

Elektromagnetické pole - příklady

Vojtěch Neuman

Říjen 2025

Obsah

1	Matematika	5
1.1	Vektorová algebra	5
1.1.1	Základní operace	5
1.1.2	Souřadnice vektoru vůči bázi	7
1.2	Vektorová analýza	10
1.2.1	Polohové vektory	10
1.2.2	Vektorové pole	11
1.2.3	Souřadnice, vektory a diferenciály	12
1.3	Diferenciální operátory	19
1.3.1	Gradient	19
1.3.2	Divergence	21
1.3.3	Rotace	23
1.3.4	Laplaceův operátor	26
1.3.5	Diferenciální identity	27
1.4	Integrální počet	28
1.4.1	Jednoduché integrály	28
1.4.2	Konvoluční integrály	29
1.4.3	Integrace vektorového pole	30
1.4.4	Souřadnicové substituce	31
1.4.5	Křivkové integrály prvního typu	34
1.4.6	Křivkové integrály druhého typu	35
1.4.7	Plošné integrály prvního typu	37
1.4.8	Plošné integrály druhého typu	38
1.4.9	Integrální identity	40
1.5	Shrnutí	41

Kapitola 1

Matematika

Pro studium elektromagnetického pole potřebujeme znát základní koncepty z matematické analýzy a vektorové algebry. Následující sekce obsahují opakování nejdůležitějších pojmů, které nás v průběhu předmětu elektromagnetické pole potkají. Matematické identity uvedené v samostatném souboru zde mají svůj dodatečný kontext. Zvolené značení bylo zvoleno jako kompromis mezi matematickými předměty vyučovanými na elektrotechnické fakultě a standardní literaturou zabývající se elektromagnetickým polem.

1.1 Vektorová algebra

Vektory a operace nad nimi představují základní kameny pro popis elektromagnetického pole. V celém textu se omezíme na vektory z prostorů $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ a uvedeme základní operace.

1.1.1 Základní operace

Jedna z nejmocnějších vlastností teorie elektromagnetického pole je princip superpozice¹. Základními operacemi uvedeného nástroje je sčítání vektorů a jejich násobení skalární hodnotou

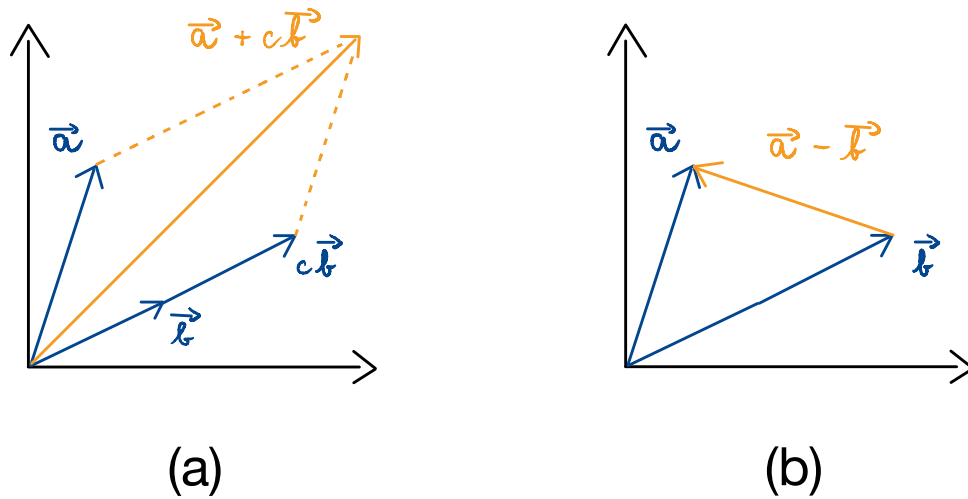
$$\mathbf{a} + c\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cb_1 \\ cb_2 \\ cb_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + cb_1 \\ a_2 + cb_2 \\ a_3 + cb_3 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

kde $c \in \mathbb{R}$. Graficky je tato operace ilustrována na obrázku 1.1. Rozdíl dvou vektorů je stejný jako sčítání

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

ovšem vzhledem ke grafické interpretaci, viz obrázek 1.1, můžeme operaci chápat i jako vliv bodu $\mathbf{b}$ na bod $\mathbf{a}$. Zmíněný princip si přiblížíme v dalším.

¹V předmětu se omezíme pouze na případy, kde jsou všechny materiálové vztahy lineární funkce.



Obrázek 1.1: Operace s vektory. (a) Součet dvou vektorů. (b) Rozdíl dvou vektorů.

Skalárním součinem² dvou vektorů uvažujeme výraz

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (1.3)$$

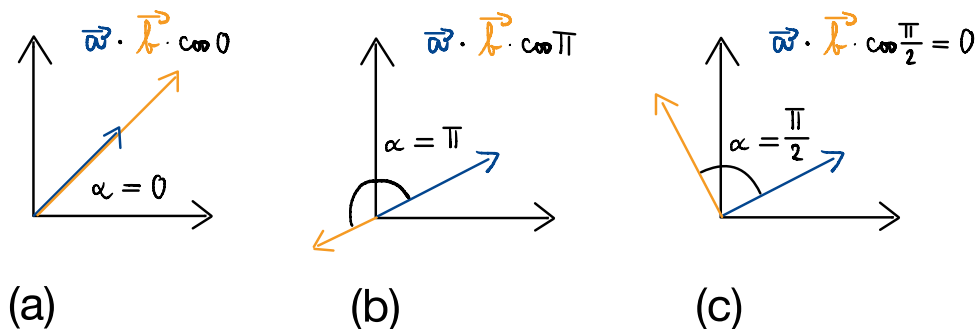
Důležitou vlastností skalárního součinu je, že s jeho pomocí můžeme definovat normu $\| - \|$ vektoru

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2. \quad (1.4)$$

Skalární součin můžeme chápat i jako míru podobnosti směru dvou vektorů. Velmi dobře je tento princip znatelný z alternativního vyjádření

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \alpha, \quad (1.5)$$

kde α je úhel, který spolu vektory svírají. Pokud je úhel mezi vektory roven 0, jsou oba vektory rovnoběžné a hodnota skalárního součinu je maximální. V případě úhlu π jsou vektory stále rovnoběžné, ale mají opačný směr a hodnota výrazu (1.3) je minimální. Třetí zajímavý případ je úhel $\pi/2$, pro nějž je skalární součin roven nule a vektory jsou na sebe kolmé. Všechny případy ilustruje obrázek 1.2.



Obrázek 1.2: Enter Caption

Poslední důležitou operací, kterou si uvedeme, je vektorový součin dvou vektorů

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \mathbf{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

²V rámci předmětu nebudeme potřebovat složitější definice skalárního součinu a zcela odstupíme od braketové notace.

Na rozdíl od všech předchozích operací zde neplatí komutativita a nemůžeme vektory mezi sebou zaměňovat. Vektorový součin je asymetrická operace

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \quad (1.7)$$

Ve vztahu (1.6) je uveden výpočet pomocí determinantu matice obsahující složky obou vektorů a pak jednotlivé báze vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}_3$. Bázím se budeme věnovat v další sekci, nyní jen uvedme, že je důležité, aby oba vektory byly vyjádřené ve stejné bázi.

Pro vektorový součin opět existuje alternativní vzorec, který se nám v některých aplikacích bude hodit. Opět obsahuje výraz zohledňující úhel mezi oběma vektory

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \mathbf{n} \sin \alpha, \quad (1.8)$$

kde $\mathbf{n}$ je vektor s jednotkou velikostí $\|\mathbf{n}\| = 1$, který je kolmý na oba vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, a udává směr výsledného vektoru. Při grafické interpretaci vektorového součinu používáme pro určení směru výsledného vektoru pravidlo pravotočivého šroubu. Do roviny vymezené vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ vložíme kolmo šroub a sledujeme nejmenší úhel α , který oba vektory svírají. Pokud se při otočení o daný úhel šroub do roviny zašroubovává, pak i výsledný směr směřuje dovnitř. Naopak při vyšroubovávání směřuje výsledný vektor směrem od roviny.

Úhel α ve vztahu (1.6) má opět zajímavé případy. Pro dva rovnoběžné vektory je výsledný vektor nulový. Naopak dva vektory na sebe kolmé vedou na vektor s největší normou $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$.

1.1.2 Souřadnice vektoru vůči bázi

V předchozím jsme používali zápis vektorů se složkami vypsány pod sebe v závorkách. Libovolný vektor můžeme zapsat i alternativními způsoby

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3, \quad (1.9)$$

kde jsme kromě souřadnic a_n zohlednili i báze vektory $\mathbf{e}_n$. Až do této chvíle jsme vycházeli z předpokladu, že používáme kanonickou bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, jejíž báze lze reprezentovat jednotkovou maticí. Často narazíme na případy, kdy je výhodné vektory převést do jiného báze systému. Pro libovolný vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ musí platit

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = \tilde{a}_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{a}_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{a}_3 \tilde{\mathbf{e}}_3, \quad (1.10)$$

kde systém vektorů $\tilde{\mathbf{e}}_n$ je odlišný od původní báze a má také jiné souřadnice $\tilde{a}_n$.

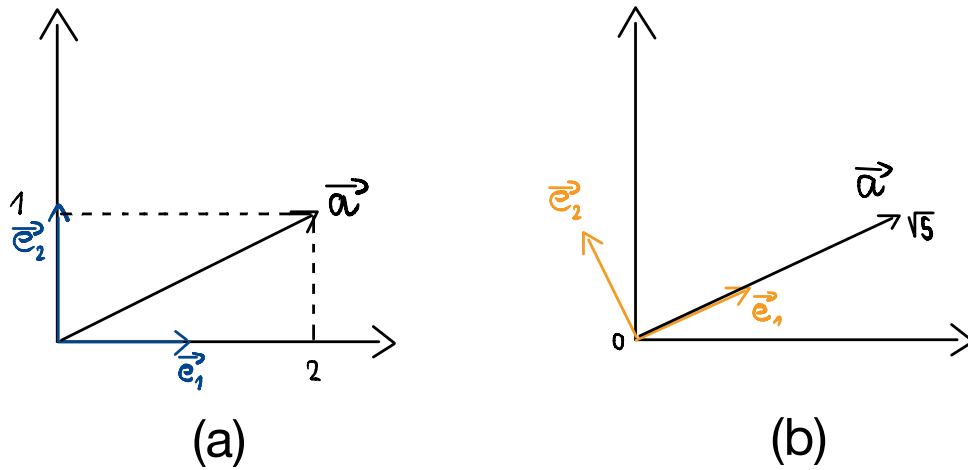
Pro přiblížení si představme následující příklad, v němž jako první bázi volíme kanickou K_3

$$K_3 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (1.11)$$

Uvažujme v ní vektor $\mathbf{a}$ se souřadnicemi

$$\mathbf{a} = 2 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Řečeno slovy, vektor $\mathbf{a}$ má souřadnici $a_1 = 2$ pro vektor $\mathbf{e}_1$, $a_2 = 1$ pro vektor $\mathbf{e}_2$ a $a_3 = 0$ pro vektor $\mathbf{e}_3$. Situaci zachycuje obrázek 1.3, který je pro jednoduchost zobrazen pouze planárně.



Obrázek 1.3: Souřadnice vektoru vůči bázi. (a) Báze s $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ a $\vec{e}_3$. (b) Báze s $\tilde{\vec{e}}_1, \tilde{\vec{e}}_2$ a $\tilde{\vec{e}}_3$.

Zavedme nyní další bázi

$$B = \{\tilde{\vec{e}}_1, \tilde{\vec{e}}_2, \tilde{\vec{e}}_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.13)$$

Vektor $\vec{a}$ vyjádříme v nové bázi

$$\vec{a} = \sqrt{5}\tilde{\vec{e}}_1 + 0\tilde{\vec{e}}_2 + 0\tilde{\vec{e}}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Můžeme si povšimnout, že v takto zvolené bázi má vektor $\vec{a}$ pouze složku $\tilde{a}_1 = \sqrt{5}$, viz obrázek 1.3. Později v textu uvidíme, jak použitím vhodné báze můžeme docílit podstatného zjednodušení výrazů a výpočtů.

Mezi různými bázemi potřebujeme umět v obou směrech přecházet. Můžeme k tomu použít matici transformace souřadnic $\mathbf{T}$, která převádí složky mezi jednotlivými bázemi

$$\mathbf{T}_{K_3 \rightarrow B} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Matici přechodu mezi souřadnicemi získáme triviálně, pokud do n -tého sloupce matice $\mathbf{T}_{K_3 \rightarrow B}$ zapíšeme souřadnice vektoru $\vec{e}_n$ vzhledem k bázi C . Pro uvažovaný případ obdržíme

$$\mathbf{T}_{K_3 \rightarrow B} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Postup můžeme ověřit transformováním souřadnicového vektoru výše

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Pro zpětnou transformaci použijeme inverzní matici

$$\mathbf{T}_{B \rightarrow K_3} = (\mathbf{T}_{K_3 \rightarrow B})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

U transformací souřadnic je vždy zachovat obezřetnost, neboť výsledné vektory představují souřadnice vůči bázi, do které jsme z původní báze přecházeli. **Vektory na pravé a na levé straně mají oba odlišnou bázi.** Obecné pravidlo transformace souřadnic mezi libovolnými bázemi B a C lze najít ve skriptech [4].

Pro naše účely nás zajímá mírně odlišná operace. Potřebujeme vědět, jak vyjádřit bázevé vektory jedné báze za pomoci vektorů druhé báze. Uvažujme následující rovnost

$$(\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (\tilde{\mathbf{e}}_1 \ \tilde{\mathbf{e}}_2 \ \tilde{\mathbf{e}}_3) \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Do rovnice (1.19) dosadíme vztah (1.15) a obdržíme výsledek

$$(\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (\tilde{\mathbf{e}}_1 \ \tilde{\mathbf{e}}_2 \ \tilde{\mathbf{e}}_3) \mathbf{T}_{K_3 \rightarrow B} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

ze které můžeme odvodit transformační pravidlo mezi dvěma bázemi

$$(\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3) = (\tilde{\mathbf{e}}_1 \ \tilde{\mathbf{e}}_2 \ \tilde{\mathbf{e}}_3) \mathbf{T}_{K_3 \rightarrow B} = (\tilde{\mathbf{e}}_1 \ \tilde{\mathbf{e}}_2 \ \tilde{\mathbf{e}}_3) (\mathbf{T}_{B \rightarrow K_3})^{-1} \quad (1.21)$$

Ze vztahu (1.21) můžeme vyvodit závěr, že bázevé vektory se transformují pomocí inverze matice transformace souřadnic. Opět si můžeme princip ukázat na zvoleném příkladu výše

$$\mathbf{e}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{\mathbf{e}}_2, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{e}_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{\mathbf{e}}_2, \quad (1.23)$$

$$\mathbf{e}_3 = \tilde{\mathbf{e}}_3, \quad (1.24)$$

$$(1.25)$$

kde jsme jednotlivé bázevé vektory vyjádřili ve složkovém tvaru. Můžeme nalézt i opačnou transformaci

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{e}_2, \quad (1.26)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{e}_2, \quad (1.27)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3. \quad (1.28)$$

$$(1.29)$$

Všechny báze, které budeme v tomto textu používat, mají tři následující vlastnosti.

1. Každé dva vektory jsou na sebe kolmé

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = 0, \quad m \neq n. \quad (1.30)$$

2. Všechny bázevé vektory jsou normalizované

$$\|\mathbf{e}_n\| = 1. \quad (1.31)$$

3. Výsledek vektorového součinu mezi dvěma vektory z báze bude třetí bázevý vektor

$$\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n = \pm \mathbf{e}_k, \quad m \neq n \neq k. \quad (1.32)$$

Znaménko $\pm$ bude záviset na uspořádání vektorů v bázi.

Matematický termín pro výše uvedené vlastnosti je **uspořádaná ortonormální báze**.

V následujícím odstoupíme od exaktních názvů a uspořádanou ortonormální bázi budeme nazývat pouze jako **vektorová souřadná soustava**. Opustíme také od zápisu do závorek a souřadnice vektorů budeme označovat jako složky nebo komponenty vektorů. Primárně budeme potřebovat kartézský systém, v němž uvažujeme

$$K_3 = \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0\}. \quad (1.33)$$

Pro vektory $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ a $\mathbf{z}_0$ platí výše uvedené vlastnosti. Uvedme ovšem alespoň jednotlivé vektorové součiny

$$\mathbf{x}_0 \times \mathbf{y}_0 = \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{y}_0 \times \mathbf{z}_0 = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{z}_0 \times \mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0. \quad (1.34)$$

Zde je nutné zdůraznit antisymetrii vektorového součinu. Pokud by bylo pořadí vektorů na pravé straně obrácené, bylo by nutné přidat na levou stranu znaménko mínus.

1.2 Vektorová analýza

Od lineární algebry se nyní přesuneme k matematické analýze. Zavedeme si koncepty vektorového pole a ukážeme si zásadní rozdíly oproti vektorům. Většinu matematických výrazů nyní uvažujeme jako funkce závislé na konkrétních proměnných.

1.2.1 Polohové vektory

Před přistoupením k popisu pole musíme určit, kde v prostoru se zrovna nacházíme. Používáme k tomu pozorovací vektor

$$\mathbf{r} = x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0 + z\mathbf{z}_0, \quad (1.35)$$

vyjádřený v kartézské vektorové soustavě. Jednotlivými souřadnicemi x, y a z pak přesně určíme polohu pozorovaného bodu. Občas si pomocí tohoto vektoru budeme i zkracovat matematický zápis. Výraz

$$f(\mathbf{r}) = f(x, y) = x - y, \quad (1.36)$$

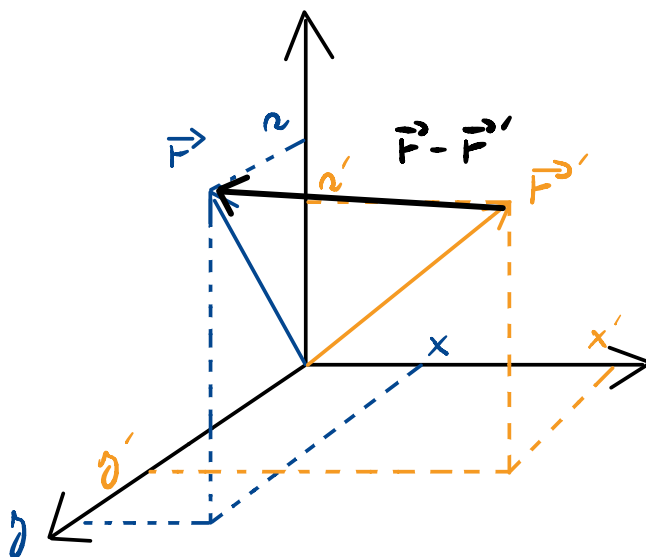
značí, že funkce f je funkcí x, y a z . Přestože v případě (1.36) nezávisí funkce explicitně na z , budeme tento zápis používat i v takových případech. Zmiňme ještě, že velikost polohového vektoru budeme zkracovat jako

$$\|\mathbf{r}\| = r \quad (1.37)$$

Často budeme potřebovat ještě druhý vektor, kterým v prostoru lokalizujeme zdroj. Použijeme pro něj čarované proměnné

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{x}_0 + y'\mathbf{y}_0 + z'\mathbf{z}_0. \quad (1.38)$$

Oba vektory si můžeme přiblížit pomocí obrázku 1.4.

Obrázek 1.4: Grafické zobrazení polohových vektorů $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}'$.

Pozorovatel je umístěn v bodě $\mathbf{r}$ a zkoumá účinek zdroje, který je umístěn v bodě $\mathbf{r}'$. Zásadní rozdíl mezi oběma vektory je, že pozorovací vektor $\mathbf{r}$ nás zajímá většinou v celém prostoru $\mathbb{R}^3$. Naopak zdrojový vektor $\mathbf{r}'$ je vždy omezen na podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^3$.

V mnoha vztazích se vyskytuje rozdíl obou polohových vektorů $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Ve vektorovém světě tento zápis zjednodušeně vyjadřuje efekt zdroje v bodě $\mathbf{r}'$ na pozorovatele v bodě $\mathbf{r}$. V mnoha vztazích se objevuje velikost tohoto rozdílu

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \quad (1.39)$$

Můžeme též říct, že vztah (1.39) představuje vzdálenost mezi pozorovatelem a zdrojem.

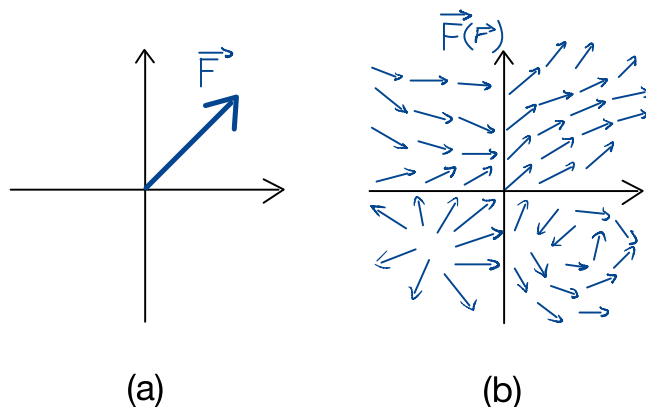
1.2.2 Vektorové pole

Vektorové pole je zobrazení $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, které každému místu v prostoru jednoznačně přiřazuje velikost a směr. Budeme pro něj používat následující symbolický zápis

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_x(\mathbf{r}) \mathbf{x}_0 + F_y(\mathbf{r}) \mathbf{y}_0 + F_z(\mathbf{r}) \mathbf{z}_0, \quad (1.40)$$

kde komponenty F_x , F_y a F_z jsou skalární funkce.

Obrázek 1.5 ilustruje základní rozdíl vektorového pole oproti běžným vektorům.



Obrázek 1.5: Konceptuální rozdíl mezi vektorem (a) a vektorovým polem (b).

Charakter obou veličin lze interpretovat fyzikálně pomocí Coulombova zákona pro dva bodové náboje. Pro bodový náboj Q_1 je elektrická intenzita pole rovna

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|^3}. \quad (1.41)$$

Jedná se o **vektorové pole**, které v každém bodě $\mathbf{r}$ prostoru předpisuje účinky bodového náboje Q_1 . Pokud vztah (1.41) vynásobíme nábojem Q_2 umístěným v místě $\mathbf{r}_2$ obdržíme sílu, kterou na sebe oba náboje působí

$$\mathbf{F} = Q_2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_2) = \frac{Q_2 Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3}. \quad (1.42)$$

Silový vektor již není pole, ale pouze **vektor**. Oba náboje jsou přesně umístěné a sledujeme pouze sílu, kterou na sebe působí.

1.2.3 Souřadnice, vektory a diferenciály

Náš výchozí systém pro popis problémů je kartézský systém souřadnic

$$f(\mathbf{r}) = f(x, y, z). \quad (1.43)$$

Všechny body v nichž vyhodnocujeme funkci f můžeme zanést do pravoúhlé mřížky. V případě vektorových polí uvažujeme kartézské vektory

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_x(\mathbf{r}) \mathbf{x}_0 + F_y(\mathbf{r}) \mathbf{y}_0 + F_z(\mathbf{r}) \mathbf{z}_0. \quad (1.44)$$

Pro integrální počet potřebujeme diferenciální elementy, které jsou v kartézské soustavě velmi jednoduše uchopitelné

$$d\ell_x = dx, \quad (1.45)$$

$$d\ell_y = dy, \quad (1.46)$$

$$d\ell_z = dz. \quad (1.47)$$

Pomocí diferenciálů můžeme definovat elementární objem

$$dV = d\ell_x d\ell_y d\ell_z = dx dy dz \quad (1.48)$$

a vzdálenost dvou infinitesimálně blízkých bodů

$$d\ell^2 = d\ell_x^2 + d\ell_y^2 + d\ell_z^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.49)$$

V teorii elektromagnetického pole existuje mnoho případů, kdy je výhodnější od kartézských souřadnic přejít do jiných systémů. Uvažujme následující transformaci

$$x = T_x(\xi, \chi, \psi), \quad (1.50)$$

$$y = T_y(\xi, \chi, \psi), \quad (1.51)$$

$$z = T_z(\xi, \chi, \psi). \quad (1.52)$$

Funkce T_x , T_y a T_z mapují nové proměnné ξ , χ a ψ na kartézský systém. Po dosazení do původní funkce pak získáme vyjádření v nových souřadnicích

$$f(\mathbf{r}) = f(T_x(\xi, \chi, \psi), T_y(\xi, \chi, \psi), T_z(\xi, \chi, \psi)) = f(\xi, \chi, \psi). \quad (1.53)$$

Podobně můžeme pracovat s vektorovými poli

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_x(\xi, \chi, \psi) \mathbf{x}_0 + F_y(\xi, \chi, \psi) \mathbf{y}_0 + F_z(\xi, \chi, \psi) \mathbf{z}_0. \quad (1.54)$$

Zdůrazněme ovšem, že přestože jsme vyjádřili **kartézské souřadnice** alternativními proměnnými, vektorové pole $\mathbf{F}$ je stále reprezentováno v **kartézském vektorovém systému** s vektory

$\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$ a $\mathbf{z}_0$. Úvahu o změně souřadnic lze rozšířit na transformaci vektorových komponent do složek F_ξ , F_χ a F_ψ a vyjádřit s nimi uvažované vektorové pole

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_\xi(\xi, \chi, \psi) \boldsymbol{\xi}_0 + F_\chi(\xi, \chi, \psi) \boldsymbol{\chi}_0 + F_\psi(\xi, \chi, \psi) \boldsymbol{\psi}_0. \quad (1.55)$$

Všechny vektorové systémy, které budeme uvažovat, splňují podmínky ze sekce 1.1.2. Zopakujeme alespoň částečně uvedená pravidla

$$\boldsymbol{\xi}_0 \cdot \boldsymbol{\xi}_0 = 1, \quad (1.56)$$

$$\boldsymbol{\xi}_0 \cdot \boldsymbol{\chi}_0 = 0, \quad (1.57)$$

$$\boldsymbol{\xi}_0 \times \boldsymbol{\chi}_0 = \boldsymbol{\psi}_0. \quad (1.58)$$

Pro efektivní práci s různými vektorovými systémy potřebujeme transformační vztahy, pomocí kterých mezi soustavami přecházíme. Základní princip je totožný k transformaci složek a báze vektorů popsané v sekci 1.1.2. Hledáme příslušnou transformační matici. V pravoúhlém souřadnicovém systému můžeme vektor chápat jako rozdíl dvou libovolných souřadnic. V křivočarém prostoru je nutné zvolit obecnější definici. Můžeme ovšem uvažovat, že dva body mají v křivočarých souřadnicích velmi malou vzdálenost, kterou limitním přechodem snížíme až na infinitesimální úroveň. Vzdálenost v tomto případě můžeme chápat jako diferenciál $d\ell$. Pomocí této definice můžeme vyvodit závěr, že transformace diferenciálů je formálně stejná jako transformace báze vektorů. Od matematické analýzy zde volně přecházíme do diferenciální geometrie, kde by ovšem další výklad byl nad rámec tohoto textu. Uvedeme pouze základní myšlenku a budeme se dále věnovat přímo konkrétním příkladům.

Pro získání transformačních pravidel začneme s určením diferenciálů ze vztahů (1.50)–(1.52) z nichž obdržíme sadu rovnic

$$dx = \frac{\partial T_x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial T_x}{\partial \chi} d\chi + \frac{\partial T_x}{\partial \psi} d\psi, \quad (1.59)$$

$$dy = \frac{\partial T_y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial T_y}{\partial \chi} d\chi + \frac{\partial T_y}{\partial \psi} d\psi, \quad (1.60)$$

$$dz = \frac{\partial T_z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial T_z}{\partial \chi} d\chi + \frac{\partial T_z}{\partial \psi} d\psi. \quad (1.61)$$

Při návratu ke směrovým vektorům získáme požadovaná pravidla

$$\mathbf{x}_0 = \frac{\partial T_x}{\partial \xi} \boldsymbol{\xi}_0 + \frac{\partial T_x}{\partial \chi} \boldsymbol{\chi}_0 + \frac{\partial T_x}{\partial \psi} \boldsymbol{\psi}_0, \quad (1.62)$$

$$\mathbf{y}_0 = \frac{\partial T_y}{\partial \xi} \boldsymbol{\xi}_0 + \frac{\partial T_y}{\partial \chi} \boldsymbol{\chi}_0 + \frac{\partial T_y}{\partial \psi} \boldsymbol{\psi}_0, \quad (1.63)$$

$$\mathbf{z}_0 = \frac{\partial T_z}{\partial \xi} \boldsymbol{\xi}_0 + \frac{\partial T_z}{\partial \chi} \boldsymbol{\chi}_0 + \frac{\partial T_z}{\partial \psi} \boldsymbol{\psi}_0. \quad (1.64)$$

V matematice vnímáme všechny proměnné abstraktně a neuvažujeme jejich fyzikální význam. V elektromagnetickém poli budou všechny výrazy obsahovat fyzikální jednotky a práce s nimi vyžaduje jistou opatrnost. Potenciální problémy můžeme pozorovat v případě diferenciální vzdálenosti a elementu objemu pro nový systém proměnných

$$d\ell^2 = d\ell_\xi^2 + d\ell_\chi^2 + d\ell_\psi^2, \quad (1.65)$$

$$dV = d\ell_\xi d\ell_\chi d\ell_\psi. \quad (1.66)$$

Diferenciální vzdálenost $d\ell$ má ve fyzice jednotku metr. Všechny diferenciály na pravé straně musí mít stejný rozměr. Pro objem pak potřebujeme mít metr krychlový. V dalším si problém přiblížíme a uvedeme možnost korekce. Obecný případ pro třírozměrnou geometrii řeší Laméovy koeficienty [3]. Ve čtyřdimenzionálním světě teorie relativity bychom použili metrické tenzory.

Cylindrický souřadnicový systém

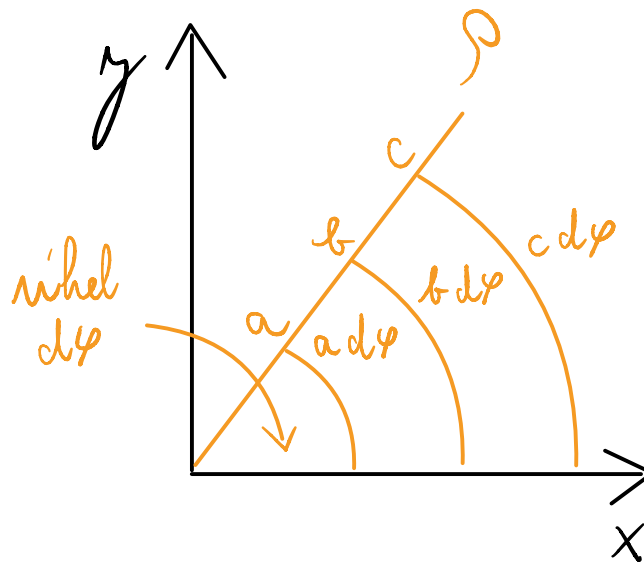
Systém popisující cylindrickou geometrii využijeme pro popis všech problémů s válcovou symetrií. Převod mezi kartézskými a válcovými souřadnicemi má tvar

$$x = \rho \cos \varphi, \quad (1.67)$$

$$y = \rho \sin \varphi, \quad (1.68)$$

$$z = z, \quad (1.69)$$

kde proměnné x, y, z a ρ mají jednotku metr a úhel φ uvažujeme v radiánech. Diferenciály proměnných z a ρ jsou triviální, neboť obě souřadnice fungují stejně jako kartézské. V případě úhlové souřadnice φ musíme být obezřetnější. Představme si situaci na obrázku 1.6.



Obrázek 1.6: Diferenciální element souřadnice φ . Na každém poloměru oblouku získáme diferenciální vzdálenost $\rho d\varphi$.

V infinitesimální blízkosti počátku můžeme zavést diferenciální element úhlu $d\varphi$. Ovšem s rostoucí vzdáleností od středu vidíme, že přestože je úhel stále stejný, velikost elementu roste. Jelikož se jedná o oblouk, zavedeme diferenciální element délky $d\ell_\varphi$ podobně jako u oblouku určujeme obvod. Diferenciály ve válcových souřadnicích jsou

$$d\ell_\rho = d\rho, \quad (1.70)$$

$$d\ell_\varphi = \rho d\varphi, \quad (1.71)$$

$$d\ell_z = dz, \quad (1.72)$$

kde jsme použili proměnnou ρ pro vyjádření vzdálenosti od počátku u úhlové proměnné. Celkový element diferenciální délky (1.65) má v tomto případě tvar

$$d\ell^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (1.73)$$

Při analýze vztahu (1.73) vidíme, že jednotky všech částí jsou v metrech. Objemový element (1.66) zavedeme analogicky

$$dV = d\ell_\rho d\ell_\varphi d\ell_z = \rho d\rho d\varphi dz. \quad (1.74)$$

Opět při kontrole jednotek vidíme, že vztah má správné jednotky.

Způsobem vyjádřeným v sekci výše vypočítáme transformační matici pro jednotkové vektory.

Začneme s vyhodnocením jednotlivých diferenciálů z transformačních vztahů souřadnic

$$dx = \frac{\partial \rho \cos \varphi}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \rho \cos \varphi}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \rho \cos \varphi}{\partial z} dz, \quad (1.75)$$

$$dy = \frac{\partial \rho \sin \varphi}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \rho \sin \varphi}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \rho \sin \varphi}{\partial z} dz, \quad (1.76)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial z}{\partial z} dz, \quad (1.77)$$

a po úpravě obdržíme

$$dx = \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi, \quad (1.78)$$

$$dy = \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi, \quad (1.79)$$

$$dz = dz. \quad (1.80)$$

U diferenciálu s φ nám v obou rovnicích zůstala proměnná ρ . Můžeme toho využít a celou soustavu zapsat maticově

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\rho \\ \rho d\varphi \\ dz \end{pmatrix} \quad (1.81)$$

Získali jsme transformační matici, kterou nyní konečně použijeme k získání vyjádření převodů mezi jednotkovými vektory

$$\mathbf{x}_0 = \cos \varphi \boldsymbol{\rho}_0 - \sin \varphi \boldsymbol{\varphi}_0, \quad (1.82)$$

$$\mathbf{y}_0 = \sin \varphi \boldsymbol{\rho}_0 + \cos \varphi \boldsymbol{\varphi}_0, \quad (1.83)$$

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0. \quad (1.84)$$

Na příkladu níže si ukážeme celý princip pro převod mezi dvě vektorovými systémy. Uvažujme vektorové pole

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{-y\mathbf{x}_0 + x\mathbf{y}_0}{x^2 + y^2}. \quad (1.85)$$

Nejdříve převedeme souřadnice do cylindrického systému

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{-\rho \sin \varphi \mathbf{x}_0 + \rho \cos \varphi \mathbf{y}_0}{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\rho} (-\sin \varphi \mathbf{x}_0 + \cos \varphi \mathbf{y}_0). \quad (1.86)$$

Nyní dosadíme ze vztahů (1.86) za jednotkové vektory a získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\rho} (-\sin \varphi (\cos \varphi \boldsymbol{\rho}_0 - \sin \varphi \boldsymbol{\varphi}_0) + \cos \varphi (\sin \varphi \boldsymbol{\rho}_0 + \cos \varphi \boldsymbol{\varphi}_0)) \\ &= \frac{1}{\rho} (-\sin \varphi \cos \varphi \boldsymbol{\rho}_0 + \sin^2 \varphi \boldsymbol{\varphi}_0 + \cos \varphi \sin \varphi \boldsymbol{\rho}_0 + \cos^2 \varphi \boldsymbol{\varphi}_0). \end{aligned} \quad (1.87)$$

Ve vztahu (1.87) se členy $\boldsymbol{\rho}_0$ navzájem odečtou a členy s $\boldsymbol{\varphi}_0$ se skrz goniometrickou identitu zjednoduší. Výsledné pole má tvar

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\varphi}_0. \quad (1.88)$$

Studované pole má válcovou symetrii vůči ose z . Proto je výsledný vztah takto jednoduchý. Uvažujme ještě případ, kdy zmíněná symetrie neexistuje. Ve směru x aplikujeme na pole translaci

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{-y\mathbf{x}_0 + (x-a)\mathbf{y}_0}{(x-a)^2 + y^2}. \quad (1.89)$$

Opět nejdříve vyjádříme pole ve válcových souřadnicích

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{-\rho \sin \varphi \mathbf{x}_0 + (\rho \cos \varphi - a)\mathbf{y}_0}{\rho^2 \cos^2 \varphi + 2a\rho \cos \varphi + a^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \frac{-\rho \sin \varphi \mathbf{x}_0 + (\rho \cos \varphi - a)\mathbf{y}_0}{\rho^2 + 2a\rho \cos \varphi + a^2}. \quad (1.90)$$

Pokračujeme s jednotkovými vektory

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \frac{-\rho \sin \varphi (\cos \varphi \boldsymbol{\rho}_0 - \sin \varphi \boldsymbol{\varphi}_0) + (\rho \cos \varphi - a) (\sin \varphi \boldsymbol{\rho}_0 + \cos \varphi \boldsymbol{\varphi}_0)}{\rho^2 + 2a\rho \cos \varphi + a^2} \\ &= \frac{-\rho \sin \varphi \cos \varphi \boldsymbol{\rho}_0 + \rho \sin^2 \varphi \boldsymbol{\varphi}_0 + \rho \cos \varphi \sin \varphi \boldsymbol{\rho}_0 + \rho \cos^2 \varphi \boldsymbol{\varphi}_0 - a \sin \varphi \boldsymbol{\rho}_0 - a \cos \varphi \boldsymbol{\varphi}_0}{\rho^2 + 2a\rho \cos \varphi + a^2} \\ &= \frac{\rho \boldsymbol{\varphi}_0 - a \sin \varphi \boldsymbol{\rho}_0 - a \cos \varphi \boldsymbol{\varphi}_0}{\rho^2 + 2a\rho \cos \varphi + a^2} \quad (1.91) \end{aligned}$$

Vidíme, že v tomto případě je vyjádření ve válcovém vektorovém systému mnohem komplikovanější.

Pro souřadnicové transformace můžeme odvodit i inverzní vztahy. Kartézské souřadnice získáme skrz algebraické operace s původními rovnicemi

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.92)$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}, \quad (1.93)$$

$$z = z. \quad (1.94)$$

Vyjádření pro jednotkové vektory můžeme opět odvodit pomocí diferenciálů

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \frac{x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (1.95)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = \frac{-y\mathbf{x}_0 + x\mathbf{y}_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (1.96)$$

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0. \quad (1.97)$$

Sférický souřadnicový systém

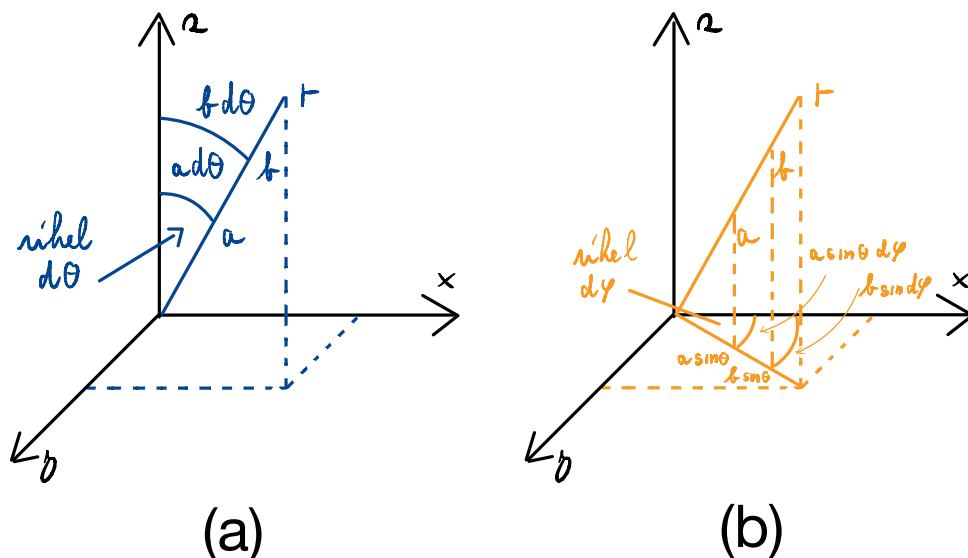
Problémy s kulovou symetrií popíšeme pomocí sférických souřadnic

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad (1.98)$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad (1.99)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (1.100)$$

Nové souřadnice mají rozměr metr pro r a radiány pro θ a φ . Graficky je odvození zachyceno na obrázku 1.7.



Obrázek 1.7: Obrázkové odvození diferenciálních elementů úhlů θ a φ .

Podobně jako v předchozím případě potřebujeme nalézt korekci pro vyjádření diferenciálů. Začneme s $d\ell_\theta$. Stejně jako v předchozím případě uvažujeme elementární oblouk s velikostí $r d\theta$. Situace je podobná pro azimutální proměnnou, ale zde musíme uvážit, že oblouk φ definujeme v rovině xy pomocí souřadnic x a y vztahem

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.101)$$

Proměnná ρ se vyskytovala u válcového systému a se sférickým je spojena pomocí relace

$$\rho = r \sin \theta, \quad (1.102)$$

kde jsme radiální vzdálenost projektovali do roviny xy . Pomocí této vzdálenosti můžeme definovat délku elementárního oblouku pro azimutální proměnnou. Všechny diferenciály opět zapíšeme

$$d\ell_r = dr, \quad (1.103)$$

$$d\ell_\theta = r d\theta, \quad (1.104)$$

$$d\ell_\varphi = r \sin \theta d\varphi. \quad (1.105)$$

Diferenciální vzdálenost je

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (1.106)$$

a element objemu je

$$dV = d\ell_r d\ell_\theta d\ell_\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (1.107)$$

V obou případech jsou fyzikální jednotky správné.

Pro odvození transformace mezi jednotkovými vektory opět vypočítáme diferenciály

$$dx = (\cos \varphi \sin \theta) dr + (\cos \varphi \cos \theta) r d\theta - (\sin \varphi) r \sin \theta d\varphi, \quad (1.108)$$

$$dy = (\sin \varphi \sin \theta) dr + (\sin \varphi \cos \theta) r d\theta + (\cos \varphi) r \sin \theta d\varphi, \quad (1.109)$$

$$dz = (\cos \theta) dr - (\sin \theta) r d\theta. \quad (1.110)$$

Stejně jako v případě převodů ve válcové soustavě, i zde máme diferenciály připravené jednotlivých sférických souřadnic sdružené s jejich korekcemi. Výsledný vztah pro transformaci jednotkových vektorů je

$$\mathbf{x}_0 = \cos \varphi \sin \theta \mathbf{r}_0 + \cos \varphi \cos \theta \boldsymbol{\theta}_0 - \sin \varphi \boldsymbol{\varphi}_0, \quad (1.111)$$

$$\mathbf{y}_0 = \sin \varphi \sin \theta \mathbf{r}_0 + \sin \varphi \cos \theta \boldsymbol{\theta}_0 + \cos \varphi \boldsymbol{\varphi}_0, \quad (1.112)$$

$$\mathbf{z}_0 = \cos \theta \mathbf{r}_0 - \sin \theta \boldsymbol{\theta}_0. \quad (1.113)$$

Opět si můžeme ukázat převody mezi vektorovými systémy na konkrétním případě. Uvažujme vektorové pole

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0 + z\mathbf{z}_0}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}. \quad (1.114)$$

Nejdříve dosadíme souřadnice

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{r \cos \varphi \sin \theta \mathbf{x}_0 + r \sin \varphi \sin \theta \mathbf{y}_0 + r \cos \theta \mathbf{z}_0}{\left(\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta}\right)^3}. \quad (1.115)$$

Zjednodušíme člen ve jmenovateli

$$r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) + r^2 \cos^2 \theta = r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2, \quad (1.116)$$

a dosadíme jej do původního pole

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} (\cos \varphi \sin \theta \mathbf{x}_0 + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{y}_0 + \cos \theta \mathbf{z}_0). \quad (1.117)$$

Pokračujeme s jednotkovými vektory v čitateli

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi \sin \theta \mathbf{x}_0 + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{y}_0 + \cos \theta \mathbf{z}_0 = & \\
 & \cos \varphi \sin \theta (\cos \varphi \sin \theta \mathbf{r}_0 + \cos \varphi \cos \theta \boldsymbol{\theta}_0 - \sin \varphi \boldsymbol{\varphi}_0) + \\
 & \sin \varphi \sin \theta (\sin \varphi \sin \theta \mathbf{r}_0 + \sin \varphi \cos \theta \boldsymbol{\theta}_0 + \cos \varphi \boldsymbol{\varphi}_0) + \\
 \cos \theta (\cos \theta \mathbf{r}_0 - \sin \theta \boldsymbol{\theta}_0) = & (\cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \mathbf{r}_0 + \\
 & (\cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta) \boldsymbol{\theta}_0 + \\
 & (-\sin \varphi \cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta) \boldsymbol{\varphi}_0 = 1 \cdot \mathbf{r}_0 + 0 \cdot \boldsymbol{\theta}_0 + 0 \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 = \mathbf{r}_0, \quad (1.118)
 \end{aligned}$$

kde jsme po poměrně dlouhém výpočtu získali jednoduché vyjádření původního vektoru. Tento výsledek jsme mohli okamžitě použít i z definice polohového vektoru (1.35). Odvození vztahu (1.118) není komplikované, ale je časově náročné a citlivé na chyby. Učit se vzorečky z paměti je také kontraproduktivní. Proto budeme v rámci práce s elektromagnetickým polem vycházet z matematických identit, které všechny často používané vztahy obsahují. Zapišme s nabytými znalostmi finální tvar pole (1.114) ve sférickém vektorovém systému

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \mathbf{r}_0. \quad (1.119)$$

Výsledek by se opět zkomplikoval, pokud by některá ze souřadnic byla posunutá v prostoru.

Zpětnou transformaci získáme stejným způsobem. Počínaje souřadnicemi

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1.120)$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad (1.121)$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}. \quad (1.122)$$

Jednotkové vektory se transformují pomocí vztahů

$$\mathbf{r}_0 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{x}_0 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{y}_0 + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{z}_0 \quad (1.123)$$

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \frac{zx}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{x}_0 + \frac{zy}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{y}_0 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{z}_0 \quad (1.124)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{x}_0 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{y}_0. \quad (1.125)$$

Podívejme se ještě na jeden příklad, na kterém si vyzkoušíme práci s jednotkovými vektory (1.111). Mezi kartézskými a sférickým vektory platí následující identita

$$\mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}_0 = \sin \theta \boldsymbol{\varphi}_0. \quad (1.126)$$

Pro její odvození musíme nejdříve vzít do úvahy, že vektorový součin je nutné vždy vyhodnocovat vůči stejnému vektorovému systému. Můžeme postupovat dvěma způsoby.

1. Začneme s převedením levé strany do kartézského tvaru

$$\mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}_0 = \mathbf{z}_0 \times \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{x}_0 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{y}_0 + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{z}_0 \right). \quad (1.127)$$

Pokračujeme s pravidly vektorového součinu (1.6). Získáme tvar

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{y}_0 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{x}_0 = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{y}_0 - \sin \theta \sin \varphi \mathbf{x}_0, \quad (1.128)$$

kde jsme se na konci vrátili do sférického systému. Vytkneme $\sin \theta$ a použijeme identitu (1.125) pro odvození finálního výsledku

$$\sin \theta (-\sin \varphi \mathbf{x}_0 + \cos \varphi \mathbf{y}_0) = \sin \theta \boldsymbol{\varphi}_0 = \mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}_0. \quad (1.129)$$

2. Můžeme alternativně začít převedením pravé strany pomocí identity (1.113) do sférického systému

$$(\cos \theta \mathbf{r}_0 - \sin \theta \boldsymbol{\theta}_0) \times \mathbf{r}_0 = -\sin \theta (\boldsymbol{\theta}_0 \times \mathbf{r}_0) = \sin \theta \boldsymbol{\varphi}_0, \quad (1.130)$$

kde jsme opět použili vlastnosti vektorového součinu (1.6).

Transformace do jiných vektorových systému mají další důsledky. Podrobně se s nimi seznámíme v další sekci.

1.3 Diferenciální operátory

Derivace určuje míru změny funkce $f(x)$ v závislosti na změnách proměnné x . V elektromagnetickém poli má studium změn v závislosti na prostorových nebo časových proměnných zásadní význam. Zejména pak diferenciální operátory které jsou z derivací odvozené.

V analýze jedné proměnné definujeme derivaci pomocí limitního vztahu

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1.131)$$

V elektromagnetickém poli budeme často potkávat veličiny, které jsou závislé na více proměnných. Ve značení přejdeme od původního zápisu použitého v (1.131) k následujícímu

$$\frac{d}{dx} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}, \quad (1.132)$$

kde derivaci se symbolem ∂ nazýváme parciální. Tato změna není jen kosmetická. Rozdíl mezi oběma značeními si představíme níže v textu. Všechny diferenciální operátory odvodíme pouze pro kartézský vektorový systém. Pro cylindrický a sférický uvedeme pouze jejich znění.

1.3.1 Gradient

Zaměřme se na libovolnou spojitou funkci $f(\mathbf{r})$ vyjádřenou v kartézských souřadnicích. Uvažujme, že se ve všech souřadnicích posuneme o malý inkrement Δ a sledujeme, jak se změnila funkční hodnota

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z). \quad (1.133)$$

Pokud je hodnota Δ velmi malá, můžeme rozdíl ve funkčních hodnotách vyjádřit skrz diferenciál

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z. \quad (1.134)$$

Zde ovšem můžeme použít i alternativní vyjádření pomocí skalárního součinu mezi dvěma vektory

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{y}_0 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{z}_0 \right) \cdot (\Delta x \mathbf{x}_0 + \Delta y \mathbf{y}_0 + \Delta z \mathbf{z}_0) = \nabla f \cdot \mathbf{s}. \quad (1.135)$$

První člen na pravé straně se nazývá **gradient** [1] funkce f . Druhý člen $\mathbf{s}$ pak určuje směr, ve kterém se při vyšetřování derivace pohybujeme.

Stejného výsledku bychom dosáhli zavedením směrové derivace

$$\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{s}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r} + h\mathbf{s}) - f(\mathbf{r})}{h \|\mathbf{s}\|} = \nabla f \cdot \mathbf{s}. \quad (1.136)$$

Zde bychom pro odvození použili Taylorův rozvoj a soustředili se pouze na členy prvního řádu.

Z předpisu (1.135) můžeme pomocí vlastností skalárního součinu odvodit některé vlastnosti gradientu. Pokud vektor $\mathbf{s}$ míří ve stejném směru jako gradient, pak je hodnota směrové derivace maximální. Můžeme tedy říct, že gradient je vektor rovnoběžný se směrem největšího růstu funkce. Uvažujme libovolný bod $\mathbf{r}_n$, v němž spočteme gradient funkce f . Posuneme se o kousek ve směru gradientu do bodu $\mathbf{r}_{n+1}$ a znovu spočteme gradient. Po několika iteracích nalezneme

lokální maximum. Zmíněný princip tvoří základ mnoha optimalizačních algoritmů. Analogicky bychom našli lokální minimum funkce, pokud bychom šli proti směru gradientu.

Uvažujme na chvíli následující funkční předpis

$$f(\mathbf{r}) = \text{const.}, \quad (1.137)$$

kde zmíněným předpisem definujeme izoplochu S . Příkladem může být

$$f(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad (1.138)$$

kde se jedná o kouli s poloměrem a . Při diferencování vztahu (1.137) obdržíme

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \nabla f \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (1.139)$$

Výsledek říká, že gradient funkce f je kolmý na libovolný vektor definovaný na ploše S . V případě izoploch můžeme gradient použít k definici normálového vektoru v libovolném bodě

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}, \quad (1.140)$$

kde jsme normováním obdrželi normálový vektor s jednotkovou velikostí. Výpočet si můžeme ověřit na příkladu izoplochy koule spočtením gradientu

$$\nabla f = 2x\mathbf{x}_0 + 2y\mathbf{y}_0 + 2z\mathbf{z}_0, \quad (1.141)$$

a následným dosazením do vztahu (1.140) a úpravou

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{x}_0 + 2y\mathbf{y}_0 + 2z\mathbf{z}_0}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0 + z\mathbf{z}_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \mathbf{r}_0. \quad (1.142)$$

Obdržený výsledek jsme očekávali.

Vztah pro gradient jsme odvodili pouze pro kartézský vektorový systém. Pro cylindrický a sférický je podoba operátoru odlišná a je nutné ji při výpočtech reflektovat. Jednotlivé tvary jsou uvedeny níže

- kartézská soustava

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{y}_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{z}_0, \quad (1.143)$$

- válcová soustava

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{\varphi}_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{z}_0, \quad (1.144)$$

- sférická soustava

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{r}_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{\theta}_0 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{\varphi}_0. \quad (1.145)$$

Nezávisle na výběru souřadné soustavy, výsledek operace bude vždy stejný. Zvolíme si následující jednoduchou funkci

$$f(\mathbf{r}) = x, \quad (1.146)$$

pro niž gradient v kartézských souřadnicích vychází

$$\nabla f = \mathbf{x}_0. \quad (1.147)$$

Pokud bychom použili sférický systém, má funkce podobu

$$f(\mathbf{r}) = r \sin \theta \cos \varphi \quad (1.148)$$

a gradient vypočtený podle vztahu (1.145) je

$$\begin{aligned} \nabla f = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{r}_0 + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi \boldsymbol{\theta}_0 - \frac{1}{r \sin \theta} r \sin \theta \sin \varphi \boldsymbol{\varphi}_0 = \\ \sin \theta \cos \varphi \mathbf{r}_0 + \cos \theta \cos \varphi \boldsymbol{\theta}_0 - \sin \varphi \boldsymbol{\varphi}_0. \end{aligned} \quad (1.149)$$

Když dosadíme transformační vztahy pro jednotkové vektory (1.111), obdržíme zcela totožný výsledek jako v případě kartézského systému.

1.3.2 Divergence

Při studiu chování vektorových polí potřebujeme určit, ve kterých bodech pole vzniká, zaniká nebo zdali pole prostorem pouze prochází. K vyšetření těchto vlastností slouží operátor **divergence**. Připomeňme, že vektorové pole má nezávislé složky do jednotlivých směrů

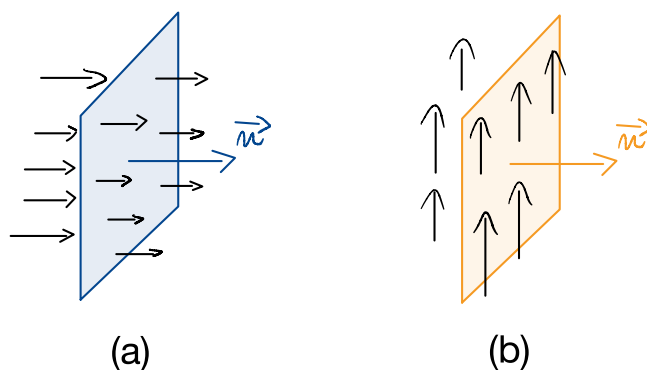
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_x(\mathbf{r}) \mathbf{x}_0 + F_y(\mathbf{r}) \mathbf{y}_0 + F_z(\mathbf{r}) \mathbf{z}_0. \quad (1.150)$$

Následující úvahy provedeme pouze pro kartézský systém. Pro obecný případ odkazujeme na knížku [3].

Pro definici divergence si pomůžeme zavedením diferenciálního toku $d\Phi$ skrz plochu

$$d\Phi = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.151)$$

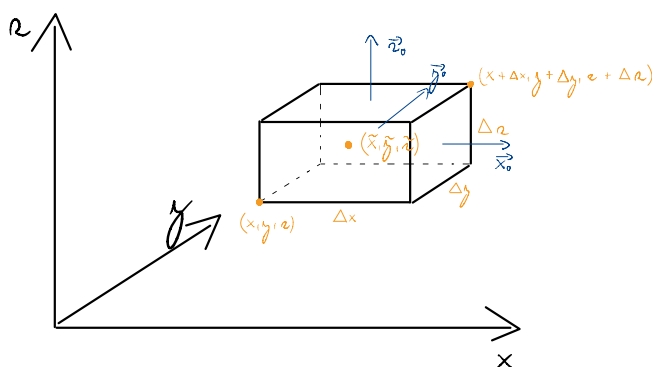
kde $d\mathbf{S}$ značí diferenciální element plochy s normálou $\mathbf{n}$, skrz kterou tok vyšetřujeme. Použijeme vlastnosti skalárního součinu (1.3), který se ve vztahu (1.151) vyskytuje mezi vektorovým polem a normálovým vektorem. Pokud bude mít element plochy stejný směr jako vektorové pole $\mathbf{F}$, bude průtok plochou maximální. Naopak pokud bude element plochy na směr vektorového pole kolmý, pak bude tok plochou nulový. Vše graficky zachycuje obrázek 1.8.



Obrázek 1.8: Tok vektorového pole plochou. (a) Pole rovnoběžné s normálovým vektorem a maximálním tokem plochou. (b) Pole kolmé s normálovým vektorem a minimálním tokem plochou.

Představme si nyní malou krychličku, viz obrázek 1.9, v prostoru o stranách Δx , Δy a Δz a objemu

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (1.152)$$



Obrázek 1.9: Pomocný obrázek k odvození divergence.

Uvnitř v krychličce se nachází bod $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Plocha útvaru se skládá ze šesti povrchů a výsledný tok tímto elementárním objemem se tedy musí skládat ze šesti toků jednotlivými povrchy

$$\Delta\Phi = \sum_n \Delta\Phi_n. \quad (1.153)$$

Následující krok bude analogický pro všech šest stran. Je ovšem důležité pochopit úvahu, která k němu vede. Uvažujme povrch, který je rovnoběžný s rovinou yz a je umístěn v $\tilde{x} = x + \Delta x$. Tato plocha má normálový vektor rovnoběžný s vektorem $\mathbf{x}_0$ a má plochu $\Delta S = \Delta y \Delta z$. Celkový element této plochy tedy je

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{x}_0 \Delta y \Delta z. \quad (1.154)$$

Pro výpočet toku touto plochou musíme vyhodnotit výraz

$$\Delta \Phi_1 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_0 \Delta y \Delta z. \quad (1.155)$$

Výsledek skalárního součinu mezi vektorovým polem $\mathbf{F}$ a směrového vektoru $\mathbf{x}_0$ je složka F_x , do které ještě dosadíme za funkční hodnoty body na studovaném povrchu

$$\Delta \Phi_1 = F_x(x + \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z}) \Delta y \Delta z. \quad (1.156)$$

Získali jsme tok prvním povrchem. Analogicky postupujeme u protější strany krychle, která se nachází v $\tilde{x} = x$. Zde ovšem musíme chvíli uvažovat nad směrem normálového vektoru. Bez dalšího kontextu není důvod preferovat jednu či druhou možnost. Avšak jelikož nás zajímá tok plochou elementární krychličky, zvolíme normálový vektor ve směru vnější normály celkové vymezené plochy. V tomto případě bude $\mathbf{n} = -\mathbf{x}_0$. Výsledek tohoto výpočtu můžeme shrnout jako

$$\Delta \Phi_2 = -F_x(x, \tilde{y}, \tilde{z}) \Delta y \Delta z. \quad (1.157)$$

Opět jsme vzali plochu uvažovaného povrchu, dosadili jednotlivé body a směr vnější normály zohlednili znaménkem mínus. Soustředíme se nyní na povrch rovnoběžný s rovinou xz , který se nachází v $\tilde{y} = y + \Delta y$, a jehož vnější normála má směr $\mathbf{y}_0$. V tomto případě bude tok uvažovaným povrchem roven

$$\Delta \Phi_3 = F_y(\tilde{x}, y + \Delta y, \tilde{z}) \Delta x \Delta z. \quad (1.158)$$

Při porovnání tohoto výsledku s hodnotou (1.156), si lze povšimnout, že jsme pouze cyklicky posunuli význam jednotlivých proměnných. Poslední tři povrchy bychom vyřešili analogicky a sečtením získáme celkový tok uvažovanou plochou vymezenou elementem objemu

$$\begin{aligned} \Delta \Phi = & F_x(x + \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z}) \Delta y \Delta z - F_x(x, \tilde{y}, \tilde{z}) \Delta y \Delta z + \\ & F_y(\tilde{x}, y + \Delta y, \tilde{z}) \Delta x \Delta z - F_y(\tilde{x}, y, \tilde{z}) \Delta x \Delta z + \\ & F_z(\tilde{x}, \tilde{y}, z + \Delta z) \Delta x \Delta y - F_z(\tilde{x}, \tilde{y}, z) \Delta x \Delta y. \end{aligned} \quad (1.159)$$

Vztah (1.159) upravíme postupným vytknutím jednotlivých elementů

$$\begin{aligned} \Delta \Phi = & \left(\frac{F_x(x + \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z}) - F_x(x, \tilde{y}, \tilde{z})}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z + \\ & \left(\frac{F_y(\tilde{x}, y + \Delta y, \tilde{z}) - F_y(\tilde{x}, y, \tilde{z})}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z + \\ & \left(\frac{F_z(\tilde{x}, \tilde{y}, z + \Delta z) - F_z(\tilde{x}, \tilde{y}, z)}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned} \quad (1.160)$$

$$(1.161)$$

Jednotlivé členy v závorkách nápadně připomínají derivace. Provedeme limitní přechod, kdy objem ΔV budeme zmenšovat k nule, a získáme tak upravenou verzi pro diferenciální tok orientovanou plochou $d\mathbf{S}$ vymezenou objemem dV

$$d\Phi = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz} \right) dV = \nabla \cdot \mathbf{F} dV. \quad (1.162)$$

Operátor v závorce se nazývá **divergence** a můžeme pomocí něj vyšetřovat zdroje pole. Rozlišujeme tři případy

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \begin{cases} > 0, & \text{pole v bodě vyvěrá,} \\ < 0, & \text{pole v bodě zaniká,} \\ = 0, & \text{pole bodem pouze prochází.} \end{cases} \quad (1.163)$$

Opět zdůrazňujeme, že jsme odvodili tvar divergence pouze pro vektorová pole s kartézskými souřadnicemi v kartézském vektorovém systému. Uvedme nyní všechny systémy souřadnic přehledně v následujícím odstavci

- kartézská soustava

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad (1.164)$$

- válcová soustava

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad (1.165)$$

- sférická soustava

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (1.166)$$

Poměrně netriviální tvar ve válcové a sférické soustavě může působit odstrašujícím způsobem, avšak jedná se o vzorce, které jsou vždy tabelovány a není potřeba si je přímo pamatovat. Nehledě na zvolený souřadnicový systém je výsledek divergence vždy stejný.

Zvolme si jako příklad jednoduché vektorové pole

$$\mathbf{F} = x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0 + z\mathbf{z}_0. \quad (1.167)$$

Výsledek operace divergence je vzhledem ke zvolenému tvaru triviální

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3. \quad (1.168)$$

Nyní vyjádříme vektorové pole ve sférickém souřadném systému. Použijeme převodní vztahy mezi systémy 1.2.3. Přímé dosazení by ovšem vedlo na zdlouhavý výpočet. Použijeme následující trik

$$\mathbf{F} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \left(\frac{x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0 + z\mathbf{z}_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right). \quad (1.169)$$

Všechny části můžeme nyní triviálně dosadit ze vztahů (1.120) a (1.123) a obdržíme výsledek

$$\mathbf{F} = r\mathbf{r}_0. \quad (1.170)$$

Na převedený tvar použijeme divergenci (1.166) a zjednodušíme

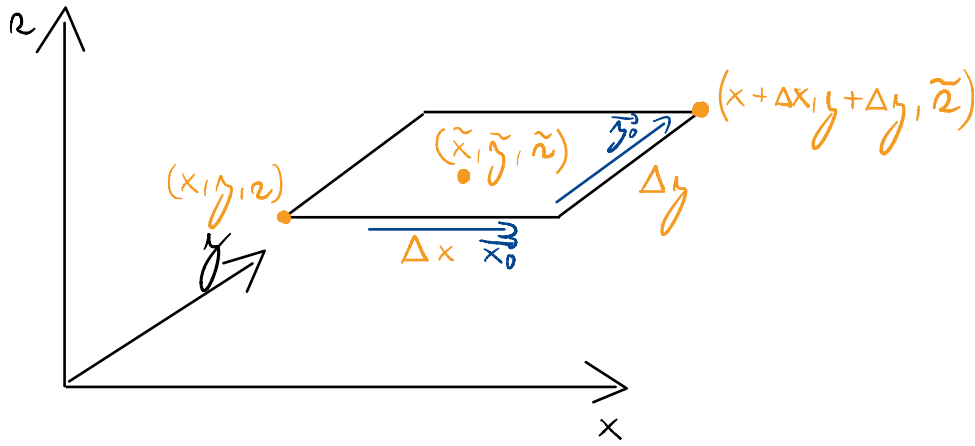
$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^3}{\partial r} = \frac{1}{r^2} 3r^2 = 3. \quad (1.171)$$

Oba výsledky jsou stejné.

1.3.3 Rotace

Další vlastnost, která nás u vektorového pole zajímá, je zjištění, zdali je pole vírové. K vyšetření tohoto atributu používáme operátor **rotace**.

Uvažujme elementární obdélníkovou křivku s hranami Δx a Δy vymežující plochu $\Delta x \Delta y$, jak ji vidíme na obrázku 1.10.



Obrázek 1.10: Pomocný obrázek k odvození rotace.

Zajímá nás, jak pole $\mathbf{F}$ okolo této křivky proudí

$$d\Psi = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{\ell} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} d\ell, \quad (1.172)$$

kde $d\Psi$ je diferenciální element cirkulace a $d\mathbf{\ell}$ je element křivky s tečným vektorem $\boldsymbol{\tau}$. Opět se zamyslíme nad vlastnostmi skalárního součinu (1.3). Vidíme, že pokud je vektorové pole rovnoběžné s tečným vektorem, má vztah (1.172) největší hodnotu. Naopak, pokud je vektorové pole na křivku kolmé, pak kolem křivky neproudí.

Použijeme stejnou úvahu jako při odvození divergence (1.153) a křivku z obrázku 1.10 rozdělíme na čtyři malé úseky a cirkulace sečteme

$$\Delta\Psi = \sum_{n=1}^4 \Delta\Psi_n, \quad (1.173)$$

Křivka leží v rovině xy . Počínáme první hranou, element proudění zkoumáme okolo křivky s tečným vektorem $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{x}_0$ a všechny body na křivce mají stejnou souřadnici y . Získáme tak výraz

$$\Delta\Psi_1 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_0 \Delta x = F_x(\tilde{x}, y, \tilde{z}) \Delta x, \quad (1.174)$$

kde jsme opět do složky F_x dosadili jednotlivé proměnné. Pokračujeme s druhým úsekem křivky, kde je tečný vektor $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{y}_0$ a celá křivka sdílí souřadnici $\tilde{x} = x + \Delta x$. Druhý příspěvek pak je

$$\Delta\Psi_2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{y}_0 \Delta y = F_y(x + \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z}) \Delta y. \quad (1.175)$$

Podobně bychom pokračovali se dvěma zbývajících složkami. Stejně jako v případě divergence, i zde musíme pamatovat na změnu směru tečného vektoru $\boldsymbol{\tau}$, abychom zajistili správný směr při průběhu okolo křivky. Všechny čtyři příspěvky vedou na výraz

$$\Delta\Psi = F_x(\tilde{x}, y, \tilde{z}) \Delta x + F_y(x + \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z}) \Delta y - F_x(\tilde{x}, y + \Delta y, \tilde{z}) \Delta x - F_y(x, \tilde{y}, \tilde{z}) \Delta y. \quad (1.176)$$

Provedeme stejný trik jako ve vztahu (1.161) a výsledek přeskládáme do následující podoby

$$\Delta\Psi = \left(\frac{F_y(x + \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z}) - F_y(x, \tilde{y}, \tilde{z})}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta y - \left(\frac{F_x(\tilde{x}, y + \Delta y, \tilde{z}) - F_x(\tilde{x}, y, \tilde{z})}{\Delta y} \right) \Delta x \Delta y. \quad (1.177)$$

Ve vztahu (1.177) necháme jít plochu $\Delta S = \Delta x \Delta y$ limitně k nule, čímž opět získáme diferenciální tvar

$$d\Psi = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (1.178)$$

Vrátíme-li se k počáteční úvaze s křivkou a prouděním kolem ní, povšimneme si, že jsme jejím výběrem zcela ignorovali osu z . Pro výpočet cirkulace okolo křivky to není problém. Ovšem my chceme vyšetřit, zdali vektorové pole neobsahuje víry. Mohli jsme také zvolit křivku v rovině xz

nebo v rovině yz . Aby byl test na víry v poli úplný, musíme zbylé dvě složky ve výpočtu zohlednit také. Získáme tak postupně tři komponenty

$$d\Psi_z = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy, \quad d\Psi_y = \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) dx dz, \quad d\Psi_x = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) dy dz. \quad (1.179)$$

Všechny tři složky dohromady tvoří vektor, který je výsledkem aplikace rotace na vektorové pole

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{x}_0 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{y}_0 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{z}_0. \quad (1.180)$$

Vztah pro diferenciální cirkulaci vektorového pole má nyní tvar

$$d\Psi = \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.181)$$

kde $d\mathbf{S}$ je vektorový element křivky, okolo které cirkulaci vyšetřujeme. Operátorem rotace zjistíme, zdali pole v daném bodě obsahuje víry následujícím testem

$$\nabla \times \mathbf{F} \begin{cases} = \mathbf{0}, & \text{pole je nevírové,} \\ \neq \mathbf{0}, & \text{pole je vírové.} \end{cases} \quad (1.182)$$

Uvedme nyní pro úplnost tvar rotace ve všech základních vektorových systémech, které budeme používat

- kartézská soustava

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{x}_0 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{y}_0 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{z}_0, \quad (1.183)$$

- válcová soustava

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right) \boldsymbol{\rho}_0 + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \boldsymbol{\varphi}_0 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} \right) \mathbf{z}_0, \quad (1.184)$$

- sférická soustava

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta F_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{r}_0 + \\ & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r F_\varphi)}{\partial r} \right) \boldsymbol{\theta}_0 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \boldsymbol{\varphi}_0. \end{aligned} \quad (1.185)$$

Opět upozorňujeme, že pamatovat si je dobré pouze první tvar pro kartézský vektorový systém. Ostatní vzorce je vždy možné vyčíst z matematických identit.

Rotaci vektorového pole můžeme spočítat v libovolném systému souřadnic. Uvažujme pole

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -y\mathbf{x}_0 + x\mathbf{y}_0 + 0\mathbf{z}_0. \quad (1.186)$$

Dosadíme složky do vzorce (1.183) a získáme

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) \mathbf{x}_0 + \left(\frac{\partial(-y)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x} \right) \mathbf{y}_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) \mathbf{z}_0 = 0\mathbf{x}_0 + 0\mathbf{y}_0 + 2\mathbf{z}_0. \quad (1.187)$$

Z výsledku můžeme určit, že pole rotuje okolo osy z . Převédeme nyní pole do cylindrického systému. Nejdříve opět dosadíme za jednotlivé souřadnice

$$\mathbf{F} = -\rho \sin \varphi \mathbf{x}_0 + \rho \cos \varphi \mathbf{y}_0 + 0\mathbf{z}_0, \quad (1.188)$$

a nyní dosadíme jednotkové vektory z cylindrického vektorového systému

$$\mathbf{F} = -\rho \sin \varphi (\cos \varphi \boldsymbol{\rho}_0 - \sin \varphi \boldsymbol{\varphi}_0) + \rho \cos \varphi (\sin \varphi \boldsymbol{\rho}_0 + \cos \varphi \boldsymbol{\varphi}_0) + 0\mathbf{z}_0. \quad (1.189)$$

Po úpravě nalezneme výsledný tvar pole v cylindrickém systému.

$$\mathbf{F} = 0\boldsymbol{\rho}_0 + \rho\boldsymbol{\varphi}_0 + 0\mathbf{z}_0. \quad (1.190)$$

Použijeme vzorec (1.184) a získáme výsledek

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial 0}{\partial \varphi} - \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \boldsymbol{\rho}_0 + \left(\frac{\partial 0}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial \rho} \right) \boldsymbol{\varphi}_0 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho \cdot \rho)}{\partial \rho} - \frac{\partial 0}{\partial \varphi} \right) \mathbf{z}_0 = 0\boldsymbol{\varphi}_0 + 0\boldsymbol{\varphi}_0 + 2\mathbf{z}_0. \quad (1.191)$$

Formálně jsme na první pohled získali stejný výsledek, je ovšem potřeba nezapomenout, že oba výsledky jsou v jiném vektorovém systému. Vzhledem k tomu, že vektor $\mathbf{z}_0$ je pro kartézský i cylindrický systém totožný, získali jsme stejný výsledek. Obecně bychom však museli ještě oba systémy pro stejný výsledek sjednotit do jednoho z nich.

1.3.4 Laplaceův operátor

Dosud jsme se zabývali operátory obsahujícím pouze první derivace. Laplaceův operátor se vyskytuje napříč fyzikou v různých podobách

- Laplaceova rovnice

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.192)$$

- Poissonova rovnice

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}), \quad (1.193)$$

- Helmholtzova rovnice

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) + k^2 f(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.194)$$

- difúzní rovnice

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) = D \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.195)$$

- vlnová rovnice

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial^2 f(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (1.196)$$

Budeme-li uvažovat skalární funkci $f(\mathbf{r})$, pak Laplaceův operátor můžeme definovat následujícím způsobem

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f. \quad (1.197)$$

Pro naše tři používané souřadnicové systémy má tento operátor následující předpis

- kartézská soustava

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (1.198)$$

- válcová soustava

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (1.199)$$

- sférická soustava

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \quad (1.200)$$

Z předpisů operátorů vidíme, že řešení libovolné z výše uvedených rovnic není v obecném případě triviální. My se ovšem často potkáme s případy, kdy funkce $f(\mathbf{r})$ bude záviset pouze na jedné z proměnných. Uvažujme následující příklad

$$\nabla^2 f(x) = 0, \quad (1.201)$$

kdy řešíme Laplaceovu rovnici v kartézském tvaru pro funkci f , která závisí pouze na proměnné x . Použijeme předpis (1.198) a rovnici adekvátně zjednodušíme

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0. \quad (1.202)$$

Parciální derivace jsme nahradili za úplné derivace, neboť zde nehrozí záměna. Člen ve jmenovateli na levé straně (1.202) může zkrátit o nulu a obě strany zintegrujeme podle x

$$\int \frac{d^2 f}{dx^2} dx = \int 0 dx. \quad (1.203)$$

Na levé straně jsme integrací vyrušili jednu derivaci a získali jsme diferenciální rovnici prvního řádu

$$\frac{df}{dx} = C_1, \quad (1.204)$$

kde C_1 je integrační konstanta. Zopakujeme stejnou úpravu jako v předešlém kroku a zintegrujeme

$$\int \frac{df}{dx} dx = \int C_1 dx. \quad (1.205)$$

Výsledkem je

$$f(x) = C_1 x + C_2. \quad (1.206)$$

Obě integrační konstanty bychom určili ze zadaných hraničních podmínek.

Gradient, divergence a rotace jsou diferenciální operátory, které vždy operují jen nad skalární funkcí, nebo vektorovým polem. V případě Laplaceova operátoru existuje verze pro skalární pole (1.197), ale i pro vektorová pole, která je definovaná jako

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}. \quad (1.207)$$

Tento výraz nebudeme rozebírat více do hloubky. Ovšem kromě případu vektorového pole v kartézském systému vede Laplaceův operátor na velmi komplikované vzorce.

1.3.5 Diferenciální identity

V předchozí kapitole jsme otevřeli téma kombinování diferenciálních operátorů. Kromě výše uvedených kombinací můžeme zavést i další velmi užitečné výsledky, které budeme nazývat jako diferenciální identity. Bez ohledu na zvolený vektorový systém, identity mezi diferenciálními operátory platí univerzálně. V následujícím si představíme nejdůležitější z nich.

Gradient funkce vede na vektorové pole, divergence vektorového pole na funkci a rotace vektorového pole je opět vektorové pole. Kombinovat můžeme jen kompatibilní operátory. Již výše jsme uvedli, že divergence gradientu vede na Laplaceův operátor. Pro kartézskou soustavu tento výsledek obdržíme triviálně

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{y}_0 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{z}_0 \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (1.208)$$

Pro jednoduchost budeme i dále používat výhradně kartézskou soustavu pro odvození.

Pokračujeme aplikací rotace na gradient funkce

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla f &= \nabla \times \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{y}_0 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{z}_0 \right) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathbf{x}_0 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \mathbf{y}_0 + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \mathbf{z}_0. \end{aligned} \quad (1.209)$$

Jelikož jsou derivace vzájemně zaměnitelné, okamžitě vidíme, že rotace gradientu je nulový vektor

$$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}. \quad (1.210)$$

S tímto výsledkem se setkáme v elektrostátice, kterou je možné celou popsat pomocí jedné skalární funkce.

Pokračujme dalšími kombinacemi s rotací. Spočteme divergenci následujícího pole

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} &= \nabla \cdot \left(\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{x}_0 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{y}_0 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{z}_0 \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.211)$$

Znovu využijeme možnost zaměnit pořadí derivací a získáme výsledek

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0. \quad (1.212)$$

Obdrželi jsme další důležitou diferenciální identitu.

Rotaci aplikujeme na vektorové pole a jelikož je výsledkem další vektorové pole, nic nebrání tomu, abychom rotaci použili vícekrát. Následující výsledek je možné odvodit, avšak odvození je poměrně zdlouhavé. Napíšeme proto již jen identitu samotnou

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}. \quad (1.213)$$

Vztah jsme již výše použili k definici Laplaceova operátoru pro vektorová pole. V elektromagnetismu se tato identita hodí zejména při odvozování vlnových rovnic.

Zatím jsme kombinovali jen různé diferenciální operátory. Často ovšem narazíme na případy, kdy nás zajímá výsledek aplikace operátoru na součin skalární funkce a vektorového pole. Uvedeme pouze výsledky

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad (1.214)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = \mathbf{F} \times \nabla f + f \nabla \times \mathbf{F}. \quad (1.215)$$

Poslední užitečná identita, která nás v průběhu studia pole potká, je aplikace divergence na vektorový součin

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \quad (1.216)$$

Tři předchozí identity lze triviálně odvodit pomocí Levi-Civitova tenzoru [3]. Avšak jedná se o znalost nad rámec běžných matematických kurzů a zde ji nebudeme blíže uvádět.

1.4 Integrální počet

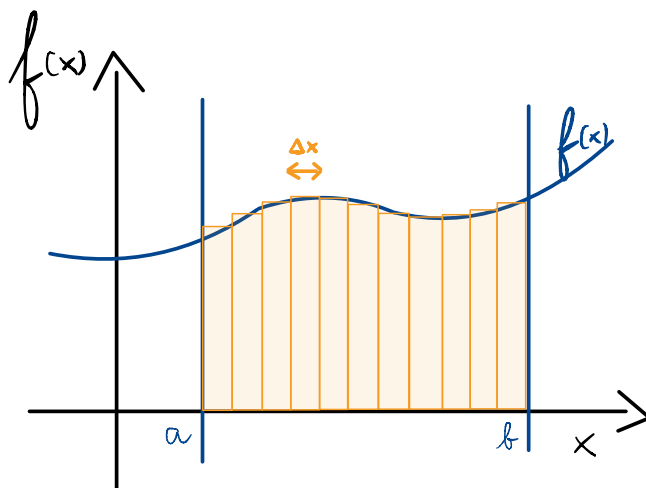
Pro elektromagnetické pole mají integrály široký význam, od výpočtu polí, po definici různých veličin (např. proud a napětí), až po samotný zápis zákonů elektromagnetismu. Ve výpočtech pole nás ve většině případů potkají funkce, které lze jednoduše zintegrovat. Budeme ovšem používat mnoho různých zápisů, každý s mírně odlišnou interpretací. V následujících sekcích si je všechny projdeme.

1.4.1 Jednoduché integrály

Určitý integrál z funkce $f(x)$ závislé na proměnné x integrované v intervalu $x \in [x_1, x_2]$ má tvar

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx = \left[F(x) \right]_{x_1}^{x_2}, \quad (1.217)$$

kde $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$. Interpretace vztahu (1.217) je zobrazena na obrázku 1.11.



Obrázek 1.11: Princip Riemannova integrálu. Od sumy konečných obdélníků přejdeme limitním přechodem k integraci.

Sečtením obdélníků o stranách Δx a $f(x_n)$, kde $\Delta x \rightarrow 0$, získáme obsah oblasti ohraničený funkcí $f(x)$. Podobně postupuje pro funkci dvou proměnných integrovanou na ploše

$$I = \iint_S f(x, y) \, dS = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) \, dx \, dy. \quad (1.218)$$

V tomto případě získáme objem, který je ohraničený zadanými intervaly a plochou tvořenou podstavou a funkcí $f(x, y)$. Finálně nás budou zajímat integrály přes objem

$$I = \iiint_V f(x, y, z) \, dV = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \quad (1.219)$$

Zde již neexistuje jednoduchá geometrická interpretace. Můžeme si ovšem pomoci fyzikálním významem. Základní vzorec pro určení hustoty materiálu je založen na podílu mezi hmotností m a objemem V , tedy

$$\varrho = \frac{m}{V}. \quad (1.220)$$

Z výrazu (1.220) vyplývá, že můžeme hmotnost tělesa získat znalostí hustoty jeho materiálu a jeho objemu. Pokud ovšem není hustota homogenní, ale existuje v ní variace napříč materiálem, použijeme výraz

$$m = \int_V \varrho(\mathbf{r}) \, dV, \quad (1.221)$$

ze kterého integrací získáme hmotnost objektu.

Ve vztahu (1.221) jsme použili notaci, kterou budeme používat napříč textem. Pro zjednodušení nebudeme psát pro každou proměnnou zvlášť integrál, ale dimenzi agregujeme do diferenciálu $d\xi$, kde ξ značí libovolný útvar (křivka ℓ , plocha S , objem V) v třídimenzionálním prostoru.

Všechny integrály se při rozepsání zjednoduší na hledání primitivní funkce ve vztahu (1.217). V teorii elektromagnetického pole potřebujeme umět zintegrovat zejména základní mocninné funkce, goniometrické funkce a racionální funkce s odmocninami. Složitější integrace jsou uvedeny v souboru s matematickými identitami.

1.4.2 Konvoluční integrály

Již jsme uvedli, že při integraci funkce $f(\mathbf{r})$ přes objem V získáme skalár I , matematicky zapsáno jako

$$I = \int_V f(\mathbf{r}) \, dV. \quad (1.222)$$

Představme si ovšem následující případ, kdy máme funkci

$$f(\mathbf{r}) = e^{kx}, \quad (1.223)$$

kde $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pokud provedeme integraci přes interval $[0, 1]$, získáme výsledek

$$\int_0^1 e^{kx} dx = \frac{e^k - 1}{k} = g(k). \quad (1.224)$$

Na tuto hodnotu se můžeme dívat jako na skalár, který získáme dosazením za k , ale také jako na funkci g závislou na k . Stejný princip nás potkává v elektromagnetismu. Integrujeme funkci, která je závislá na $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}'$ pouze přes čarované souřadnice

$$F(\mathbf{r}) = \int_{V'} f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV'. \quad (1.225)$$

Výsledek integrace opět není jen pouhý skalár, ale jedná se o funkci závislou na proměnných $\mathbf{r}$. Jakožto příklad můžeme uvažovat vztah mezi nábojovou hustotou a potenciálem, který si uvedeme později v textu.

Pokud budeme integrovat funkci $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ přes oba souřadnicové vektory, získáme opět skalární hodnotu

$$I = \int_V \int_{V'} f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' dV = \int_V F(\mathbf{r}) dV. \quad (1.226)$$

Výše uvedený integrál bychom mohli zintegrovat podle k na intervalu $[0, 1]$. Jelikož se jedná o netriviální integraci, pomůžeme si numerickým software Wolfram Mathematica a získáme výsledek

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{kx} dx dk = \int_0^1 \frac{e^k - 1}{k} dk \approx 1.3179. \quad (1.227)$$

1.4.3 Integrace vektorového pole

S integrací vektorového pole máme nejčastěji spojené křivkové a plošné integrály. Ovšem v mnoha situacích nás potká i integrace vektorového pole, jehož výsledkem bude opět vektor. V takovém případě postupujeme integrací po složkách

$$\mathbf{I} = \int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV = \left(\int_V A_x(\mathbf{r}) dV \right) \mathbf{x}_0 + \left(\int_V A_y(\mathbf{r}) dV \right) \mathbf{y}_0 + \left(\int_V A_z(\mathbf{r}) dV \right) \mathbf{z}_0. \quad (1.228)$$

Znovu zdůrazníme, že výsledek integrace je **vektor**.

Ve fundamentálních principech vztahujících pole ke zdrojům se setkáme s výrazy typu

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{V'} \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV', \quad (1.229)$$

kde po integraci získáme **vektorové pole**. Princip se vyskytuje například v Coulombově zákoně nebo Biot-Savartově zákoně.

Konečně, při integraci přes pozorovací vektor $\mathbf{r}$ a zdrojový vektor $\mathbf{r}'$ opět získáme pouze **vektor**

$$\mathbf{I} = \int_V \int_{V'} \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' dV = \int_V \mathbf{F}(\mathbf{r}) dV. \quad (1.230)$$

Přibližme si tento princip na následujícím příkladu. Nejjednodušší podoba Coulombova zákona se zabývá silovým působením mezi dvěma bodovými náboji

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}, \quad (1.231)$$

kde náboj Q_1 je umístěn v místě $\mathbf{r}_1$ a náboj Q_2 je lokalizován v $\mathbf{r}_2$. Nyní uvažujme, že chceme spočítat síly mezi dvěma netriviálními nabitými tělesy. Působení zohledníme skrz hustoty náboje a integraci

$$\mathbf{F} = \int_V \int_{V'} \frac{\varrho(\mathbf{r}) \varrho'(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dV' dV = \int_V \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV. \quad (1.232)$$

Po provedení integrace přes objem V' získáme objemový integrál z vektorového pole $\mathbf{E}$. Po druhé integraci pak získáme sílu $\mathbf{F}$, jakou na sebe dva objekty s libovolným tvarem a obecným nábojovým rozložením působí.

1.4.4 Souřadnicové substituce

V mnoha případech se při výpočtech vyplatí přejít k rozdílným souřadným systémům [2]. Uvažujme následující integrál

$$I = \int_V f(\mathbf{r}) dV. \quad (1.233)$$

Integrace v kartézských souřadnicích x, y a z může vést na výrazy, které není možné analyticky spočítat. Vyplácí se zavést novou soustavu proměnných ξ, χ a ψ , které se na původní proměnné mapují daným funkčním předpisem

$$x = T_x(\xi, \chi, \psi), \quad (1.234)$$

$$y = T_y(\xi, \chi, \psi), \quad (1.235)$$

$$z = T_z(\xi, \chi, \psi). \quad (1.236)$$

$$(1.237)$$

Transformací T změníme objem V , přes který integrujeme, za novou množinu U . Uvažované transformace ovšem mohou změnit výsledek integrace. Zavádíme proto Jacobiho matici

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_x}{\partial \xi} & \frac{\partial T_x}{\partial \chi} & \frac{\partial T_x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial T_y}{\partial \xi} & \frac{\partial T_y}{\partial \chi} & \frac{\partial T_y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial T_z}{\partial \xi} & \frac{\partial T_z}{\partial \chi} & \frac{\partial T_z}{\partial \psi} \end{pmatrix} \quad (1.238)$$

ze které spočítáme korekční člen zvaný jakobián jako její determinant. Celkově tak dostaneme výraz

$$I = \int_V f(\mathbf{r}) dV = \int_U f(T(\xi, \chi, \psi)) |\mathbf{J}(\xi, \chi, \psi)| dU. \quad (1.239)$$

Se substitucemi jsme se již setkali v sekci 1.2.3, kde jsme si uvedli alternativní vyjádření proměnných, jednotkových vektorů a diferenciálů. Také Jacobiho matice (1.238) jsme již použili. V sekci 1.2.3 jsme ovšem uvažovali takovou matici $\mathbf{J}$, která měla determinant rovný jedné. Abychom získali správné verze výrazů pro integraci, použili jsme upravené diferenciály, do kterých jsme pomocí korekce přidali jednotky. Při výpočtech povedou oba tvary na stejné výrazy a není potřeba pro potřeby výpočtů objemových integrálů skrz substituce vztahy rozlišovat. **V případě křivkové integrace okolo kružnice je ovšem nutné použít správný diferenciál.**

V našich výpočtech se omezíme pouze na základní tři souřadné soustavy - kartézskou, válcovou a sférickou. Aplikujme nyní výše uvedené koncepty na převody od kartézské soustavy do válcové a sférické.

Válcová soustava

Souřadnice popisující cylindrickou geometrii využijeme pro popis všech problémů s válcovou symetrií. Převod mezi kartézskou a válcovou soustavou má tvar

$$x = \rho \cos \varphi, \quad (1.240)$$

$$y = \rho \sin \varphi, \quad (1.241)$$

$$z = z, \quad (1.242)$$

a její jakobián je

$$|\mathbf{J}| = \left| \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \rho. \quad (1.243)$$

Připomeňme výsledek ze sekce 1.2.3, kde jsme obdrželi objemový element pro integraci

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz, \quad (1.244)$$

kde výsledek ρ je přesně korekce pro úhlovou proměnnou, aby měla správné fyzikální jednotky.

Uvažujme následující příklad. Chceme zintegrovat funkci

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + (z-l)^2}\right)^3}, \quad (1.245)$$

přes objem V vymezený následující množinou

$$V = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, -l/2 \leq z \leq l/2\}. \quad (1.246)$$

Jedná se o válec s osou v počátku s poloměrem a a výškou podstavy l . Funkci vyjádříme ve válcových souřadnicích a uvedené parametry a a L dosadíme do integračních mezí

$$\int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho}{\left(\sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi + (z-l)^2}\right)^3} d\rho d\varphi dz. \quad (1.247)$$

Po zjednodušení zjistíme, že vztah nezávisí na proměnné φ . Můžeme tedy zapsat výsledek prvního kroku jako

$$2\pi \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^a \frac{\rho}{\left(\sqrt{\rho^2 + (z-l)^2}\right)^3} d\rho dz. \quad (1.248)$$

Nyní se nám nabízí dva způsoby jak pokračovat. Buď nejdříve spočteme integrál podle z a poté podle ρ , nebo začneme s integrálem podle ρ a budeme pokračovat s integrací podle z . Druhý zmíněný způsob je jednodušší kvůli přítomnosti ρ v čitateli a proto jej zvolíme. Začneme s jednoduchou substitucí

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^a \frac{\rho}{\left(\sqrt{\rho^2 + (z-l)^2}\right)^3} d\rho dz &= \left\| \begin{array}{ll} t = \rho^2 + (z-l)^2 & 0 \rightsquigarrow (z-l)^2 \\ dt = 2\rho d\rho & a \rightsquigarrow a^2 + (z-l)^2 \end{array} \right\| \\ &= \pi \int_{-l/2}^{l/2} \int_{(z-l)^2}^{a^2+(z-l)^2} \frac{dt}{(\sqrt{t})^3} = \pi \int_{-l/2}^{l/2} \left[\frac{-1}{2\sqrt{t}} \right]_{(z-l)^2}^{a^2+(z-l)^2} dz = \pi \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{|z-l|} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z-l)^2}} dz. \quad (1.249) \end{aligned}$$

Další kroky jsou rozdělení výrazu na dvě části, které separátně zintegrujeme. Nejdříve vyřešíme integrál s odmocninou pomocí tangentové substituce

$$\int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z-l)^2}} dz = \left\| \begin{array}{l} a \tan u = z - l \\ \frac{a}{\cos^2 u} du = dz \end{array} \quad \begin{array}{l} l/2 \rightsquigarrow \arctan(-l/2a) \\ -l/2 \rightsquigarrow \arctan(-3l/2a) \end{array} \right\| =$$

$$\int_{\arctan(-3l/2a)}^{\arctan(-l/2a)} \frac{1}{\sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 u}} \frac{a}{\cos^2 u} du = \int_{\arctan(-3l/2a)}^{\arctan(-l/2a)} \frac{\cos u}{a} \frac{a}{\cos^2 u} du \quad (1.250)$$

Po zjednodušení dostaneme integrál, kde použijeme trik s goniometrickými vzorci

$$\int_{\arctan(-3l/2a)}^{\arctan(-l/2a)} \frac{1}{\cos u} du = \int_{\arctan(-3l/2a)}^{\arctan(-l/2a)} \frac{\cos u}{\cos^2 u} du = \int_{\arctan(-3l/2a)}^{\arctan(-l/2a)} \frac{\cos u}{1 - \sin^2 u} du$$

$$\left\| \begin{array}{l} v = \sin u \\ dv = \cos u du \end{array} \quad \begin{array}{l} \arctan(-l/2a) \rightsquigarrow -1/\sqrt{l^2 + 4a^2} \\ \arctan(-3l/2a) \rightsquigarrow -3l/\sqrt{9l^2 + 4a^2} \end{array} \right\| = \int_{-3l/\sqrt{9l^2 + 4a^2}}^{-1/\sqrt{l^2 + 4a^2}} \frac{1}{1 - v^2} dv. \quad (1.251)$$

V substituci jsme použili identitu

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}. \quad (1.252)$$

Manipulací se zlomkem získáme dvě racionální funkce

$$\int_{-3l/\sqrt{9l^2 + 4a^2}}^{-1/\sqrt{l^2 + 4a^2}} \frac{1}{v+1} - \frac{1}{v-1} dv = \left[\ln|v+1| - \ln|v-1| \right]_{-3l/\sqrt{9l^2 + 4a^2}}^{-1/\sqrt{l^2 + 4a^2}} =$$

$$\left[\ln \left| \frac{v+1}{v-1} \right| \right]_{-3l/\sqrt{9l^2 + 4a^2}}^{-1/\sqrt{l^2 + 4a^2}} = \ln \left(\frac{\sqrt{l^2 + 4a^2} - l}{\sqrt{l^2 + 4a^2} + l} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{9l^2 + 4a^2} - 3l}{\sqrt{9l^2 + 4a^2} + 3l} \right). \quad (1.253)$$

Zbývá nám vyhodnotit integrál ze zlomku s absolutní hodnotou. Jelikož na celém intervalu $[-l/2, l/2]$ je hodnota v absolutní hodnotě záporné, změníme znaménko a funkci zintegrujeme

$$- \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{z-l} dz = - \left[\ln|z-l| \right]_{-l/2}^{l/2} = - \left(\ln\left(\frac{l}{2}\right) - \ln\left(\frac{3l}{2}\right) \right) = \ln 3. \quad (1.254)$$

Celkový výsledek se skládá ze sumace všech částí a postupném aplikování logaritmických pravidel sčítání.

$$\int_V \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + (z-l)^2}\right)^3} dV = \pi \ln \left(3 \cdot \frac{\sqrt{9l^2 + 4a^2} - 3l}{\sqrt{9l^2 + 4a^2} + 3l} \cdot \frac{\sqrt{l^2 + 4a^2} + l}{\sqrt{l^2 + 4a^2} - l} \right). \quad (1.255)$$

Složitost výpočtu výše zdůvodňuje, proč u většiny výpočtů budeme používat matematické identity, do kterých podle situace dosadíme příslušné veličiny.

Sférická soustava

Problémy se sférickou symetrií patří ve fyzice k těm nejoblíbenějším. Mnoho z nich lze analyticky vyřešit a stanovit tak kanonická řešení pro ověřování správnosti výpočtů provedených numerickými metodami. Pro přechod mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi použijeme následující

předpis

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad (1.256)$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad (1.257)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (1.258)$$

Pro výpočet opět potřebujeme zjistit jakobián

$$|\mathbf{J}| = \left| \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \right| = r^2 \sin \theta. \quad (1.259)$$

Stejně jako v případě cylindrických souřadnic i zde jsme získali výsledek, který zajistí správné fyzikální jednotky skrz korekci úhlových diferenciálů.

Spočteme jednoduchý příklad s objemem koule. Integrační oblast zapíšeme

$$V = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}. \quad (1.260)$$

Převodem do sférických souřadnic získáme jednoduchý integrál k výpočtu

$$\int_V dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi. \quad (1.261)$$

Zde si můžeme povšimnout další vlastnosti. Jednotlivé proměnné na sobě nejsou závislé a můžeme je tedy zintegrovat každou zvlášť

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^a r^2 \, dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{4\pi a^3}{3}. \quad (1.262)$$

V úlohách se sférickou geometrií se často budeme setkávat s výrazem

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi. \quad (1.263)$$

Jedná se o integraci prostorového úhlu a hodnota integrálu vždy vyjadřuje povrch koule s jednotkovým poloměrem.

1.4.5 Křivkové integrály prvního typu

Vztahem (1.217) spočteme plochu vymezenou funkcí $f(x)$ a osou x . Při studiu pole bychom uvedeným způsobem mohli spočítat celkový náboj rozmístěný na úsečce s liniovou hustotou $\tau(\mathbf{r})$. Nechceme se ovšem omezovat pouze na výpočty rozložení na úsečkách, proto zavádíme zobecnění v podobě křivkového integrálu

$$I = \int_{\ell} f(\mathbf{r}) \, d\ell, \quad (1.264)$$

kde ℓ je obecná křivka v prostoru [2]. Postup výpočtu je založen na nalezení vhodného vyjádření křivky ℓ pomocí parametrizace $\Phi(t)$, kde interval $t \in [a, b]$ zobrazíme na křivku

$$\Phi : [a, b] \longrightarrow \ell. \quad (1.265)$$

Parametrizací se křivkový integrál transformuje na klasický Riemannův integrál

$$\int_{\ell} f(\mathbf{r}) \, d\ell = \int_a^b f(\Phi(t)) \left\| \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \right\| dt, \quad (1.266)$$

kde jsme dosadili za všechny původní proměnné zvolenou parametrizaci. Člen na pravé straně s derivací představuje normu vektoru.

Představme si princip na následujícím příkladu. Uvažujme kružnici

$$\ell = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = a^2, z = 0\}, \quad (1.267)$$

o poloměru a , na které je rozložen náboj s konstantní hustotou

$$\tau(\mathbf{r}) = \tau_0. \quad (1.268)$$

Chceme spočítat celkový náboj

$$Q = \int_{\ell} \tau(\mathbf{r}) \, d\ell. \quad (1.269)$$

I bez integrace si můžeme uvědomit, že výsledek je obvod kružnice vynásobený konstantní hustotou

$$Q = 2\pi a \tau_0. \quad (1.270)$$

Ukážeme si ovšem i řešení přímo ze vztahu (1.269). Nejdříve musíme zvolit vhodnou parametrizaci

$$\Phi(t) = \{a \cos t, a \sin t, 0\}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (1.271)$$

Dosazením do definiční množiny vidíme (1.267), že parametrizace popisuje všechny body křivky. Pokračujeme spočtením derivace podle parametru t , kde je výsledkem vektor

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -a \sin t \mathbf{x}_0 + a \cos t \mathbf{y}_0 + 0 \mathbf{z}_0, \quad (1.272)$$

s normou

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} = a. \quad (1.273)$$

Dosazením všech částí do integrace obdržíme

$$Q = \int_{\ell} \tau(\mathbf{r}) \, d\ell = \int_0^{2\pi} \tau_0 a \, dt = 2\pi a \tau_0, \quad (1.274)$$

přičemž integrací jsme obdrželi stejný výsledek jako výše.

V našich výpočtech budeme potřebovat parametrizovat křivky výjimečně. Pro většinu vztahů si vystačíme s diferenciály, které jsme si odvodili v sekci 1.2.3. Například na kružnici vždy použijeme diferenciální element

$$d\ell_{\varphi} = \rho \, d\varphi, \quad (1.275)$$

kde ρ bude konkrétní hodnota poloměru kružnice, v našem případě a . Integrační meze jsou dané rozmezím, ve kterém φ uvažujeme, tedy interval $[0, 2\pi]$. Integrace je formálně identická vztahu výše

$$Q = \int_{\ell} \tau(\mathbf{r}) \, d\ell = \int_0^{2\pi} \tau_0 a \, d\varphi = 2\pi a \tau_0, \quad (1.276)$$

s opět stejným výsledkem.

1.4.6 Křivkové integrály druhého typu

Interpretovat význam integrace vektorového pole po křivce je poměrně netriviální. Nejlépe se vztah vysvětluje jako práce po dané dráze

$$W = \int_{\ell} \mathbf{F} \cdot d\ell. \quad (1.277)$$

Na hmotný bod působí v každém místě prostoru síla $\mathbf{F}$. Pokud chceme přesunout bod z jednoho místa do druhé, musíme vykonat práci W . Pokud budeme působit proti směru síly, musíme práci dodat. Ve směru síly bude naopak síla vykonávat práci za nás. Všechny tyto vlastnosti jsou shrnuty ve skalárním součinu (1.3) vektoru síly $\mathbf{F}$ s diferenciálním elementem $d\ell = \boldsymbol{\tau} d\ell$, kde $\boldsymbol{\tau}$ je tečný vektor ke křivce ℓ .

Stejně jako v předchozím případě, se řešení převádí na standardní Riemannův integrál (1.217) pomocí parametrizování křivky a převodním vztahem

$$\int_{\ell} \mathbf{F} \cdot d\ell = \int_a^b \mathbf{F}(\Phi(t)) \cdot \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} dt. \quad (1.278)$$

Princip si opět přiblížíme na příkladu.

Uvažujme vektorové pole

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{A}{2\pi} \frac{-y\mathbf{x}_0 + x\mathbf{y}_0}{x^2 + y^2}, \quad (1.279)$$

které chceme zintegrovat po kruhu

$$\ell = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = a^2, z = 0\}. \quad (1.280)$$

Použijeme zcela totožnou parametrizaci jako v předchozím případě

$$\Phi(t) = \{a \cos t, a \sin t, 0\}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (1.281)$$

s derivací

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = -a \sin t \mathbf{x}_0 + a \cos t \mathbf{y}_0 + 0 \mathbf{z}_0 = a(-\sin t \mathbf{x}_0 + \cos t \mathbf{y}_0). \quad (1.282)$$

Dosazením parametrizace do vektorového pole $\mathbf{F}$ obdržíme

$$\mathbf{F}(\Phi(t)) = \frac{A}{2\pi} \frac{-a \sin t \mathbf{x}_0 + a \cos t \mathbf{y}_0}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} = \frac{A}{2\pi a} (-\sin t \mathbf{x}_0 + \cos t \mathbf{y}_0). \quad (1.283)$$

Vypočteme skalární součin obou výrazů ze vztahu (1.278) a získáme integrand

$$\frac{A}{2\pi a} (-\sin t \mathbf{x}_0 + \cos t \mathbf{y}_0) \cdot a(-\sin t \mathbf{x}_0 + \cos t \mathbf{y}_0) = \frac{A}{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) = \frac{A}{2\pi}. \quad (1.284)$$

Dosazením do původního vzorce vyhodnotíme požadovaný integrál

$$\int_{\ell} \mathbf{F} \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} \frac{A}{2\pi} = \frac{A}{2\pi} 2\pi. \quad (1.285)$$

Parametrizace je univerzální nástroj pro výpočet křivkových integrálů. Pro účely elektromagnetického pole nám vystačí jednodušší přístup. Podívejme se znovu na diferenciální element křivky

$$d\ell = \boldsymbol{\tau} d\ell. \quad (1.286)$$

Pokud budeme integrovat po úsečce vyskytující se pouze například na ose x , lze element zapsat jako

$$d\ell = \mathbf{x}_0 dx, \quad (1.287)$$

kde vektor $\mathbf{x}_0$ určuje směr. Jedná se o stejný princip, který jsme použili při integraci liniové hustoty náboje. Zde je ovšem přidána složitost s potřebou určení tečného vektoru. Zavedené vektorové systémy 1.2.3 nám poskytnout dostatečný aparát pro výpočet všech křivkových integrálů, které nás potkají.

Vrátíme-li se k příkladu výše, vektorový křivkový element pro kružnici lze zapsat jako

$$d\ell = \boldsymbol{\varphi}_0 a d\varphi. \quad (1.288)$$

Integrované vektorové pole máme vyjádřené v kartézských souřadnicích. Pro další výpočty potřebujeme oba výrazy sjednotit do jednoho vektorového systému. V sekci 1.2.3 jsme již uvažované vektorové pole přepsali do válcových souřadnic a vektorů (1.82)-(1.84) a zde jej již upravíme pouze o konstanty

$$\mathbf{F} = \frac{A}{2\pi\rho}\boldsymbol{\varphi}_0. \quad (1.289)$$

Při výpočtu musíme zařídit, aby do vektorového pole byly dosazeny funkční hodnoty na křivce. V tomto případě dosadíme za ρ hodnotu poloměru a . Celý integrál nyní znovu vyhodnotíme

$$\int_{\ell} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{A}{2\pi a} \boldsymbol{\varphi}_0 \right) \cdot (\boldsymbol{\varphi}_0 a d\varphi) = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{A}{2\pi} 2\pi. \quad (1.290)$$

Postup je podstatně jednodušší. Používání rozdílných vektorových systému je založeno zejména na jednoduché práci s elektromagnetickými poli v různých systémech. Jelikož budeme používat primárně kanonická tělesa, jako jsou roviny, válce a koule, je pro nás zmíněný postup primární.

1.4.7 Plošné integrály prvního typu

Z analogických důvodů jako pro křivkové integrály prvního typu zavádíme plošné integrály z funkce

$$I = \int_S f(\mathbf{r}) dS. \quad (1.291)$$

Zajímá nás integrace skalární funkce f přes obecnou plochu S z prostoru $S \in \mathbb{R}^3$. V elektromagnetismu mají plošné integrály z funkce význam pro výpočet náboje z nábojové hustoty na obecné ploše.

Obecný postup je zavedení parametrizace plochy pomocí dvou proměnných

$$\Phi(t, u) = \{x(t, u), y(t, u), z(t, u)\}, \quad t \in [a, b], u \in [c, d], \quad (1.292)$$

pomocí které převedeme integraci na klasický dvojný integrál

$$\int_S f(\mathbf{r}) dS = \int_a^b \int_c^d f(\Phi(t, u)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\| dt du. \quad (1.293)$$

Podobně jako u křivkových integrálů, i zde si vystačíme s jednodušším postupem založeným na použití rozdílných souřadných systému. Ukážeme si vše na příkladu.

Uvažujme povrch koule

$$S = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}, \quad (1.294)$$

na kterém je náboj distribuován s plošnou hustotou

$$\varsigma(\mathbf{r}) = \varsigma_0 z. \quad (1.295)$$

Chceme spočítat celkový náboj

$$Q = \int_S \varsigma(\mathbf{r}) dS. \quad (1.296)$$

Výsledek bychom mohli znovu uhádnout jen za pomoci znalosti elektromagnetického pole. Na konci příkladu se k tomu vrátíme. Začneme ovšem nejdříve standardním výpočtem (1.293) s parametrizací

$$\Phi(t, u) = \{a \sin t \cos u, a \sin t \sin u, a \cos t\}, \quad t \in [0, 2\pi], u \in [0, \pi]. \quad (1.297)$$

Kontrolním dosazením do definiční rovnice v množině (1.294) ověříme, že zvolená parametrizace plně popisuje všechny body plochy. Pokračujeme spočtením derivací podle parametrů

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = a \cos t \cos u \mathbf{x}_0 + a \cos t \sin u \mathbf{y}_0 - a \sin t \mathbf{z}_0, \quad (1.298)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = -a \sin t \sin u \mathbf{x}_0 + a \sin t \cos u \mathbf{y}_0. \quad (1.299)$$

Vektorový součin mezi derivacemi vede na vektor

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= \begin{vmatrix} a \cos t \cos u & -a \sin t \sin u & \mathbf{x}_0 \\ a \cos t \sin u & a \sin t \cos u & \mathbf{y}_0 \\ -a \sin t & 0 & \mathbf{z}_0 \end{vmatrix} = \\ &= a^2 \sin^2 t \cos u \mathbf{x}_0 + a^2 \sin^2 t \sin u \mathbf{y}_0 + (a^2 \cos t \sin t \cos^2 u + a^2 \cos t \sin t \sin^2 u) \mathbf{z}_0 = \\ &= a^2 \sin t (\sin t \cos u \mathbf{x}_0 + \sin t \sin u \mathbf{y}_0 + \cos t \mathbf{z}_0). \end{aligned} \quad (1.300)$$

Norma výrazu (1.300) je formálně podobná vztahu (1.116), který jsme spočítali již dříve. Uvedeme zde výsledek ve zkrácené podobě

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\| = a^2 \sin t \sqrt{\sin^2 t \cos^2 u + \cos^2 t \sin^2 u + \cos^2 t} = a^2 \sin t. \quad (1.301)$$

Dosadíme parametrizaci za integrovanou funkci (1.295) a začneme s vyhodnocováním integrálu

$$Q = \int_S \varsigma(\mathbf{r}) \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varsigma_0 a \cos t \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\| dt du = \frac{a^3 \varsigma_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 2 \sin t \cos t dt du = 0, \quad (1.302)$$

kde jsme použili identitu pro $\sin 2t$ a fakt, že integrace přes periodu goniometrické funkce je rovna nule.

Ve všech plošných integrálech, které při studiu pole potkáme, bude možné vyjádřit integrační element plochy za pomoci diferenciálu ze tří základních souřadnicových systému. Pro příklad výše je element plochy roven

$$dS = d\ell_\theta d\ell_\varphi = r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi = r^2 \sin \theta. \quad (1.303)$$

Převedením integrované hustoty do sférických souřadnic okamžitě získáme stejný integrál jako výše

$$Q = \int_S \varsigma(\mathbf{r}) \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^3 \varsigma_0 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = 0. \quad (1.304)$$

Celý problém jsme vyřešili podstatně rychleji jen za pomoci uvážení různých soustav souřadnic.

Na začátku výpočtu jsme zmínili možnost vyhodnotit integrál okamžitě pouze za pomoci matematických vlastností. Uvážíme-li povrch a funkci, kterou integrujeme, vidíme, že se jedná o integraci liché funkce přes symetrický interval. Taková integrace je vždy rovna nule. Můžeme ovšem uvážit i fyzikální interpretaci. Celé nábojové rozložení je ekvivalentní elektrickému dipólu. Nejjednodušší dipólová konfigurace jsou dva stejně velké, ale opačné, blízké náboje. Součet těchto nábojů je roven nule.

1.4.8 Plošné integrály druhého typu

S toky vektorových polí se v elektromagnetismu setkáme ve všech jeho částech. Ať už se jedná o Maxwellovy rovnice, definici elektrického proudu, nebo výpočet indukčnosti. Základní vztah je definován jako

$$I = \int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.305)$$

kde $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ reprezentuje vektorový element plochy s vnější normálou $\mathbf{n}$. Ve vztahu opět figuruje skalární součin (1.3) mezi vektorovým polem $\mathbf{F}$ a normálovým vektorem. Největší tok proudí plochu, na kterou dopadá vektorové pole kolmo. Naopak pokud je normálový vektor rovnoběžný s vektorovým polem, je tok plochou nulový.

Univerzální způsob výpočtu toku je zavést parametrizaci a převést integrál (1.305) do podoby

$$\int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_a^b \int_c^d \mathbf{F}(\Phi(t, u)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) du dt, \quad (1.306)$$

kde již integrujeme klasický dvojný integrál.

Jako příklad spočteme tok vektorového pole

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{A}{4\pi} \frac{x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0 + z\mathbf{z}_0}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}, \quad (1.307)$$

skrz povrch koule

$$S = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}. \quad (1.308)$$

Množinu popíšeme stejnou parametrizací jako v předchozím příkladě

$$\Phi(t, u) = \{a \sin t \cos u, a \sin t \sin u, a \cos t\}, \quad t \in [0, 2\pi], u \in [0, \pi], \quad (1.309)$$

pro zkrácení ovšem zapíšeme rovnou výsledek vektorového součinu z parametrizace

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u} = a^2 \sin t (\sin t \cos u \mathbf{x}_0 + \sin t \sin u \mathbf{y}_0 + \cos t \mathbf{z}_0). \quad (1.310)$$

Pokračujeme dosazením parametrizace za vektorové pole

$$\mathbf{F}(\Phi(t, u)) = \frac{a \sin t \cos u \mathbf{x}_0 + a \sin t \sin u \mathbf{y}_0 + a \cos t \mathbf{z}_0}{\left(\sqrt{a^2 \sin^2 t \cos^2 u + a^2 \sin^2 t \sin^2 u + a^2 \cos^2 t}\right)^3}. \quad (1.311)$$

Stejný výraz jsme určovali již dříve v sekci 1.2.3. Napišme zde pouze výsledek

$$\mathbf{F}(\Phi(t, u)) = \frac{1}{a^2} (\sin t \cos u \mathbf{x}_0 + \sin t \sin u \mathbf{y}_0 + \cos t \mathbf{z}_0). \quad (1.312)$$

U všech předchozích případů jsme si mohli povšimnout, že parametrizace funguje velmi podobně jako souřadnicové substituce. Aktuální příklad není výjimkou a výsledky, které postupně pomocí parametrizace získáváme, jsou formálně stejné jako souřadnicové substituce. Vektor (1.310) z parciálních derivací skalárně vynásobíme z převedeným vektorovým polem

$$\mathbf{F}(\Phi(t, u)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) = \frac{A}{4\pi a^2} \cdot a^2 \sin t = \frac{A}{4\pi} \sin t, \quad (1.313)$$

čímž jsme obdrželi integrand, který dosadíme do vztahu (1.306) začneme s integrací

$$\int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{A}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin t dt du = \frac{A}{4\pi} 4\pi = A. \quad (1.314)$$

Stejný integrál jsme řešili v sekci 1.4.4 a je dobré si jeho výsledek zapamatovat.

Opět se podíváme na příklad pomocí souřadnicových substitucí. Pro sférickou plochu můžeme vektorový element plochy zapsat jako

$$d\mathbf{S} = \mathbf{r}_0 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (1.315)$$

Pokud si výše uvedené vektorové pole převedeme do sférické soustavy, zjednoduší se zápis na

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{A}{4\pi r^2} \mathbf{r}_0. \quad (1.316)$$

Dosadíme do vztahu (1.305) a znovu spočteme výsledek

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{A}{4\pi a^2} \mathbf{r}_0 \right) \cdot (\mathbf{r}_0 a^2 \sin \theta) d\theta d\varphi = \frac{A}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{A}{4\pi} 4\pi = A. \quad (1.317)$$

Všechny naše integrální výpočty bude možné spočítat pouze za pomoci vhodně zvolených diferenciálů a souřadnic. Ze začátku mohou ovšem být souřadnicové transformace poměrně neintuitivní. Proto byly v tomto doplňkovém textu všechny výše uvedené příklady spočteny více způsoby.

1.4.9 Integrální identity

Pravděpodobně nejelegantnějším výsledkem klasické matematické analýzy jsou integrální věty. S jejich základem jsme se již seznámili v sekcích výše, akorát jsme neuvedli kontext, ve kterém si koncepty představíme níže.

Vyšetřovali jsme diferenciální element toku vektorového pole elementární plochou

$$d\Phi = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{F} dV, \quad (1.318)$$

pro něž jsme získali alternativní vyjádření pomocí divergence vektorového pole a objemového elementu. V sekci 1.3.2 jsme počítali tok vektorového pole plochou. Přeintegrujeme všechny části vztahu (1.318) podle daných elementů a obdržíme integrální tvar

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV. \quad (1.319)$$

Tento vztah ovšem platí jen, pokud jsou plocha S a objem V spolu svázány vztahem

$$S = \partial V, \quad (1.320)$$

tedy že uzavřená plocha S je objemu V . Uvedený teorém se jmenuje Gaussova věta

$$\oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV, \quad (1.321)$$

a představuje základní nástroj pro převod Maxwellových rovnic do diferenciálního tvaru.

Vyšetřovali jsme také cirkulaci vektorového pole okolo zadané křivky

$$d\Psi = \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.322)$$

kterou jsme naopak převedli do diferenciálního toku rotace vektorového pole. Stejně jako v předchozím případě celou rovnici integrujeme

$$\Psi = \int_{\ell} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.323)$$

Opět nesmíme zapomenout na podmínku, že uzavřená křivka ℓ , po které integrujeme představuje hranici plochy $\ell = \partial S$. Získali jsme Stokesovu větu

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.324)$$

Věta má opět zásadní význam pro převod mezi integrálním a diferenciálním tvar Maxwellových rovnic.

1.5 Shrnutí

Uvedená matematická teorie představuje základ pro práci s elektromagnetickým polem. Můžete si povšimnout, že mnoho konceptů se opakuje, což je jeden z důsledků duality mezi elektrickým a magnetickým polem. Částečně s odvozením diferenciálních operátorů jsme věnovali větší důraz, neboť na stejné principy narazíme při odvozování polarizace a magnetizace.

Základem pro efektivní výpočty je pochopení převodů mezi vektorovými systémy a souřadnicemi. Doporučujeme vám problematiku důkladně pročíst a případně nás kontaktovat pro další vysvětlení.

Výklad zde byl sepsán s ohledem na kompromis mezi matematickou rigorózností a inženýrským potřebám. Vychází z matematických předmětů, které jste měli v prvním roce studia. Pro další čtení vás odkazujeme na následující zdroje. Pro úspěšné ukončení předmětu nebude potřeba všechny kurzy znovu důkladně projít. Zdroje níže slouží jako rychlá pomoc při potížích s matematickým aparátem.

- [Abstraktní a konkrétní lineární algebra, J. Velebil.](#)
- [Diferenciální a integrální počet jedné proměnné, J. Tkadlec](#)
- [Math Tutor, P. Habala](#)
- [Diferenciální počet funkcí více proměnných, J. Hamhalter a J. Tišer.](#)
- [Integrální počet funkcí více proměnných, J. Hamhalter a J. Tišer.](#)
- [O vztahu matematiky a fyziky, P. Kulhánek](#)
- [Série přednášek z lineární algebry](#)
- [Série přednášek z matematické analýzy 2](#)
- [Série cvičení z matematické analýzy 2](#)
- [Série přednášek z teoretické fyziky 4](#)

Literatura

- [1] Jan Hamhalter and Jaroslav Tišer. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. České vysoké učení technické v Praze, Praha, 2. vydání edition, 2005. Učební text pro FEL ČVUT. Váha: 400 g.
- [2] Jan Hamhalter and Jaroslav Tišer. *Integrální počet funkcí více proměnných*. České vysoké učení technické v Praze, Praha, 3. vydání edition, 2022. Učební text pro FEL ČVUT. Rozsah: 198 stran, 52 obrázků. Integrály vícerozměrné, křivkové, plošné.
- [3] Petr Kulhánek. *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky I*. Aldebaran Group for Astronomy (AGA), Praha, 1. vydání edition, 2020. Publikace obsahuje odkazy na online přednášky autora. Pevná vazba, 416 stran, formát 165×235 mm, tisk ve stupních šedi.
- [4] Jiří Velebil. Abstraktní a konkrétní lineární algebra. <https://math.fel.cvut.cz/en/people/velebil/akla.html>, 2023. Skriptum dostupné online, aktuální verze 15. září 2023, 586 stran.