D(r) = \frac{Q}{2\pi r l} = \frac{\tau}{2\pi r}\,.$$

Intenzita elektrického pole závisí na permitivitě a bude mít v každém úseku jinou hodnotu.
V první úseku bude intenzita

$$r_1 \le r \le r_2$$

$$E_1(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} l}\frac{1}{r}$$

Ve druhém úseku

$$r_2 \le r \le r_3$$

$$E_2(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} l}\frac{1}{r}$$

Ve třetím úseku

$$r_3 \le r \le r_4$$

$$E_3(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r3} l}\frac{1}{r}$$

Integrací intenzity elektrického pole získáme vztah pro napětí mezi elektrodami

$$U = \int_{r=r_1}^{r_4} E(r).\mathrm{d}r = \int_{r=r_1}^{r_2} E_1(r).\mathrm{d}r + \int_{r=r_2}^{r_3} E_2(r).\mathrm{d}r + \int_{r=r_3}^{r_4} E_3(r).\mathrm{d}r$$

$$U = Q\left[\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}l} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}l} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r3}l}\right]$$

Z definice kapacity vyplyne

$$Q = C \cdot U = \frac{1}{\left[\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}l} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}l} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r3}l}\right]} \cdot U$$

Z toho kapacita válcového kondenzátoru

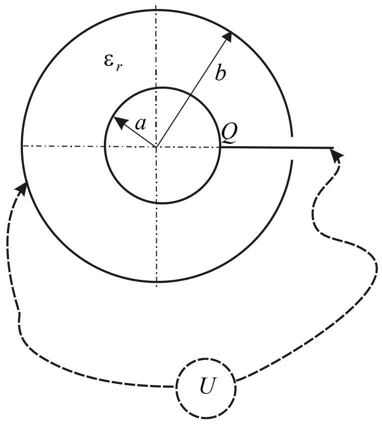
$$C = \frac{1}{\left[\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}l} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}l} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r3}l}\right]} = \frac{1}{\left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right]} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\left[\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\varepsilon_{r1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{\varepsilon_{r2}} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{\varepsilon_{r3}}\right]}.$$

Válcový kondenzátor v tomto uspořádání se chová jako tři kondenzátory spojené do série. Každý z kondenzátorů je reprezentován jednou vrstvou dielektrika

{Př. ES/45} Kapacita kondenzátoru se sférickými elektrodami a homogenním dielektrikem

Jak velká je kapacita kondenzátoru s kulovými elektrodami a rozměry podle obrázku (Obr. ES-63) ?

Navazuje na
ES-h Kapacita
{Př. ES/24} Elektrické pole dvou opačně nabitých koncentrických koulí



(Obr. ES-63) Kondenzátor s kulovými elektrodami a homogenním dielektrikem

Mezi elektrodami kondenzátoru vznikne po připojení napětí elektrické pole stejné jako mezi koncentrickými opačně nabitými koulemi podle {Př. ES/24}. Elektrická indukce bude v celém kondenzátoru popsána vztahem

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Intenzita elektrického pole bude

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r^2}$$

Napětí mezi deskami po integraci

$$U = \int_{r=a}^{b} E(r)\cdot \mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{r=a}^{b}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Z definice kapacity vyplyne

$$Q = C \cdot U = \frac{4\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \cdot U$$

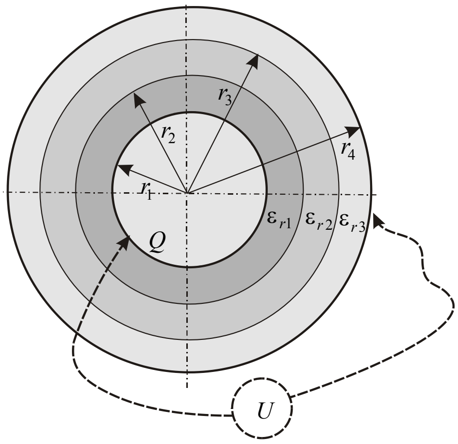
Kapacita kondenzátoru s kulovými elektrodami bude

$$C = \frac{4\pi \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \tag{ES*34}$$

{Př. ES/46} Kapacita kondenzátoru se sférickými elektrodami a složeným dielektrikem

Jakou kapacitu má kulový kondenzátor se složeným dielektrikem a rozměry podle obrázku (Obr. ES-64)?

Navazuje na
ES-h Kapacita
{Př. ES/45} Kapacita kondenzátoru se sférickými elektrodami a homogenním dielektrikem



(Obr. ES-64) Kapacita kulového kondenzátoru se složeným dielektrikem

Po připojení napětí vznikne mezi elektrodami elektrické pole, jehož indukce bude všude, bez ohledu na velikost permitivity, popsána vztahem

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Intenzita elektrického pole závisí na permitivitě a bude mít v každém úseku jinou hodnotu:

První úsek $r_1 \le r \le r_2$

$$E_1(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} \frac{1}{r^2}$$

Druhý úsek $r_2 \le r \le r_3$

$$E_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} \frac{1}{r^2}$$

Třetí úsek $r_3 \le r \le r_4$

$$E_3(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r3}} \frac{1}{r^2}$$

Po integraci intenzity elektrického pole získáme napětí mezi elektrodami

$$U = \int_{r=r_1}^{r_4} E(r).\mathrm{d}r = \int_{r=r_1}^{r_2} E_1(r).\mathrm{d}r + \int_{r=r_2}^{r_3} E_2(r).\mathrm{d}r + \int_{r=r_3}^{r_4} E_3(r).\mathrm{d}r$$

$$U = Q\left[\frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} + \frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} + \frac{\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r3}}\right]$$

Z definice kapacity vyplyne pro náboj na elektrodách

$$Q = C \cdot U = \frac{1}{\left[\frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} + \frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} + \frac{\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r3}}\right]} \cdot U$$

Kapacita kondenzátoru bude

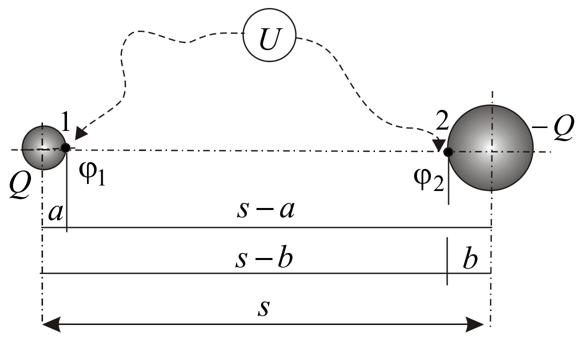
$$C = \frac{1}{\left[\frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} + \frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} + \frac{\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r3}}\right]} = \frac{1}{\left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right]} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left[\frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{\varepsilon_{r1}} + \frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}}{\varepsilon_{r2}} + \frac{\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}}{\varepsilon_{r3}}\right]}$$

Kondenzátor v tomto uspořádání se opět chová jako tři sériově spojené kondenzátory, ve kterých je kapacita každé části reprezentována příslušnou slupkou dielektrika.

{Př. ES/47} Vzájemná kapacita kulových elektrod

Jak veliká je kapacita mezi kulovými elektrodami ve vzduchu s rozměry podle obrázku (Obr. ES-65)?

Navazuje na
ES-h Kapacita
{Př. ES/33} Potenciál nabité vodivé koule



(Obr. ES-65) Kapacita mezi dvěma kulovými elektrodami vedle sebe

Při výpočtu kapacity je třeba stanovit vzájemný vztah mezi napětím na elektrodách a nábojem, kterým se tyto elektrody nabijí. Budeme-li předpokládat, že mezi elektrody přivedeme napětí o velikosti **U**, potom se například levá elektroda nabije nábojem **Q** a pravá nábojem **–Q**, mezi elektrodami vznikne elektrickém pole, z jehož velikosti je možné zpětně vypočítat napětí. Pro výpočet napětí je v tomto případě možné s výhodou použít potenciály.

Vyznačíme-li na levé elektrodě bod 1 a na pravém elektrodě bod 2, bude dán výsledný potenciál v těchto bodech součtem potenciálů od vodiče 1 a 2, protože je nutné v každém bodě sečíst potenciál všech nabitých objektů:

V bodě jedna na elektrodě 1 bude potenciál

$$\varphi_1 = \underbrace{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} + K_1}_{od\ elektrody\ 1} + \underbrace{\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{s-a} + K_2}_{od\ elektrody\ 2}$$

V bodě 2 na elektrodě 2 bude potenciál

$$\varphi_2 = \underbrace{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{s-b} + K_1}_{od\ elektrody 1} + \underbrace{\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{b} + K_2}_{od\ elektrody 2}$$

Napětí mezi elektrodami je dané rozdílem potenciálů

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right)$$

Z definičního vztahu pro kapacitu

$$Q = C \cdot U = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right)} \cdot U$$

Pro kapacitu vyplyne vztah

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right)}$$

Takovýto výpočet platí pouze za předpokladu, že je vzdálenost mezi kulovými elektrodami podstatně větší, než jejich poloměry

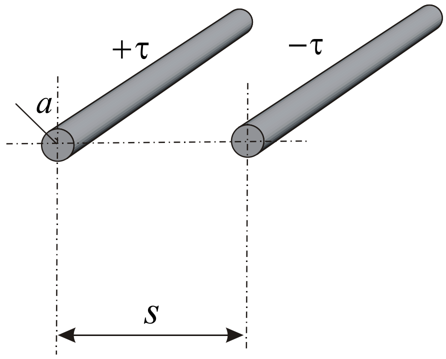
$$s >> a, b$$

Potenciál elektrod totiž počítáme zcela stejně, jako by se jednalo o osamocené kulové elektrody, tedy elektrody, na kterých je náboj symetricky rozložen po celém povrchu. Obě elektrody se však navzájem ovlivňují a tento předpoklad zcela přesně neplatí. V nejbližším místě mezi elektrodami je náboj rozložen s větší povrchovou hustotou, než na vnější straně.

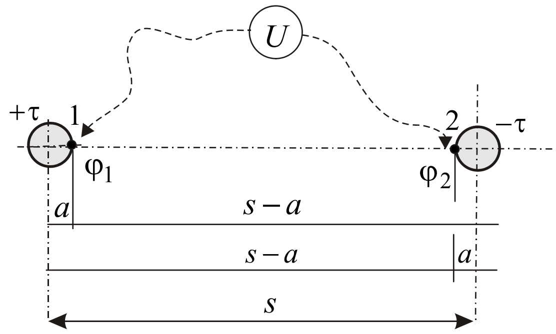
{Př. ES/48} Kapacita dvouvodičového vedení

Jak veliká je kapacita na jednotku délky dvouvodičového vedení s rozměry podle obrázku (Obr. ES-66), (Obr. ES-66)? Vodiče se nacházejí ve vzduchu.

Navazuje na
ES-h Kapacita
{Př. ES/36} Potenciál nabitého válcového vodiče



(Obr. ES-66) Kapacita symetrického dvouvodičového vedení



(Obr. ES-67) Výpočet potenciálu na vodičích

Vyznačíme-li na levém vodiči bod 1 a na pravém vodiči bod 2, bude dán potenciál v obou z bodů součtem potenciálů od vodiče 1 a 2:

Potenciál v bodě 1 na vodiči 1

$$\varphi_1 = \underbrace{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{a} + K_1}_{od\ vodiči 1} + \underbrace{\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{s-a} + K_2}_{od\ vodiči 2}$$

Potenciál v bodě 2 na vodiči 2

$$\varphi_2 = \underbrace{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{s-a} + K_1}_{od\ vodiči 1} + \underbrace{\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{a} + K_2}_{od\ \ vodiči 2}$$

Napětí je rozdíl potenciálů

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(2\cdot\ln\frac{1}{a} - 2\cdot\ln\frac{1}{s-a}\right) = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{s-a}{a}$$

Z definice kapacity

$$Q = C\cdot U$$

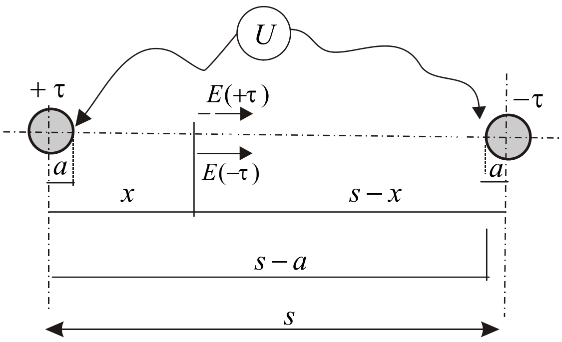
$$\tau = C/l\cdot U = \frac{\pi\ \varepsilon_0}{\ln\frac{s-a}{a}}\cdot U$$

Kapacita dvouvodičového vedení na jednotku délky je tedy

$$C/l = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{s-a}{a}}$$

Napětí mezi vodiči lze alternativně vypočítat i jako integrál intenzity elektrického pole.

Intenzita ve vzdálenosti x od levého vodiče se vypočte jako součet intenzit od obou vodičů. Intenzita elektrického pole má od levého i pravého vodiče stejný směr. Siločáry z kladného vodiče vystupují, do záporného vstupují.



(Obr. ES-68) Výpočet napětí pomocí intenzity elektrického pole

$$E(x) = \underbrace{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{x}}_{od\ vodiči 1} + \underbrace{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{s-x}}_{od\ vodiči 2}$$

Pro napětí platí stejný vztah, jako byl vypočten pomocí potenciálů

$$U = \int_{x=a}^{x=s-a} E(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{x=a}^{x=s-a}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{s-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{s-a}{a}$$

{Př. ES/49} Kapacita dvouvodičového vedení - číselný příklad

Vypočtěme kapacitu na jednotku délky ***C/l*** dvouvodičového vedení („televizní dvoulinky“), kde **s=10 mm**, **a=0,5 mm**.

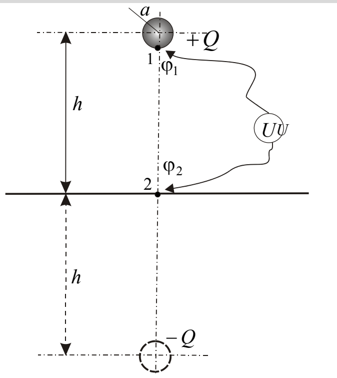
Požadovaná kapacita je dána

$$C/l = \frac{\pi\,\varepsilon_0}{\ln\dfrac{s-a}{a}} = \frac{\pi\,\varepsilon_0}{\ln\dfrac{10\cdot 10^{-3}-0.5\cdot 10^{-3}}{0.5\cdot 10^{-3}}} = 9{,}45 \quad pF/m$$

{Př. ES/50} Kapacita kulové elektrody nad zemí

Jak velká kapacita je mezi kulovou elekrodou a uzemněnou rovinou?

Navazuje na
ES-h Kapacita
ES-f Metoda zrcadlení
{Př. ES/33} Potenciál nabité vodivé koule



(Obr. ES-69) Kapacita kulové elektrody nad zemí

Při výpočtu kapacity mezi dvěma elektrodami je třeba najít vztah mezi nábojem, který se objeví na elektrodách po přivedení napětí. Na jedné elektrodě se objeví náboj kladný, na druhé záporný. V našem případě například naboj +Q na kulové elektrodě, náboj –Q je rozprostřen s určitou hustotou náboje na zemnící rovině.

Nabitou kulovou elektrodu nad zemí je možné modelovat pomocí dvou kulových elektrod, jedné skutečné a druhé fiktivní. Fiktivní elektroda je umístěna zrcadlově na druhé straně roviny a nabita stejně velikým, ale opačným nábojem. Pro zpětný výpočet napětí je možno použít potenciálů.

Potenciál v bodě jedna na kulové elektrodě je dán součtem potenciálu fiktivní a skutečné elektrody

$$\varphi_1 = \underbrace{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}+K_1}_{od\ elektrody\ 1} + \underbrace{\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2h-a}+K_2}_{od\ elektrody\ 2}$$

Potenciál v bodě 2 na uzemněné rovině

$$\varphi_2 = \underbrace{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h}+K_1}_{od\ elektrody\ 1} + \underbrace{\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h}+K_2}_{od\ elektrody\ 2} = K_1+K_2$$

Potenciál na uzemněné rovině by ani nebylo nutné počítat. Zcela jistě musí být konstantní, to vyplývá z vlastností vodivé roviny. Při vhodné volbě konstant bude dokonce nulový, při výpočtu napětí pomocí potenciálu na velikosti konstant vůbec nezáleží. Napětí mezi elektrodou a rovinou jako rozdíl potenciálů

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2h-a}\right)$$

Z definice kapacity

$$Q = C\cdot U = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2h-a}\right)}\cdot U$$

Kapacita kulové elektrody proti zemi je

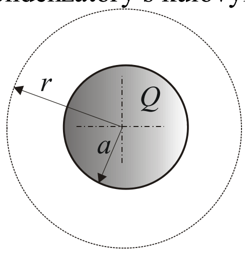
$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2h-a}\right)} \qquad \text{(ES*35)}$$

{Př. ES/51} Kapacita osamocené kulové elektrody ve vzduchu

Jaká je kapacita kulové elektrody, která je dostatečně vzdálena od všech okolních objektů a je nabita nábojem $\boldsymbol{Q}$?

Navazuje na
{Př. ES/50} Kapacita kulové elektrody nad zemí

I u osamocené kulové elektrody existuje pojem kapacity. Je to případ, ve kterém je druhá elektroda velmi daleko. Hodnotu kapacity můžeme získat jako limitní hodnotu z libovolného vztahu udávajícího kapacitu pro kondenzátory s kulovými elektrodami.



(Obr. ES-70) Kapacita osamocené kulové elektrody

Například podle vztahu pro kapacitu kulové elektrody nad zemí platí pro kapacitu osamocené kulové elektrody vztah

$$C = \lim_{h\to\infty} \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2h-a}\right)} = 4\pi\varepsilon_0 a$$

{Př. ES/52} Kapacita osamocené kulové elektrody - číselný příklad

Vypočtěme kapacitu **C** osamocené vodivé kulové elektrody o poloměru **a=2 m**. Elektroda je umístěna ve vzduchu.

Navazuje na
{Př. ES/50} Kapacita kulové elektrody nad zemí
{Př. ES/45} Kapacita kondenzátoru se sférickými elektrodami a homogenním dielektrikem

Ke vztahu pro kapacitu osamocené kulové elektrody lze dospět několika způsoby. Dva z nich jsou tyto:
a) vyjít ze vztahu pro kapacitu kulové elektrody nad zemí pro h→∞ :

$$C = \lim_{h\to\infty} \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2h-a}\right)} = 4\pi\varepsilon_0 a$$

b) vyjít ze vztahu pro kapacitu kulového kondenzátoru a uvažovat vnější rozměr b→∞ :

$$U = \int_{r=a}^{\infty} E(r).\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{r=a}^{\infty}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{a}\right)$$

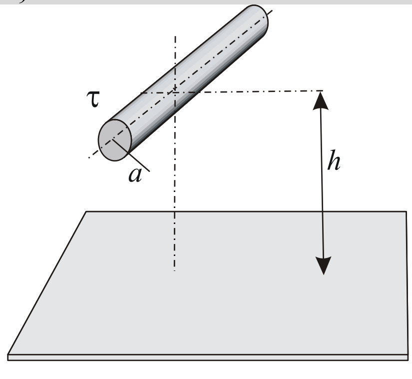
$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 a$$

V obou případech dostáváme samozřejmě stejný výsledek C=222,5 pF.

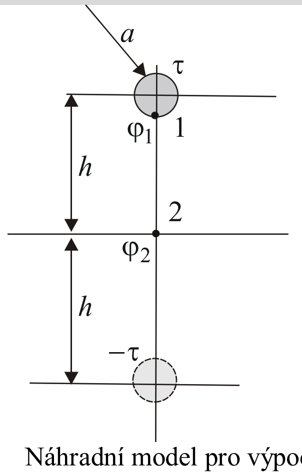
{Př. ES/53} Kapacita válcového vodiče nad zemí

Jak veliká je kapacita na jednotku délky válcového vodiče nad zemí?

Navazuje na
ES-h Kapacita
ES-f Metoda zrcadlení
{Př. ES/36} Potenciál nabitého válcového vodiče



(Obr. ES-71) Kapacita vodiče nad zemí



(Obr. ES-72) Náhradní model pro výpočet kapacity

Potenciál na vodiči 1

Při výpočtu kapacity je třeba odvodit vztah mezi napětím a nábojem, který se objeví na elektrodách po přivedení napětí. Pro zpětný výpočet napětí je opět vhodné použít potenciálů. V našem případě je jednou elektrodou vlastní vodič, druhou elektrodou uzemněná rovina. Rovina je ve výpočtu respektována podle metody zrcadlení symetricky umístěným fiktivním vodičem se stejně velikým ale opačným nábojem. Potenciály obou vodičů se v každém bodě sčítají.
Potenciál v bodě 1 na vodiči

$$\varphi_1 = \underbrace{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{a} + K_1}_{od\,vodiče\,1} + \underbrace{\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{2h-a} + K_1}_{od\,vodiče\,1}$$

Potenciál v bodě 2 na rovině

$$\varphi_2 = \underbrace{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{h} + K_1}_{od\,vodiče\,1} + \underbrace{\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{h} + K_1}_{od\,vodiče\,1} = K_1 + K_2$$

Napětí mezi vodičem a rovinou jako rozdíl potenciálů

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h-a}{a}$$

Z definice kapacity

$$\tau = \left(C/l\right)\cdot U = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2h-a}{a}}\cdot U$$

Kapacita na jednotku délky vodiče nad zemí bude tedy

$$C/l = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2h-a}{a}}$$

{Př. ES/54} Kapacita válcového vodiče nad zemí, číselný příklad

Ve výšce ***h***=15 cm nad zemí je umístěn vodič o poloměru ***a***=15 mm. Jak velká je kapacita tohoto vodiče proti zemi?

Navazuje na
{Př. ES/54} Kapacita válcového vodiče nad zemí, číselný příklad

Kapacita vodiče nad zemí je

$$C/l = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2h-a}{a}} = \frac{2\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}}{\ln\dfrac{2\cdot 1-0{,}005}{0{,}005}} = 9{,}29\ pF$$

{Př. ES/55} Kapacita kulové elektrody nad zemí

Ve výšce h=15 cm nad zemí je umístěna kulová elektroda o poloměru a=15 mm. Jak velká je kapacita této elektrody nad zemí?

Navazuje na
{Př. ES/50} Kapacita kulové elektrody nad zemí

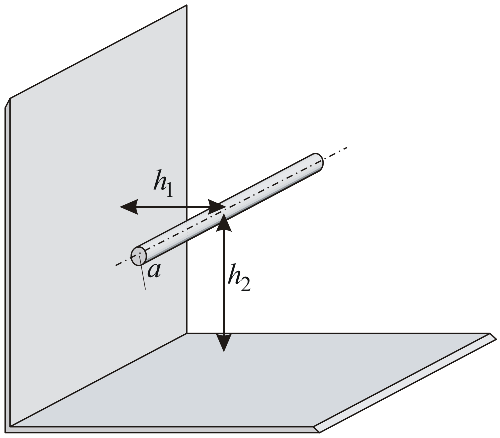
Kapacita kulové elektrody nad zemí je

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{2h-a}\right)} = \frac{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}}{\left(\dfrac{1}{0{,}015} - \dfrac{1}{2\cdot 0{,}15-0{,}015}\right)} = 1{,}76\,pF$$

{Př. ES/56} Kapacita vodiče mezi kolmými vodivými rovinami

Jak veliká je kapacita dlouhého vodiče proti dvěma kolmým uzemněným rozlehlým rovinám podle obrázku (Obr. ES-73)?

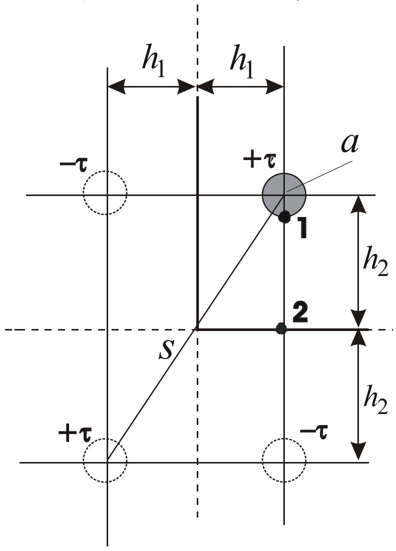
Navazuje na
ES-h Kapacita
{Př. ES/36} Potenciál nabitého válcového vodiče
{Př. ES/53} Kapacita válcového vodiče nad zemí



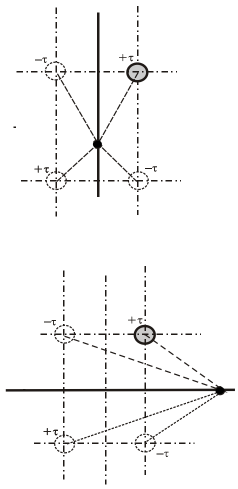
(Obr. ES-73) Vodič mezi komými rovinami

Vliv uzemněných (ekvipotenciálních) rovin je možné respektovat ve výpočtu pomocí výpočtového modelu, ve kterém jsou rovin nahrazeny náboji s opačnými znaménky viz (Obr. ES-74).

Náhradní náboje jsou rozmístěny tak, aby na každé z rovin byla splněna podmínka konstantního potenciálu. To je podle metody zrcadlení splněno v případě, kdy jsou po obou stranách rovin rozmístěny symetrické dvojice nábojů s opačnými znaménky tak, aby měly ke každému bodu na rovině vždy stejnou vzdálenost.. Na obrázku (Obr. ES-75) je vidět, že to je v našem modelu skutečně splněné.



(Obr. ES-74) Náhradní model uspořádání vodiče mezi kolmými rovinami



(Obr. ES-75) Rozmístění nábojů v náhradním modelu

Pro výpočet napětí mezi elektrodami stačí vypočítat v náhradním uspořádání potenciál na vodiči a na jednom místě vodivých rovin.

Potenciál v bodě 1 na vodiči je součtem potenciálů skutečného vodiče i všech obrazů v tomto bodě

$$\varphi_1 = \underbrace{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{a} + K_1}_{\textit{originál}} + \underbrace{\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{2h_1} + K_2}_{-\tau\ \textit{vlevo}} + \underbrace{\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{2h_2} + K_3}_{-\tau\ \textit{dole}} + \underbrace{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{s} + K_4}_{+\tau\ \textit{na diagonále}}$$

Potenciál na rovině by se vůbec nemusel vyčíslovat, uspořádání nábojů zaručuje, že zde bude potenciál konstantní a platí to samozřejmě i v této úloze. Při vhodné volbě konstant může být navíc hodnota tohoto potenciálu nulová. Následující výpočet potenciálu na rovině je tedy spíš pro ilustraci.

Potenciál v bodě 2 na rovině

$$\varphi_2 = \underbrace{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{h_1} + K_1}_{originál} + \underbrace{\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{s} + K_2}_{-\tau\ vlevo} + \underbrace{\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{h_1} + K_3}_{-\tau\ dole} + \underbrace{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{s} + K_4}_{+\tau\ na\ diagonále} = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

Napětí je dané rozdílem potenciálů, na velikosti konstant vůbec nezáleží, konstanty se ve výpočtu navzájem odečtou

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{4h_1h_2}{a\,s} = \frac{\tau}{2\pi\ \varepsilon_0}\ln\frac{2h_1h_2}{a\sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}}$$

Z definice kapacity potom

$$\tau = C/l \cdot U = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2h_1h_2}{a\sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}}} \cdot U$$

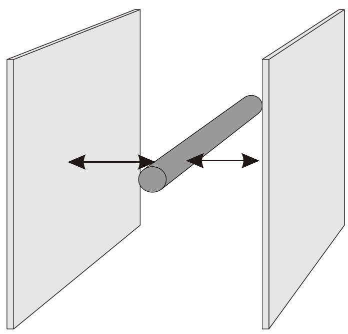
Kapacita vodiče proti kolmým rovinám je

$$C/l = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2h_1h_2}{a\sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}}}$$

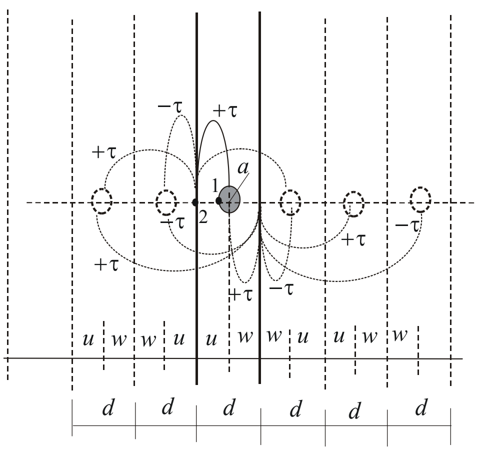
{Př. ES/57} Kapacita vodiče mezi rovnoběžnými vodivými rovinami

Jak veliká je kapacita dlouhého vodiče proti rozlehlým uzemněným rovinám podle obrázku (Obr. ES-76)?

Navazuje na
ES-h Kapacita
{Př. ES/36} Potenciál nabitého válcového vodiče
{Př. ES/53} Kapacita válcového vodiče nad zemí



(Obr. ES-76) Kapacita vodiče proti rozlehlým rovinám



(Obr. ES-77) Náhradní model pro výpočet kapacity

Jako v předešlém případě je možné sestavit náhradní uspořádání pro výpočet, ve kterém bude vliv rovin reprezentován obrazem skutečného vodiče.

Podmínka konstantního potenciálu by měla být splněna pro obě roviny. To znamená, že by po obou stranách každé roviny měly být symetricky rozmístěny dvojice s kladným a záporným nábojem. V této úloze to však dokonale realizovat nejde, vždy bude minimálně jeden náboj u jedné z rovin přebývat, nebo naopak chybět. Úlohu je možné řešit tak, že pro určitý počet náhradních nábojů prohlásíme, že to je již dostatečné množství na to, abychom se nedopustili příliš veliké chyby při výpočtu

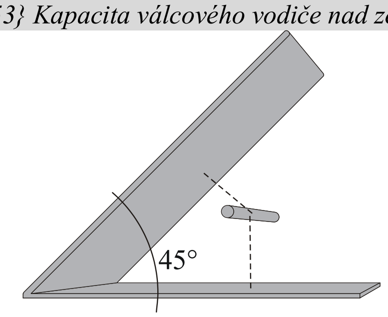
Další postup je identický.jako v {Př. ES/53}. Pro stanovení napětí je třeba vypočítat potenciál v jednom bodě na vodiči a v jednom bodě uzemněných rovin. Potenciál je nutné brát jako sumu potenciálu od všech náhradních nábojů a tyto potenciály od sebe odečíst. Ze vztahu mezi nábojem a napětím přímo vyplyne vztah pro velikost kapacity.

.

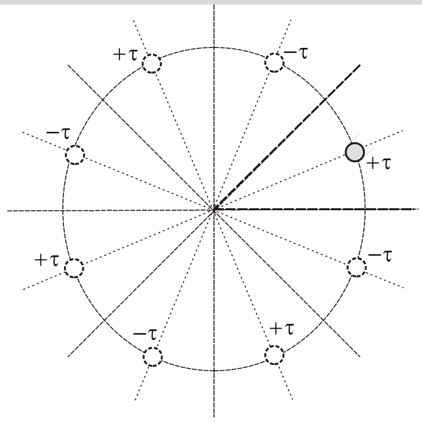
{Př. ES/58} Kapacita válcového vodiče vloženého mezi šikmé roviny

Jaké bude náhradní uspořádání pro výpočet elektrického pole a kapacity pro dlouhý vodič umístěný mezi šikmé vodivé poloroviny podle obrázku (Obr. ES-78)? Roviny svírají úhel 45°.

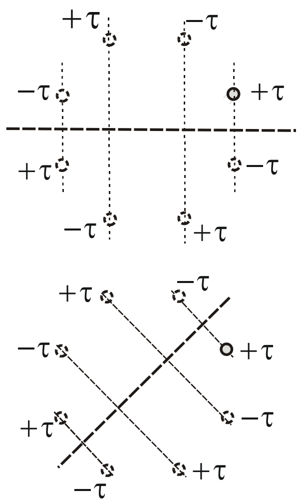
Navazuje na
ES-h Kapacita
ES-f Metoda zrcadlení
{Př. ES/53} Kapacita válcového vodiče nad zemí



(Obr. ES-78) Vodič mezi šikmými elektrodami



(Obr. ES-79) Náhradní soustava nábojů



(Obr. ES-80) Dvojice opačných nábojů ve vztahu k rovinám

Náhradní soustava nábojů bude vypadat jako na obrázku (Obr. ES-79). Tím je splněna podmínka pro konstantní potenciál na každé z rovin. Nad každou rovinou se budou totiž symetricky nacházet dvojice opačných nábojů tak, jak je to vidět na obrázku (Obr. ES-80)

Podobné uspořádání by platilo pro každý úhel mezi rovinami, pro který by byla splněna podmínka

$$\alpha = \frac{180}{n}$$

kde n je celé číslo.

n=1 odpovídá vodiči nad rozlehlou uzemněnou rovinou.

n=2 odpovídá vodiči mezi kolmými rovinami.

n=4 odpovídá rovinám pod úhlem 45°.

V případě obecného úhlu by byl počet obrazů nekonečně velký podobně jako u rovnoběžných rovin. Obrazy by se rozbíhaly po spirále od středu.

{Př. ES/59} Kapacita vodiče mezi dvěma kolmými uzemněnými rovinami - číselný příklad

Jak velkou kapacitu má vodič o poloměru $\boldsymbol{a}$=5 mm proti dvěma kolmým uzemněným rovinám ve vzduchu podle obrázku (Obr. ES-73)? Vzdálenost vodiče od rovin je: $\boldsymbol{h_1}$=150 mm, $\boldsymbol{h_2}$=200 mm

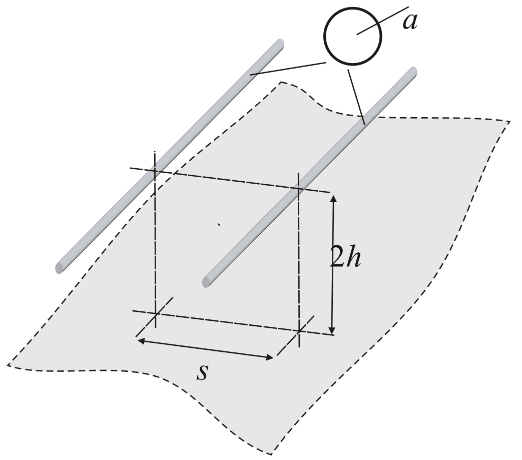
Navazuje na
{Př. ES/56} Kapacita vodiče mezi kolmými vodivými rovinami

$$C/l = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2h_1h_2}{a\sqrt{h_1^2+h_2^2}}} = \frac{2\cdot\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}}{\ln\left(\dfrac{2\cdot 0{,}15\cdot 0{,}2}{0{,}005\cdot\sqrt{0{,}15^2+0{,}2^2}}\right)} = 14{,}4\,pF$$

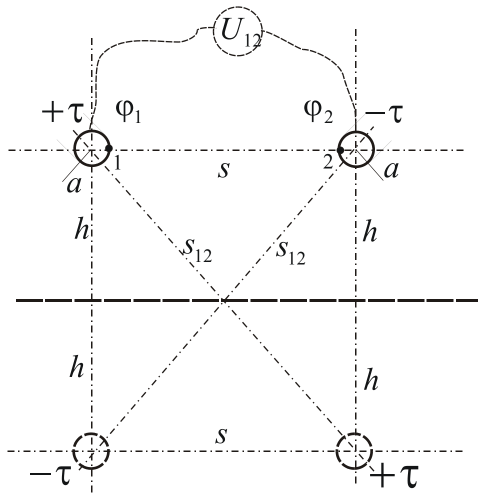
{Př. ES/60} Kapacita dvouvodičového vedení nad zemí

Jaká veliká je kapacita dvouvodičového vedení nad zemí s rozměry podle obrázku (Obr. ES-81)?

Navazuje na
ES-h Kapacita
{Př. ES/36} Potenciál nabitého válcového vodiče
{Př. ES/56} Kapacita vodiče mezi kolmými vodivými rovinami



(Obr. ES-81) Kapacita dvouvodičového vedení nad zemí



r. ES-82) Náhradní soustava nábojů pro výpočet kapacity vedení nad zemí

Vliv uzemněné roviny je možno na základě metody zrcadlení respektovat pomocí fiktivních opačně nabitých vodičů umístěných symetricky na druhé straně od roviny. Jedná se o velice podobné náhradní uspořádání jako v {Př. ES/56}. Pro stanovení kapacity je třeba nejprve vypočítat napětí mezi vodiči v závislosti na velikosti náboje. K výpočtu napětí se opět dobře hodí potenciály.

Potenciál v bodě 1 na levém vodiči je

$$\varphi_1 = \underbrace{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{a} + K_1}_{+\tau\ \text{originál}} + \underbrace{\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{s} + K_2}_{-\tau\ \text{originál}} + \underbrace{\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{2h} + K_3}_{-\tau\ \text{dole}} + \underbrace{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{s_{12}} + K_4}_{+\tau\ \text{na diagonále}} .$$

Potenciál v bodě 2 na pravém vodiči je

$$\varphi_2 = \underbrace{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{s} + K_1}_{+\tau\ \text{originál}} + \underbrace{\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{a} + K_2}_{-\tau\ \text{originál}} + \underbrace{\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{s_{12}} + K_3}_{-\tau\ \text{dole}} + \underbrace{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{2h} + K_4}_{+\tau\ \text{na diagonále}} .$$

Napětí mezi vodiči je

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h\,s}{a\,s_{12}}$$

Náboj na jednotku délky vyjádřený pomocí napětí a kapacity

$$\tau = C/l\cdot U_{12} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2h\,s}{a\,s_{12}}}U_{12}$$

Kapacita dvouvodičového vedení nad zemí je

$$C/l = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2h\,s}{a\,s_{12}}} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2h\,s}{a\sqrt{4h^2+s^2}}}$$

ES-i Elektrické namáhání pro základní typy elektrod

Při návrhu elektrických zařízení, zejména pro silové aplikace provozované pod vysokým napětím, je základním úkolem správně navrhnout vzdálenost a izolaci mezi částmi strojů a zařízení. Izolace musí odolat s dostatečnou rezervou a bez poškození nejen provoznímu, ale i zkušebnímu napětí, pomocí kterého se správnost navržení izolačního systému ověřuje.

Mírou elektrické pevnosti izolace je **maximální dovolená intenzita elektrického pole**, která je pro izolační materiál v daném geometrickém uspořádání ještě přípustná. Po překročení této maximální intenzity může dojít za jistých okolností k nenávratnému poškození – destrukci materiálu. Hovoříme o **elektrickém průrazu dielektrika**.

Mechanizmů průrazu dielektrika je velké množství druhů, celá problematika by si vyžádala podrobnějšího studia. Přesto je možné si udělat pro získání základní představy obrázek pomocí jednoduché úvahy. O dielektrickém materiálu jsme mluvili v souvislosti s tím, že nemá volné nosiče náboje narozdíl od vodiče, který má volně pohyblivé elektrony. Při vložení dielektrického materiálu do elektrického pole však působí na elektrony v atomech síly, které jsou dány velikostí intenzity elektrického pole, vznikají elektrické dipóly. Při překročení určité maximální intenzity elektrického pole se mohou některé elektrony od atomů odtrhnout, v elektrickém poli urychlit a narazit na další atomy, ze kterých mohou vyrazit další elektrony. Tím může dojít k řetězovému jevu a celkové destrukci.

Situace však není tak jednoduchá, jak by se na první pohled zdálo. Nedá se jednoduše říci, že ten a ten konkrétní materiál má právě takovou maximální dovolenou elektrickou pevnost – maximální dovolenou intenzitu elektrického pole. O tom, zda se daný materiál poškodí, rozhoduje spousta dalších faktorů, mezi kterými je nejdůležitější **geometrické uspořádání a tvar pole**. Platí například známá skutečnost, že maximální dovolená intenzita elektrického pole tenčí vrstvy materiálu je větší, než maximální dovolená intenzita elektrického pole tlustší vrstvy stejného materiálu. Z tohoto důvodu se izolace elektrických strojů navrhuje často v podobě vrstev. Když udáváme elektrickou pevnost určitého materiálu, musíme vždy udat okrajové podmínky, za kterých byla tato pevnost změřena, což bývají většinou rozměry, vzdálenost a tvar elektrod. U elektrické pevnosti se jedná navíc o hodnotu statisticky změřenou z mnoha pokusů, výsledky obvykle odpovídají určitému pravděpodobnostnímu rozdělení. Elektrická pevnost je tedy určitá míra pravděpodobnosti, že nedojde za stejných podmínek k průrazu materiálu.

Dalším důležitým faktorem je **časový průběh veličin elektrického pole**. Pro většinu aplikací zejména ze silnoproudé elektrotechniky je možné intenzitu elektrického pole počítat stejně, jako by se jednalo o elektrostatické pole. Rychlost časové změny pole je ovšem jeden ze základních parametrů, který ovlivňuje velikost dovolené intenzity elektrického pole. Platí obecně, že čím je časový průběh pomalejší, tím je dovolená intenzita a tedy i přípustné dovolené napětí menší. Pro hrubé odhady se používá například pro stejnosměrné napětí 1.5 x násobně menší dovolená intenzita, než pro napětí o kmitočtu 50 Hz, pro zkoušky rázem napětí s rázovou vlnou simulující úder blesku se naopak počítá s hodnotami 2x většími.

Obecně platí, že je snadnější vypočítat pro určité uspořádání rozložení intenzity elektrického pole, než posoudit, zda je tato intenzita ještě přípustná. Dovolené hodnoty se často stanovují pro konkrétní uspořádání na základě analogie s podobným uspořádáním, na kterém byla provedena řada experimentů.

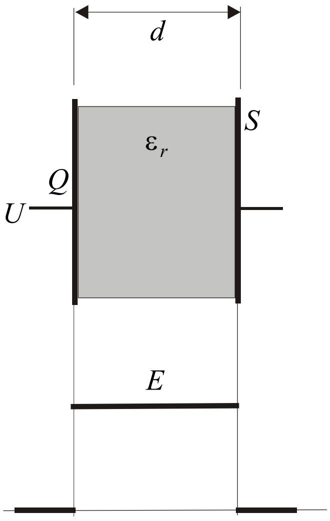
Přes uvedené problémy se stanovením dovolené intenzity elektrického pole je velice důležité umět velikost intenzity elektrického pole určit. Pro jednoduché tvary elektrod je možné intenzitu stanovit jednoduchým analytickým výpočtem, pro složitější tvary se neobejdeme bez numerických výpočtů.

V předchozích částech jsme se naučili vypočítat pro základní tvary elektrod intenzitu elektrického pole v závislosti na velikosti náboje na elektrodách. Naučili jsme se také vypočítat velikost kapacity, která udává vztah mezi napětím a nábojem. Spojením těchto výpočtů dostaneme pro základní typy elektrod důležitou závislost intenzity elektrického pole na napětí mezi elektrodami.

{Př. ES/61} Elektrické namáhání mezi rovinnými elektrodami s homogenním dielektrikem

Jak veliká intenzita elektrického pole bude mezi dvěma rovinnými rovnoběžnými elektrodami podle obrázku (Obr. ES-83), mezi které je přivedeno napětí **U.** Jedná se o uspořádání totožné s deskovým kondenzátorem.

Navazuje na:
ES-i Elektrické namáhání pro základní typy elektrod
{Př. ES/23} Elektrické pole dvou opačně nabitých rovin
{Př. ES/38} Kapacita deskového kondenzátoru s homogenním dielektrikem



(Obr. ES-83) Elektrické namáhání v deskovém kondenzátoru

Pro intenzitu elektrického pole mezi rovinami platí podle {Př. ES/23} obecný vztah

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$$

Do vztahu je třeba dosadit za velikost náboje, který se na elektrodách objeví po přiložení napětí

$$Q = C \cdot U = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} U$$

Za kapacitu mezi elektrodami bylo dosazeno

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$

Výsledný vztah pro intenzitu elektrického pole v tomto uspořádání je tedy

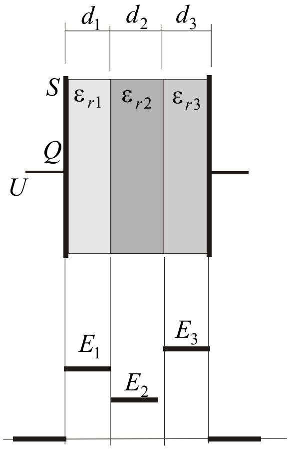
$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} U}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{U}{d} = konst$$

Intenzita elektrického pole je v tomto případě konstantní. Je dána napětím a vzdáleností elektrod, nezávisí vůbec na materiálu, který je mezi elektrody vložen.

{Př. ES/62} Elektrické namáhání mezi rovinnými elektrodami se složeným dielektrikem

Jak veliká intenzita elektrického pole bude mezi dvěma rovinnými rovnoběžnými elektrodami podle obrázku (Obr. ES-84), mezi kterými je vrstvené dielektrikum ? Mezi elektrody je přivedeno napětí ***U***. Jedná se o uspořádání totožné s deskovým kondenzátorem s vrstveným dielektrikem.

Navazuje na:
ES-i Elektrické namáhání pro základní typy elektrod
{Př. ES/23} Elektrické pole dvou opačně nabitých rovin
{Př. ES/39} Kapacita deskového kondenzátoru se složeným dielektrikem
{Př. ES/61} Elektrické namáhání mezi rovinnými elektrodami s homogenním dielektrikem



(Obr. ES-84) Elektrické namáhání v kondenzátoru se složeným dielektrikem

V libovolném místě bude indukce elektrického pole konstantní a bude mít velikost

$$D = \frac{Q}{S}$$

Intenzita elektrického pole bude záviset na permitivitě a obecně bude platit

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$$

Po přivedení napětí se na deskách objeví náboj

$$Q = C \cdot U = \frac{\varepsilon_0 S}{\left[\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} + \frac{d_3}{\varepsilon_{r3}}\right]} \cdot U$$

Intenzita elektrického pole v příslušné vrstvě bude tedy dána vztahy:

$$E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S} = \frac{\varepsilon_0 S\, U}{\left[\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} + \frac{d_3}{\varepsilon_{r3}}\right]} \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S} = \frac{U}{\varepsilon_{r1}\left[\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} + \frac{d_3}{\varepsilon_{r3}}\right]}$$

$$E_2 = \frac{U}{\varepsilon_{r2}\left[\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} + \frac{d_3}{\varepsilon_{r3}}\right]} \qquad E_3 = \frac{U}{\varepsilon_{r3}\left[\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} + \frac{d_3}{\varepsilon_{r3}}\right]}$$

Intenzita elektrického pole se rozdělí nepřímo úměrně permitivitám, úsek s nejmenší permitivitou bude mít největší intenzitu elektrického pole

$$E_1 : E_2 : E_3 = \frac{1}{\varepsilon_{r1}} : \frac{1}{\varepsilon_{r2}} : \frac{1}{\varepsilon_{r3}} .$$

{Př. ES/63} Intenzita elektrického pole v deskovém kondenzátoru - číselný příklad

Deskový kondenzátor podle obrázku (Obr. ES-84) má elektrickou pevnost v jednotlivých sekcích dielektrika: $\mathbf{E_{P1}=500\ kV/m}$, $\mathbf{E_{P2}=250\ kV/m}$ a $\mathbf{E_{P3}=300\ kV/m}$. Vydrží kondenzátor přiložené napětí **U=2500 V?** Která jeho část se případně prorazí?

Navazuje na
{Př. ES/62} Elektrické namáhání mezi rovinnými elektrodami se složeným dielektrikem

Intenzity elektrického pole jsou v jednotlivých částech konstantní a dány vztahy:

$$E_1 = \frac{U}{\varepsilon_{r1}\left[\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} + \frac{d_3}{\varepsilon_{r3}}\right]} = \frac{2500}{5\cdot\left[\frac{3\cdot10^{-3}}{5} + \frac{6\cdot10^{-3}}{2} + \frac{2\cdot10^{-3}}{10}\right]} = 131{,}58\ \frac{kV}{m}$$

$$E_2 = \frac{U}{\varepsilon_{r2}\left[\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} + \frac{d_3}{\varepsilon_{r3}}\right]} = \frac{2500}{2\cdot\left[\frac{3\cdot10^{-3}}{5} + \frac{6\cdot10^{-3}}{2} + \frac{2\cdot10^{-3}}{10}\right]} = 328{,}94\ \frac{kV}{m}$$

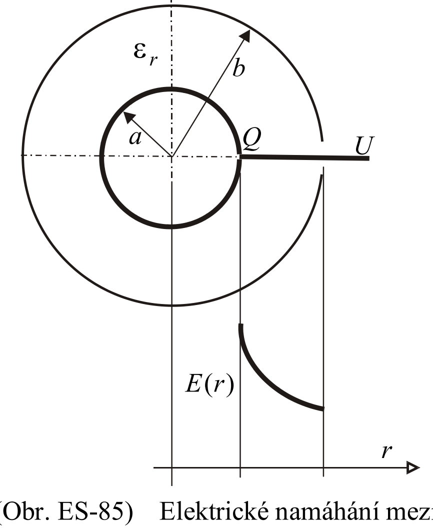
$$E_3 = \frac{U}{\varepsilon_{r3}\left[\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} + \frac{d_3}{\varepsilon_{r3}}\right]} = \frac{2500}{10\cdot\left[\frac{3\cdot10^{-3}}{5} + \frac{6\cdot10^{-3}}{2} + \frac{2\cdot10^{-3}}{10}\right]} = 65{,}79\ \frac{kV}{m}$$

Ze srovnání hodnot intenzity elektrického pole v kondenzátoru se zadanými pevnostmi dielektrik je zřejmé, že se prorazí dielektrikum v prostřední části.

{Př. ES/64} Elektrické namáhání mezi koncentrickými kulovými elektrodami s homogenním dielektrikem

Jaké je elektrické namáhání (rozložení intenzity elektrického pole) mezi koncentrickými kulovými elektrodami podle obrázku (Obr. ES-85), mezi které je přivedeno napětí o velikosti **U**?

Navazuje na:
Navazuje na:
ES-i Elektrické namáhání pro základní typy elektrod
{Př. ES/24} Elektrické pole dvou opačně nabitých koncentrických koulí
{Př. ES/45} Kapacita kondenzátoru se sférickými elektrodami a homogenním dielektrikem



(Obr. ES-85) Elektrické namáhání mezi kulovými elektrodami s homogenním dielektrickem

Pro intenzitu elektrického pole platí podle {Př. ES/24} vztah

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r^2}$$

Náboj, který by se na elektrodách objevil po přiložení napětí, je možné vyříslit pomocí kapacity

$$C = \frac{4\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

$$Q = C\cdot U = \frac{4\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}\cdot U$$

Mezi elektrodami na libovolném poloměru ***r*** bude intenzita elektrického pole

$$E(r)=\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r^2}=\frac{4\pi\cdot\varepsilon_0\varepsilon_r}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}\cdot U\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r^2}=\frac{U}{r^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

Jako v předchozím příkladě platí, že intenzita elektrického pole nezávisí na dielektrických vlastnostech materiálu. Největší intenzita elektrického pole je na vnitřním poloměru:

$$E_{\max}=\frac{U}{a^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

Budeme-li uvažovat elektrody o přibližně stejném poloměru, podstatně se lišícím od nuly, bude platit

$$r\approx a\approx b\quad r,a,b\neq 0$$

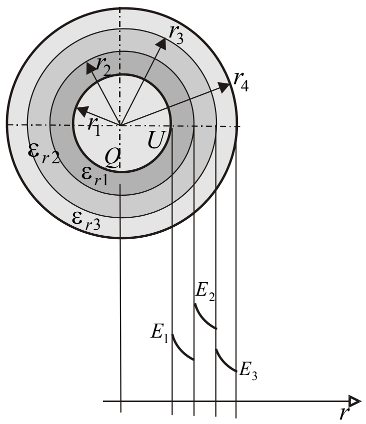
$$E(r)=\frac{U}{r^2\left(\frac{b-a}{ab}\right)}\approx\frac{U}{b-a}$$

Elektrické pole v tomto případě bude téměř rovinné a bude se podobat poli v deskovém kondenzátoru. I vztah pro intenzitu elektrického pole bude stejný.

{Př. ES/65} Elektrické namáhání mezi koncentrickými kulovými elektrodami se složeným dielektrikem

Jak se rozloží intenzita elektrického pole mezi kulovými koncentrickými elektrodami podle obrázku (Obr. ES-86), na které je přivedeno napětí U? Mezi elektrodami je vrstvené dielektrikum.

Navazuje na
ES-i Elektrické namáhání pro základní typy elektrod
{Př. ES/24} Elektrické pole dvou opačně nabitých koncentrických koulí
{Př. ES/46} Kapacita kondenzátoru se sférickými elektrodami a složeným dielektrikem



(Obr. ES-86) Elektrické namáhání mezi koncentrickými koulemi s vrstvenou izolací

Elektrická indukce nezávisí vůbec na permitivitě dielektrika, bude popsána ve všech úsecích izolace vztahem

$$D(r)=\frac{Q}{4\pi\,r^2}$$

Pro intenzitu elektrického pole v libovolném úseku bude obecně platit

$$E(r)=\frac{D(r)}{\varepsilon}=\frac{D(r)}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r^2}$$

Po přivedení napětí se mezi elektrodami objeví náboj

$$Q=C\cdot U=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\left[\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{\varepsilon_{r1}}+\frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}}{\varepsilon_{r2}}+\frac{\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}}{\varepsilon_{r3}}\right]}\cdot U$$

Intenzita elektrického pole již na permitivitě závislá je, v jednotlivých částech dielektricka bude platit

$$E_1(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\frac{1}{r^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 U}{\left[\dfrac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{\varepsilon_{r1}}+\dfrac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}}{\varepsilon_{r2}}+\dfrac{\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}}{\varepsilon_{r3}}\right]}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\frac{1}{r^2}$$

$$E_1(r) = \frac{U}{\varepsilon_{r1}\cdot r^2\left[\dfrac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{\varepsilon_{r1}}+\dfrac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}}{\varepsilon_{r2}}+\dfrac{\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}}{\varepsilon_{r3}}\right]} \qquad E_2(r) = \frac{U}{\varepsilon_{r2}\cdot r^2\left[\dfrac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{\varepsilon_{r1}}+\dfrac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}}{\varepsilon_{r2}}+\dfrac{\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}}{\varepsilon_{r3}}\right]}$$

$$E_3(r) = \frac{U}{\varepsilon_{r3}\cdot r^2\left[\dfrac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{\varepsilon_{r1}}+\dfrac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}}{\varepsilon_{r2}}+\dfrac{\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}}{\varepsilon_{r3}}\right]}$$

Intenzita elektrického pole není závislá na absolutních hodnotách permitivit, ale pouze na relativním poměru.
Největší intenzita elektrického pole v každém úseku je na nejmenším poloměru, například v úseku 1 je to

$$E_{1\max} = \frac{U}{\varepsilon_{r1}\cdot r_1^2\left[\dfrac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{\varepsilon_{r1}}+\dfrac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}}{\varepsilon_{r2}}+\dfrac{\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}}{\varepsilon_{r3}}\right]}$$

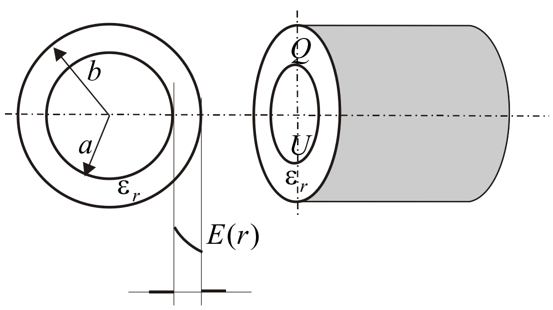
O tom, ve kterém místě bude největší intenzita elektrického pole, rozhodují nejen poměry permitivit, ale i vnitřních poloměrů jednotlivých vrstev

$$E_{1\max} : E_{2\max} : E_{3\max} = \frac{1}{\varepsilon_{r1}\cdot r_1^2} : \frac{1}{\varepsilon_{r2}\cdot r_2^2} : \frac{1}{\varepsilon_{r3}\cdot r_3^2}$$

{Př. ES/66} Elektrické namáhání mezi koaxiálními válcovými elektrodami s homogenním dielektrikem

Jak se rozloží intenzita elektrického pole mezi souosými válcovými elektrodami podle obrázku (Obr. ES-87), mezi kterými je homogenní dielektrikum? Mezi elektrody je přivedeno napětí *U*.

Navazuje na:
ES-i Elektrické namáhání pro základní typy elektrod
{Př. ES/25} Elektrické pole dvou opačně nabitých koaxiálních válců
{Př. ES/42} Kapacita válcového kondenzátoru s homogenním dielektrikem



(Obr. ES-87) Elektrické namáhání mezi koaxiálními válci

Pro intenzitu elektrického pole platí vztah

$$E(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r}$$

Náboj, který se objeví na deskách po přiložení napětí U, vyjádřený pomocí kapacity bude

$$C/l = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$$

$$Q = (C/l)\cdot U = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}\cdot U$$

Pro intenzitu elektrického pole mezi válcovými elektrodami vyplyne vztah

$$E(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\cdot U\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r} = \frac{U}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Ani zde není intenzita elektrického pole závislá na velikosti permitivity. Největší intenzita elektrického pole bude na vnitřním poloměru

$$E_{\max} = \frac{U}{a\ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

{Př. ES/67} Intenzita elektrického pole v koaxiálním kabelu - číselný příklad

Koaxiální kabel s rozměry **a=5 mm**, **b=2 mm** se vzduchovým dielektrikem (**ε_r=1**) podle obrázku (Obr. ES-87) je připojen na napětí **U=4 kV**. Elektrická pevnost vzduchu **E_P=1 kV/mm**. V jakém místě bude největší elektrické namáhání dielektrika? Je nebezpečí, že dojde k průrazu?

Navazuje na
{Př. ES/66} Elektrické namáhání mezi koaxiálními válcovými elektrodami s homogenním dielektrikem

Intenzita elektrického pole mezi válcovými elektrodami je dána vztahem:

$$\mathrm{E}(r) = \frac{U}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Z rozložení intenzity elektrického pole v koaxiálním kabelu je zřejmé, že největší hodnota bude na nejmenším poloměru, tedy pro ***r=a***.

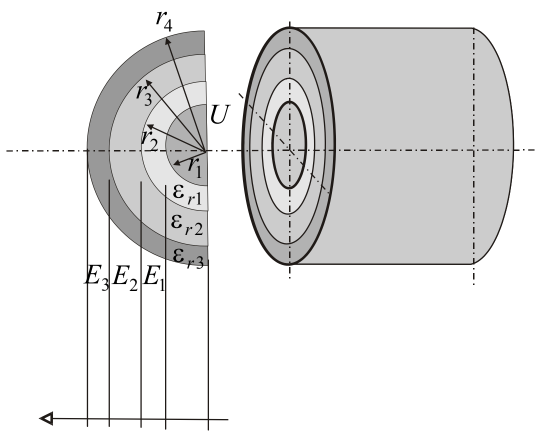
$$E_{\max} = \mathrm{E}(r=a) = \left|\frac{U}{a\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right| = \left|\frac{4000}{5\cdot 10^{-3}\ln\left(\frac{5}{2}\right)}\right| = 873\ \frac{kV}{m} = 0.873\ \frac{kV}{mm}$$

Elektrická pevnost vzduchu není ještě překročena, koaxiální kabel uvedenému napětí odolá.

{Př. ES/68} Elektrické namáhání mezi koaxiálními válcovými elektrodami se složeným dielektrikem

Jak se rozloží intenzita elektrického pole mezi souosými válcovými elektrodami podle obrázku (Obr. ES-88), mezi které je vloženo vrstvené dielektrikum? Na elektrody je přivedeno napětí U.

Navazuje na
ES-i Elektrické namáhání pro základní typy elektrod
{Př. ES/25} Elektrické pole dvou opačně nabitých koaxiálních válců
{Př. ES/44} Kapacita válcového kondenzátoru se složeným dielektrikem



(Obr. ES-88) Elektrické namáhání mezi válcovými elektrodami s vrstveným dielektrikem

Elektrická indukce nezávisí vůbec na permitivitě dielektrika, je popsána ve všech úsecích izolace vztahem

$$D(r) = \frac{\tau}{2\pi\, r}$$

Po přivedení napětí se mezi elektrodami objeví náboj

$$\tau = \left(C/l\right)\cdot U = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\left[\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\varepsilon_{r1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{\varepsilon_{r2}} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{\varepsilon_{r3}}\right]}\cdot U$$

Pro intenzitu elektrického pole bude platit obecně

$$E(r)=\frac{D(r)}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}=\frac{\tau}{2\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}\,\frac{1}{r}$$

V jednotlivých vrstvách dielektrika bude intenzita elektrického pole

$$E_1(r)=\frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\left[\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{\varepsilon_{r1}}+\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)}{\varepsilon_{r2}}+\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_4}{r_3}\right)}{\varepsilon_{r3}}\right]}\,\frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\,\frac{1}{r}=\frac{U}{\varepsilon_{r1}\cdot r\cdot\left[\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{\varepsilon_{r1}}+\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)}{\varepsilon_{r2}}+\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_4}{r_3}\right)}{\varepsilon_{r3}}\right]}$$

$$E_2(r)=\frac{U}{\varepsilon_{r2}\cdot r\cdot\left[\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{\varepsilon_{r1}}+\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)}{\varepsilon_{r2}}+\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_4}{r_3}\right)}{\varepsilon_{r3}}\right]}\qquad E_3(r)=\frac{U}{\varepsilon_{r3}\cdot r\cdot\left[\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{\varepsilon_{r1}}+\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)}{\varepsilon_{r2}}+\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_4}{r_3}\right)}{\varepsilon_{r3}}\right]}$$

Intenzita elektrického pole v jednotlivých vrstvách nezávisí na absolutních hodnotách permitivity, ale na relativních poměrech. V každé vrstvě je největší intenzita elektrického pole na jejím vnitřním poloměru. V první vrstvě to bude například

$$E_{1\ \max}=\frac{U}{\varepsilon_{r1}\cdot r_1\cdot\left[\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{\varepsilon_{r1}}+\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)}{\varepsilon_{r2}}+\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_4}{r_3}\right)}{\varepsilon_{r3}}\right]}$$

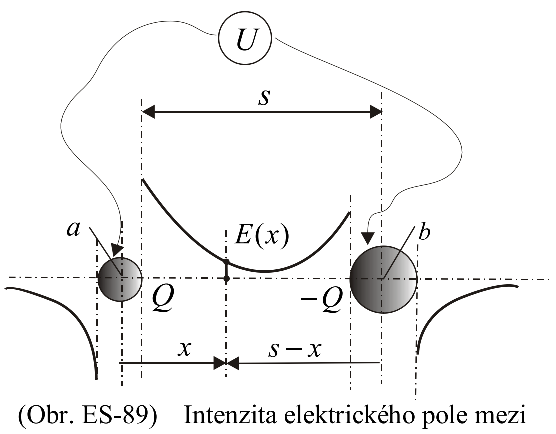
V jakém místě bude největší intenzita elektrického pole závisí i na poměru vnitřních poloměrů

$$E_{1\ \max}:E_{2\ \max}:E_{3\ \max}=\frac{1}{\varepsilon_{r1}\,r_1}:\frac{1}{\varepsilon_{r2}\,r_2}:\frac{1}{\varepsilon_{r3}\,r_3}$$

{Př. ES/69} Elektrické namáhání mezi kulovými elektrodami umístěnými proti sobě

Jak se rozloží intenzita elektrického pole mezi dvěma kulovými elektrodami podle obrázku (Obr. ES-89)?

Navazuje na
ES-i Elektrické namáhání pro základní typy elektrod
{Př. ES/47} Vzájemná kapacita kulových elektrod



(Obr. ES-89) Intenzita elektrického pole mezi kulovými elektrodami

Po přivedení napětí se mezi kulovými elektrodami objeví podle {Př. ES/47}náboj

$$Q=C\cdot U=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{s-a}-\dfrac{1}{s-b}\right)}\cdot U$$

Pro intenzitu elektrického pole dvou kulových elektrod platí vztah

$$E(x)=\frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(s-x)^2}\right)$$

Po zpětném dosazení do vztahu pro intenzitu

$$E(x)=\frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(s-x)^2}\right)=\frac{4\pi\varepsilon_0 U}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right)}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(s-x)^2}\right)\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

bude platit pro intenzitu elektrického pole v libovolném místě mezi elektrodami vztah

$$E(x)=\frac{U}{\varepsilon_r\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right)}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(s-x)^2}\right)$$

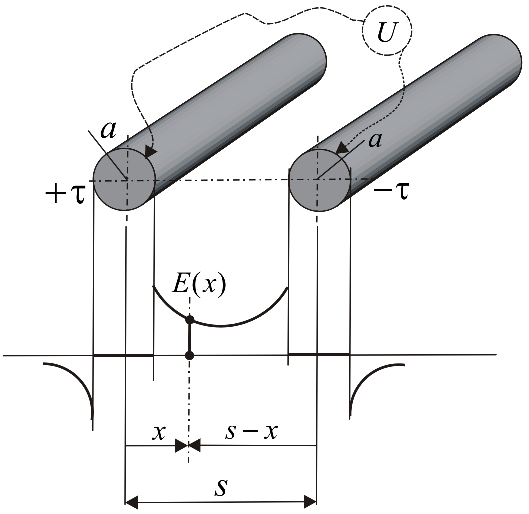
Největší intenzita elektrického pole bude na elektrodě o menším poloměru. Je-li poloměr elektrody vlevo, který je označen jako ***a,*** menší, bude zde intenzita elektrického pole

$$E(x=a)=\frac{U}{\varepsilon_r\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right)}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(s-a)^2}\right)$$

{Př. ES/70} Elektrické namáhání mezi rovnoběžnými válcovými vodiči

Jak velká intenzita elektrického pole bude mezi dvěma rovnoběžnými válcovými vodiči podle obrázku (Obr. ES-90)?

Navazuje na
ES-i Elektrické namáhání pro základní typy elektrod
{Př. ES/48} Kapacita dvouvodičového vedení



(Obr. ES-90) Intenzita elektrického pole mezi rovnoběžnými vodiči

Pro intenzitu elektrického pole mezi válcovými vodiči platí vztah

$$E(x)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{s-x}\right)$$

Po přivedení napětí se podle {Př. ES/48} mezi válcovými vodiči objeví náboj

$$\tau=C/l\cdot U=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{s-a}{a}}\cdot U$$

Po zpětném dosazení do vztahu pro intenzitu za náboj obdržíme vztah

$$E(x)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{s-x}\right)=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{s-a}{a}}\cdot U\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{s-x}\right)=\frac{U}{2\ln\frac{s-a}{a}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{s-x}\right)$$

Největší intenzita elektrického pole bude na povrchu vlastních vodičů

$$E(x)=\frac{U}{2\ln\frac{s-a}{a}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{s-a}\right)$$

{Př. ES/71} Intenzita elektrického pole v dvouvodičovém vedení - číselný příklad

Je dáno dvouvodičové vzduchové vedení podle obrázku (Obr. ES-90), které má parametry: **a=2 mm**, **s/a= 30,** dovolená intenzita elektrického pole je $\mathbf{E_P=1k\ V/mm}$. Vydrží toto vedení bez průrazu napětí **U=10kV**?

Největší intenzita elektrického pole bude na povrchu vlastních vodičů, tedy:

$$\mathrm{E}(x=a)=\frac{U}{2\ln\frac{s-a}{a}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{s-a}\right)$$

V našem případě je vzdálenost mezi vodiči **s** mnohem větší než poloměr vodičů **a**, uvedený vztah lze dále zjednodušit zanedbáním **s** vůči **a**:

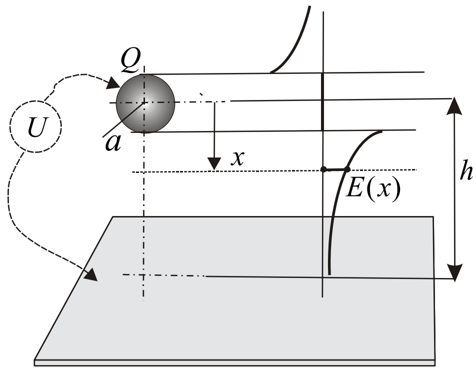
$$\mathrm{E}(x=a)=\frac{U}{2\ln\frac{s}{a}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{s}\right)=\frac{10\cdot 10^3}{2\ln(30)}\left(\frac{31}{30\cdot 2\cdot 10^{-3}}\right)=759.54\,\frac{kV}{m}=0.759\,\frac{kV}{mm}$$

Intenzita elektrického vedení na povrchu vedení nepřekračuje elektrickou pevnost vzduchu, vedení vydrží bez průrazu.

{Př. ES/72} Elektrické namáhání kulové elektrody nad zemí

Jak veliká intenzita elektrického pole bude mezi kulovou elektrodou a zemí podle obrázku (Obr. ES-61)?

Navazuje na
ES-i Elektrické namáhání pro základní typy elektrod
{Př. ES/50} Kapacita kulové elektrody nad zemí



(Obr. ES-91) Intenzita elektrického pole mezi kulovou elektrodou a zemí

Po přivedení napětí se na kulové elektrodě a zemi objeví náboj

$$Q=C\cdot U=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2h-a}\right)}\cdot U$$

Pro intenzitu elektrického pole v prostoru mezi kulovou elektrodou a zemí platí obecný vztah

$$E(x)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(2h-x)^2}\right)$$

Po zpětném dosazení za náboj na elektrodách obdržíme vztah pro intenzitu pole v závislosti na napětí

$$E(x)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(2h-x)^2}\right)=\frac{4\pi\varepsilon_0 U}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2h-a}\right)}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(2h-x)^2}\right)$$

$$E(x)=\frac{U}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2h-a}\right)}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(2h-x)^2}\right)$$

Největší intenzita elektrického pole bude na kulové elektrodě, nejmenší na uzemněné rovině

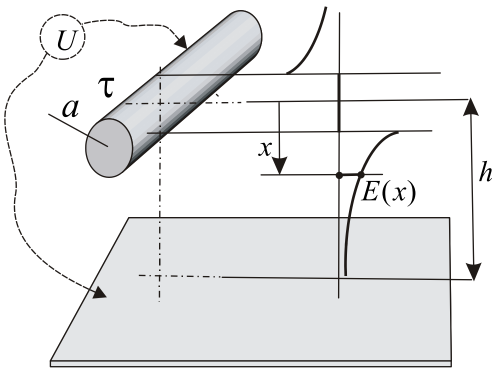
$$E(x=a)=\frac{U}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2h-a}\right)}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(2h-a)^2}\right)$$

$$E(x=h)=\frac{U}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2h-a}\right)}\frac{2}{h^2}$$

{Př. ES/73} Elektrické namáhání mezi válcovým vodičem a zemí

Jak veliká intenzita elektrického pole se objeví mezi vodičem a zemí podle obrázku (Obr. ES-92)?

Navazuje na
ES-i Elektrické namáhání pro základní typy elektrod
{Př. ES/60} Kapacita dvouvodičového vedení nad zemí



(Obr. ES-92) Intenzita elektrického pole mezi vodičem a zemí

Po přivedení napětí mezi vodič a zem se na vodiči i zemi objeví náboj s liniovou hustotou

$$\tau = C/l \cdot U = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{2h-a}{a}} \cdot U$$

Pro intenzitu elektrického pole v prostoru mezi vodičem a zemí bude platit vztah

$$E(x) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2h-x}\right)$$

Zpětným dosazením platí pro intenzitu elektrického pole vztah

$$E(x) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2h-x}\right) = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{2h-a}{a}} \cdot U \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2h-x}\right) = \frac{U}{\ln\frac{2h-a}{a}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2h-x}\right)$$

Intenzita elektrického pole na vodiči bude

$$E(x=a) = \frac{U}{\ln\frac{2h-a}{a}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2h-a}\right)$$

Intenzita elektrického pole na uzemněné rovině bude

$$E(x) = \frac{U}{\ln\frac{2h-a}{a}}\frac{2}{h}$$

{Př. ES/74} Elektrické namáhání mezi válcovým vodičem a zemí - číselný příklad

Do jaké výšky nad zemí musíme umístit válcový vodič o poloměru ***a=10 mm***, je-li mezi vodičem a zemí napětí ***U=10 kV. I***ntenzita elektrického pole nesmí přesáhnout hodnotu E_{max}=3kV/cm.

Navazuje ne
{Př. ES/73} Elektrické namáhání mezi válcovým vodičem a zemí

Maximální intenzita pole bude na vlastním vodiči a má hodnotu

$$E(x=a) = \frac{U}{\ln\frac{2h-a}{a}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2h-a}\right)$$

Tento vztah platí za předpokladu, že poloměr vodiče je podstatně menší, než vzdálenost od země, ale ani tak není obecně řešitelný. Budeme-li však uvažovat, že

$$h >> a$$

potom se tento vztah zjednoduší na

$$E(x=a) = \frac{U}{a\ln\frac{2h}{a}}$$

Pro minimální vzdálenost od země potom platí přibližně

$$h = \frac{a}{2}\exp\left(\frac{U}{E_{\max}a}\right) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{10}{3 \cdot 1}\right) = 14\,cm$$

ES-j Energie a síly v elektrickém poli

Energii v elektrostatickém poli je možné vyjádřit pomocí veličin pole

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{D}\,\mathrm{dV}$$

člen

$$w_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{D}$$

představuje hustotu energie elektrického pole. Energie v elektrostatickém poli je možné vyjádřit i pomocí integrálních veličin, kterými jsou kapacity a napětí. Energie v nabitém kondenzátoru je

$$W_e = \frac{1}{2}C\,U^2$$

Síly působící v elektrickém poli jsou projevem existence elektrických nábojů. Z praktického hlediska s ohledem na jejich velikost nemají tak velký význam jako síly v magnetickém poli.
Sílu působící na určité těleso v elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$ je teoreticky možno určit přímo superpozicí sil působících na jednotlivé bodové náboje, na které si těleso pomyslně rozdělíme. Síla působící na bodový náboj je

$$\boldsymbol{F} = Q.\boldsymbol{E}$$

Pro sílu působící na těleso, jehož náboj je rozložen v objemu tělesa s určitou objemovou hustotou $\boldsymbol{\rho}$, by tedy platilo

$$\boldsymbol{F} = \iiint_V \boldsymbol{E}\cdot\rho\,\mathrm{dV}$$

Podobně síla působící na těleso, které se nachází v elektrickém poli a jehož náboj je rozložen na povrchu s určitou plošnou hustotou σ, je

$$\mathbf{F} = \iint_S \mathbf{E}\cdot\sigma\,\mathrm{d}S$$

Při takovém výpočtu musíme pro každé těleso konkrétně znát, jak je náboj na tělese rozložen a jak velká intenzita elektrického pole kde působí. To je poněkud problematické, právě tyto údaje známe pouze v nejednodušších případech.
Při výpočtu síly na elementární objekty (bodové náboje, nabitá vlákna, nabité roviny) lze uvažovat pouze intenzitu elektrického pole ostatních objektů. U objemného tělesa jejich vlastní intenzita pole souvisí s vnitřními silami, které by se snažily těleso roztrhnout.

Princip virtuálních prací

Je to velice užitečná metoda, která umožní na základě integrální veličiny (v tomto případě kapacity mezi elektrodami) vypočítat jednoduše celkovou sílu působící na elektrody v určitém směru.Máme-li kondenzátor se dvěma elektrodami, mezi kterými je kapacita $\boldsymbol{C}$ a mezi které je přivedeno napětí o velikosti $\boldsymbol{U}$, bude v kondenzátoru naakumulovaná energie elektrického pole o velikosti

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2$$

Elektrody jsou opačně nabité, dalo by se očekávat, že na ně bude působit přitažlivá síla. Princip virtuálních prací je založen na této úvaze: Co by se stalo, kdybychom jednu z elektrod na chvíli uvolnili? Začala by se pohybovat ve směru působící síly. Dejme tomu, že by se pohnula o malý úsek $\mathbf{d}\boldsymbol{x}$ a potom bychom ji opět zastavili. Původní naakumulovaná energie by se musela zmenšit o jakousi malou část rovnou práci, kterou by pole posunem elektrody vykonalo

$$\mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}W_e$$

Znaménko mínus v tomto případě znamená, že se práce vykonává na úkor energie elektrického pole. Pro sílu potom vyplyne jednoduchý vztah

$$F = -\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2}U^2\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}$$

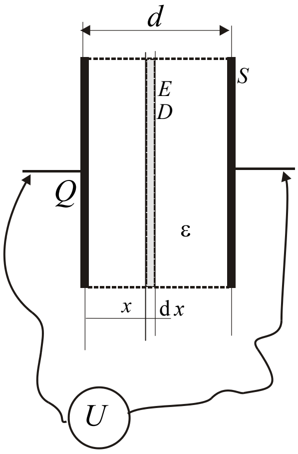
Tento vztah lze interpretovat takto: Známe-li velikost kapacity mezi dvěma elektrodami a víme-li, jak se velikost kapacity mění v určitém směru (například funkce udávající velikost kapacity v závislosti na vzdálenosti elektrod), potom stačí tuto funkci v daném směru derivovat a podle výše uvedeného vztahu dostaneme velikost působící síly v tomto směru.

Název princip virtuálních (zdánlivých) prací vyplývá z toho, že ve skutečnosti žádnou práci nevykonáme, žádné z těles se nikam nepohne, všechny úvahy jsou pouze imaginární, co by se stalo, kdyby…Tento výpočet slouží pouze k určení celkové síly a ne lokální síly, která by působila na jednotlivé části tělesa.

{Př. ES/75} Energie elektrického pole v deskovém kondenzátoru

Jak veliká energie elektrického pole je naakumulována v deskovém kondenzátoru podle obrázku (Obr. ES-93)?

Navazuje na:
ES-j Energie a síly v elektrickém poli
{Př. ES/23} Elektrické pole dvou opačně nabitých rovin
{Př. ES/38} Kapacita deskového kondenzátoru s homogenním dielektrikem



(Obr. ES-93) Energie elektrického pole v deskovém kondenzátoru

Po přivedení napětí na desky kondenzátoru se na deskách objeví náboj, který vybudí elektrické pole o indukci

$$D = \frac{Q}{S}$$

Intenzita elektrického pole v tomto kondenzátoru bude

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot S}$$

V elementu objemu o velikosti

$$\mathrm{d}V = S \cdot \mathrm{d}x$$

bude energie elektrického pole

$$w_e = \frac{1}{2} D\, E\, \mathrm{d}V$$

Celkovou energii získáme integrací

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_V D \cdot E \cdot \mathrm{d}V = \frac{1}{2} S \int_{x=0}^{d} \frac{Q}{S}\frac{Q}{\varepsilon \cdot S}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} Q^2 \frac{d}{\varepsilon \cdot S} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

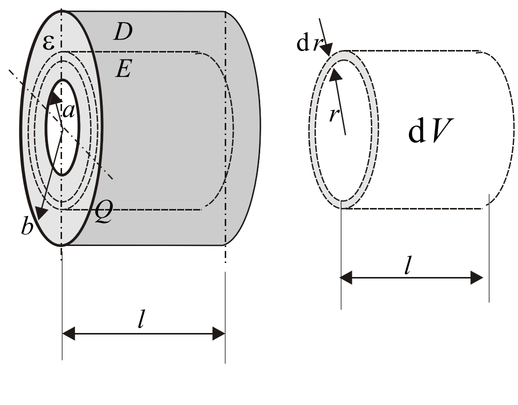
Je patrno, že skutečně platí známý vztah mezi kapacitou napětím a energií v kondenzátoru

$$W_e = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

{Př. ES/76} Energie elektrického pole ve válcovém kondenzátoru

Jak veliká energie elektrického pole je akumulována ve válcovém kondenzátoru s homogenním dielektrikem podle obrázku (Obr. ES-94)?

Navazuje na:
ES-j Energie a síly v elektrickém poli
{Př. ES/25} Elektrické pole dvou opačně nabitých koaxiálních válců
{Př. ES/42} Kapacita válcového kondenzátoru s homogenním dielektrikem



(Obr. ES-94) Energie elektrického pole ve válcovém kondenzátoru

Po přivedení napětí se na elektrodách objeví elektrický náboj, který vybudí elektrické pole. Indukce elektrického pole bude mít velikost

$$D(r) = \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot l}$$

Intenzita elektrického pole bude mít velikost

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot r \cdot l}$$

V objemu

$$\mathrm{d}V = 2\pi \cdot r \cdot \mathrm{d}r \cdot l$$

Je akumulována energie elektrického pole

$$w_e = \frac{1}{2} D\, E\, \mathrm{d}V$$

Celkovou energii získáme integrací, která je poněkud složitější než v {Př. ES/75}

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V D \cdot E \cdot \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot l}\right)^2 \cdot 2\pi \cdot r \cdot \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon \cdot l}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} l$$

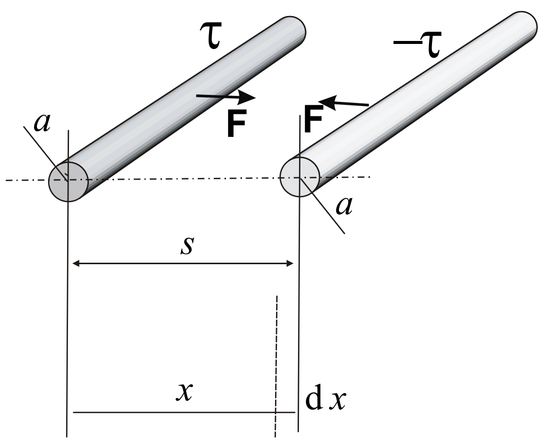
I zde samozřejmě platí známý vztah mezi napětím na kondenzátoru, kapacitou a energií

$$W_e = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

{Př. ES/77} Síla působící na dva rovnoběžné vodiče

Jak veliká elektrická síla působí mezi dvěma rovnoběžnými vodiči podle obrázku?

Navazuje na
(Obr. ES-15) Elektrické pole dlouhého tenkého vodiče
{Př. ES/48} Kapacita dvouvodičového vedení



(Obr. ES-95) Elektrická síla působící na rovnoběžné vodiče

Mezi vodiči bude působit přitažlivá síla, která bude mít podle definice velikost

$$F = Q \cdot E$$

U nekonečně dlouhých vodičů je vše vztaženo na jednotku délky vodiče

$$F/l = \tau \cdot E$$

E je intenzita elektrického pole vybuzená jedním vodičem v místě druhého vodiče

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}$$

Po dosazení

$$F/l = \tau.E = \tau \cdot \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{s} = \frac{(C/l.U)^2}{2\pi\varepsilon \cdot s} = \frac{\pi\varepsilon}{2s \cdot \ln^2\left(\frac{s}{a}\right)}U^2$$

Náboj na jednotku délky byl vyjádřen pomocí kapacity na jednotku délky

$$C/l = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\frac{s}{a}}$$

Pomocí principu virtuálních prací dostaneme zcela stejný výsledek

$$|F_e| = \left|\frac{1}{2}U^2\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\right| = \frac{1}{2}U^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}\right)_{x=s} = \frac{\pi\varepsilon}{2s \cdot \ln^2\left(\frac{s}{a}\right)} \cdot U^2$$

{Př. ES/78} Síla působící v elektrickém poli na dva rovnoběžné vodiče

Jaká síla působí mezi dvěma rovnoběžnými vodiči z příkladu ES/54? **a=2mm**, **s/a=30, U=10kV**?

Navazuje na
{Př. ES/77} Síla působící na dva rovnoběžné vodiče

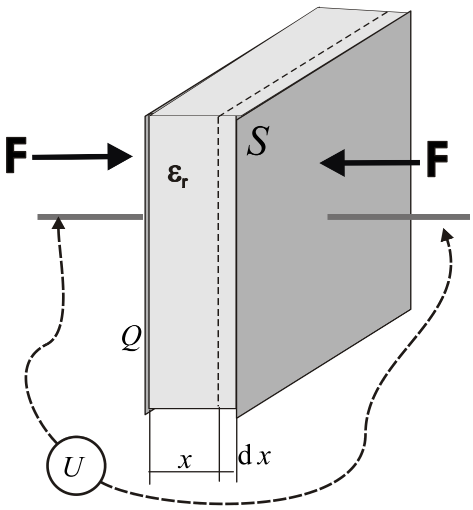
Působící síla je dána vztahem

$$F/l = \frac{\pi\varepsilon}{2s\cdot\ln^2\left(\frac{s}{a}\right)}U^2 = \frac{\pi\varepsilon}{2\cdot 30a\cdot\ln^2(30)}\left(10\cdot 10^3\right)^2 = 2\ \frac{\mu N}{m}$$

{Př. ES/79} Síla přitahující desky kondenzátoru k sobě

Jak velikou silou jsou přitahovány desky deskového kondenzátoru podle obrázku (Obr. ES-96)?

Navazuje na
ES-j Energie a síly v elektrickém poli
{Př. ES/21} Elektrické pole nekonečně rozlehlé rovnoměrně nabité vodivé roviny
{Př. ES/38} Kapacita deskového kondenzátoru s homogenním dielektrikem



(Obr. ES-96) Síla působící na desky deskového kondenzátoru

Desky kondenzátoru jsou nabity opačným nábojem a přitahují se. Velikost síly je dána podle definice vztahem

$$F = Q\cdot E = Q\cdot\frac{Q}{2\varepsilon S} = \frac{(C\cdot U)^2}{2\varepsilon S}$$

E je intenzita elektrického pole vybuzená jednou deskou(rovinou) v místě druhé desky

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} = \frac{Q}{2\varepsilon\cdot S}$$

Po dosazení je síla

$$F = \frac{\left(\frac{\varepsilon S}{d}U\right)^2}{2\varepsilon S} = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{U}{d}\right)^2 S = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 S$$

Pro vyjádření velikosti náboje v závislosti na napětí bylo použito kapacity

$$C = \frac{\varepsilon\cdot S}{d}$$

Pomocí principu virtuálních prací je možno sílu stanovit na základě pomyslné změny energie (derivace) ve směru předpokládaného působení síly, v našem případě v závislosti na vzdálenosti mezi deskami

Velikost síly není závislá na tom, zda se jedná o soustavu s konstantním napětím nebo nábojem. Nezáleží tedy na tom, je-li kondenzátor připojen ke zdroji napětí či po nabití odpojen, aby na něm zůstal konstantní náboj.
V případě konstantního napětí bude platit

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2$$

$$|F_e| = \left|\frac{1}{2}U^2\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\right| = \left|\frac{1}{2}U^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\varepsilon S}{x}\right)_{x=d}\right| = \frac{1}{2}U^2\frac{\varepsilon S}{d^2} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 S$$

V případě konstantního náboje bude platit analogicky

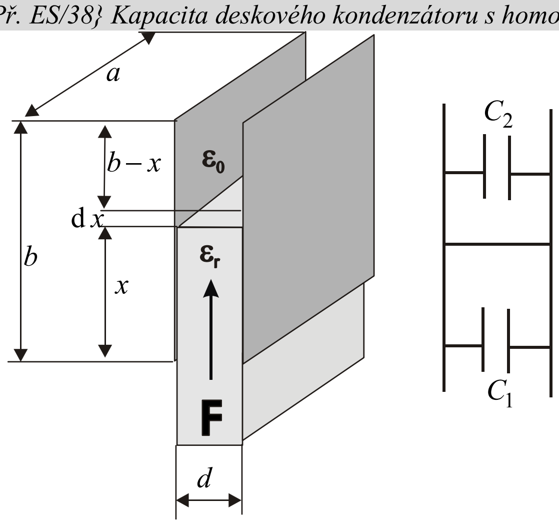
$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$|F_e| = \frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}Q^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{1}{2}Q^2\frac{1}{C^2}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}U^2\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 S$$

{Př. ES/80} Síla působící na částečně zasunuté dielektrickum v deskovém kondenzátoru

Jak velká síla a v jakém směru působí na částečně zasunuté dielektrikum v deskovém kondenzátoru podle obrázku (Obr. ES-97)?

Navazuje na
ES-j Energie a síly v elektrickém poli
{Př. ES/38} Kapacita deskového kondenzátoru s homogenním dielektrikem



(Obr. ES-97) Síla působící na částečně zasunuté dielektrikum v deskovém kondenzátoru

Stanovení smyslu působící síly není v tomto případě již tak snadno možné. Jedná se sice opět o vzájemné silové působení nábojů, ale vystopovat velikost a rozložení vázaných nábojů, které se v dielektriku indukují, je problematické. Při stanovení smyslu síly je možno si pomoci jednoduchou úvahou. Podle platného fyzikálního principu se snaží izolovaná soustava zaujmout polohu s nejmenší potenciální energií. V našem případě můžeme za izolovanou soustavu považovat nabitý kondenzátor odpojený od napětí. Jeho energie bude

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Kondenzátor zaujme polohu s co možná nejmenší energií. Ze vztahu pro energii vyplývá, že bude co možná nejvíce zvětšovat svoji kapacitu. To znamená, v případě sil působících kolmo na desky, přiblížení desek k sobě a v případě částečně zasunutého dielektrika vtahování dielektrika mezi desky kondenzátoru.

Soustavu lze považovat za dva paralelně spojené kondenzátory o velikosti

$$C_1 = \frac{\varepsilon \cdot S_1}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r x a}{d}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon \cdot S_2}{d} = \frac{\varepsilon_0 (b-x) a}{d}$$

Pro velikost síly dostáváme pomocí principu virtuálních prací vztah

$$|F_e| = \left|\frac{1}{2}U^2\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\right| = \frac{1}{2}U^2\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(C_1 + C_2)\right| = \frac{1}{2}U^2\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r x a}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r (b-x) a}{d}\right)\right|$$

$$|F_e| = \frac{1}{2}U^2\left|\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r a}{d} - \frac{\varepsilon_0 a}{d}\right)\right| = \frac{U^2 a}{2d}\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)$$

{Př. ES/81} Síla působící na částečně zasunuté dielektrikum v kondenzátoru - číselný příklad

Jak velká síla $|\mathbf{F}_e|$ působí na částečně zasunuté dielektrikum v deskovém kondenzátoru podle obrázku (Obr. ES-97), který má rozměry **d=2 mm**, **a=5 cm**, **b=8 cm**, $\boldsymbol{\varepsilon_r}$**=3.2** a je připojen na napětí **U=2500V**? Vypočtěte energii elektrostatického pole **W** akumulovanou v daném kondenzátoru při plně vsunutém dielektriku (x=b)

Sílu působící na částečně zasunuté dielektrikum vypočteme podle vztahu:

$$|F_e| = \frac{U^2 a}{2d}\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) = \frac{2500^2 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}\varepsilon_0(3.2 - 1) = 216\mathrm{N}$$

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}\frac{U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 3.2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3}}\frac{2500^2}{2} = 177.1\mu\mathrm{J}$$