

Příklady na této stránce vyřešte. Odpověď vždy napište do připravené mezery. Postup psát nemusíte. Odevzdává se pouze tento čistopis (případné koncepty ne).

1. Máme funkci $f(x, y) = 4x + y$ a množinu $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1, 0 \leq x \leq 1\}$.

a) (1 bod) Nakreslete obrázek, na kterém budou souřadnicové osy, množina X a vrstevnice funkce f výšky 0.

Graf je horní půlka kladné větve hyperboly. Vrstevnice výšky 0 je přímka procházející počátkem kolmá k vektoru $(4, 1)$.

b) (1 bod) Najděte všechny extrémy (globální i lokální) funkce f na množině X .

Jedno globální minimum v bodě $(\frac{1}{2}, 2)$, jiná lokální minima nejsou. Lokální maximum v bodě $(1, 1)$, globální maxima nejsou (funkce je na X neomezená shora).

0. Hledáme lokální extrémy funkce $f(x, y) = 1/x + 1/(2y^2) + xy$ na $\mathbb{R}^2$.

a) (1 bod) Najděte všechny stacionární body funkce.

$f'(x, y) = [y - 1/x^2 \quad x - 1/y^3] = 0$ má jediné řešení $(x, y) = (1, 1)$.

b) (1 bod) Pro každý stacionární bod určete, zda je to lokální extrém a případně jaký (minimum nebo maximum).

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} 2/x^3 & 1 \\ 1 & 3/y^4 \end{bmatrix}, \quad f''(1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$f''(1, 1)$ je pos definitní (napr dle vlastních čísel $(5 \pm \sqrt{5})/2$), takže lok. minimum.

0. (1 bod) Najděte Taylorův polynom prvního stupně funkce $f(x, y) = x^2y$ v bodě $(1, -1)$. Výsledný polynom napište ve skalárním tvaru (tj. nesmí obsahovat matice ani vektory) a zjednodušte.

$$f'(x, y) = [2xy \quad x^2], \quad T_1(x, y) = f(1, -1) + f'(1, -1)[x - 1 \quad y + 1]^T = -1 + [-2 \quad 1][x - 1 \quad y + 1]^T = y - 2x + 2$$

0. (1 bod) Hledáme číslo x^* splňující $x \ln x = 1$, kde $\ln$ je přirozený logaritmus. Navrhněte vhodnou iterační metodu a počáteční odhad x_0 . Napište vzorec pro iteraci metody (pro tento konkrétní příklad!), počáteční odhad x_0 , a odhad x_1 po první iteraci.

Newtonova metoda, iterace $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k \ln x_k - 1}{1 + \ln x_k} = \frac{x_k + 1}{\ln x_k + 1}$, vhodný počáteční odhad je napr. $x_0 = 1$, pak tedy $x_1 = 2$.

Po pár iteracích je $x = 1.763222834351897$ (nebylo v zadání).

0. Najděte úvahou optimální hodnotu (tedy **nikoliv optimální argument**) následujících úloh.

a) (1 bod) $\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 2\}$ kde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ je dáno.

$$2 \max\{c_1, \dots, c_n\}$$

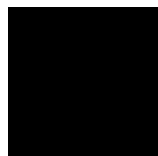
b) (1 bod) $\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}, \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 2\}$ kde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ je dáno.

Součet dvou největších čísel c_i .

Odpovědi na následující kvízové příklady VYZNAČTE DO TABULKY KŘÍŽKY. V každém příkladu je právě jedna odpověď správně. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce nechte prázdný. Chcete-li odstranit již vyznačený křížek, políčko s křížkem zcela zaplňte modrou barvou.

(Za správnou odpověď je 1 bod, za chybnou odpověď minus čtvrt bodu, za chybějící odpověď 0 bodů.)

000



	1
a	
b	
c	
d	
e	

- Funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ a Hessova matice $f''(\mathbf{a})$ má všechna vlastní čísla nezáporná a aspoň jedno nulové. Pak V zadání tohoto příkladu je chyba: ani jedna odpověď není pravdivá.
 - v bodě $\mathbf{a}$ funkce nemá lokální maximum
 - v bodě $\mathbf{a}$ má funkce lokální minimum
 - v bodě $\mathbf{a}$ nemá funkce lokální minimum
 - bodem $\mathbf{a}$ prochází přímka, na které je funkce konstantní
- (e) všechny směrové derivace funkce v bodě $\mathbf{a}$ jsou kladné
- Nechť $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - 1$ (kde $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$) a $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2 - 1$. Je-li $\mathbf{x}^*$ lokální maximum funkce f za podmínky $g(\mathbf{x}) = 0$, pak
 - $\mathbf{x}^* = \alpha \mathbf{c}$ pro nějaké $\alpha > 0$ Správně, plyne ihned z podmínky prvního řádu pro lok. extrémy vázané rovnostmi.
 - $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
 - vektory $\nabla g(\mathbf{x}^*)$ a $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ jsou ortogonální
 - $\nabla g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
- (e) lokální maximum (a tedy ani bod $\mathbf{x}^*$) neexistuje
- Funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{v}$ je směr největšího růstu funkce f v bodě $\mathbf{x}$, přičemž $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$.
 - Směrová derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}$ ve směru $\mathbf{v}$ je rovna $\|\nabla f(\mathbf{x})\|_2$. Správně, viz sekce skript o gradientu.
 - Vektor $\mathbf{v}$ je kolmý na $\nabla f(\mathbf{x})$.
 - Platí $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
 - Směrová derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}$ ve směru $\mathbf{v}$ je nulová.
- (e) Hessova matice funkce f v bodě $\mathbf{x}$ je pozitivně semidefinitní.
- Minimalizujeme funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$ za podmínky $g(x, y) = (x + y - 1)^2 = 0$. Použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů s Lagrangeovou funkcí $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$. Platí:
 - Úloha má alespoň jedno lokální minimum, ale metoda ho nenajde, protože toto minimum není regulární bod funkce g . Správně: žádný bod splňující $g(x, y) = 0$ není regulární bod funkce g , neb $\nabla g(x, y) = 2(x + y - 1)(1, 1)$, což je rovno $(0, 0)$ pro každé (x, y) splňující $(x + y - 1)^2 = 0$. Soustava rovnic popisující podmínky prvního řádu nebude mít řešení, jak ukázáno ve skriptech na podobných příkladech.
 - Úloha má alespoň jedno lokální minimum a metoda ho najde.
 - Úloha je neomezená.
 - Úloha je nepřipustná.
- (e) žádná z uvedených možností
- Funkce $f(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2, -x_1, -x_2\}$ je
 - p -norma pro $p = \infty$ Správně, neb jde psát jako $f(x_1, x_2) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.
 - lineární funkce
 - afinní funkce
 - nespojité funkce
- (e) žádná z uvedených možností
- Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní mnohostěn právě tehdy, když je
 - množinou řešení soustavy konečně mnoha lineárních nerovností tvaru $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$ (tj. typu 'menší nebo rovno') Správně, neb konv. mnohostěn je množina řešení konečného počtu lin. nerovnic, a každá lin. nerovnice jde přepsat do tvaru lin. nerovnice s nerovností typu $\leq$ (vynásobím ji minus jednou když je třeba).
 - průnikem konečně mnoha konvexních množin
 - konvexním obalem konečně mnoha bodů
 - konvexním obalem svých extrémálních bodů
- (e) žádná z uvedených možností

7. Jsou dány dva různé body $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, kde $n > 1$. Množina $\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ je
- (a) konvexní mnohostěn, který nemá žádné vnitřní body **Správně: je to úsečka v rovině, což je konvexní mnohostěn (jde získat jako průnik čtyř polorovin). Úsečka v rovině nemá žádné vnitřní body, neb dle definice nejde kolem žádného jejího bodu udělat kruh s nenulovým poloměrem, který by celý ležel v ní, viz skriptu.**
 - (b) úsečka spojující body $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, jejíž všechny body jsou vnitřní kromě bodů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, které jsou hraniční
 - (c) přímka procházející body $\mathbf{a}, \mathbf{b}$
 - (d) lineární podprostor.
- II (e) žádná z uvedených možností