

Příklady na této stránce vyřešte. Odpověď vždy napište do připravené mezery. Postup psát nemusíte. Odevzdává se pouze tento čistopis (případné koncepty ne).

1. (1 bod) Máme funkci $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 + \mu^2 \|\mathbf{x}\|^2$, kde matice $\mathbf{A}$, vektor $\mathbf{b}$ a skalár μ jsou dány. Chceme tuto funkci napsat ve tvaru $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Cx} - \mathbf{d}\|^2$. Je to možné? Pokud ano, napište, jak se spočítá $\mathbf{C}, \mathbf{d}$ pomocí $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mu$. Pokud ne, odůvodněte.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mu \mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

2. Máme podprostor $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0\}$.

a) (1 bod) Najdi libovolnou bázi podprostoru $M^\perp$.

$$(1, 0, -1), (0, 1, 0)$$

b) (1 bod) Najdi ortogonální projektor na $M^\perp$.

$$M^\perp \text{ je přímka } \text{span}\{\mathbf{a}\} \text{ kde } \mathbf{a} = (1, 0, 1), \text{ projektor na } M^\perp \text{ je } \mathbf{P} = \frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{a}^T / (\mathbf{a}^T \mathbf{a}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) (1 bod) Najdi vzdálenost bodu $(-1, 1, 0)$ od množiny M .

Je to délka projekce bodu na podprostor $M^\perp$, tedy $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Máme funkci $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$.

a) (1 bod) Napiš funkci f ve tvaru $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Ax}$, kde matice $\mathbf{A}$ je symetrická. (Výsledek bude matice $\mathbf{A}$.)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

b) (1 bod) Najdi všechny extrémy funkce f na množině $\mathbb{R}^2$. U každého extrému určete typ (minimum, maximum).

K tomu stačí určit definitnost matice jakoukoliv metodou (nejjednodušší je z hlavních minorů nebo symetrickými elem. operacemi). Je indefinitní, tedy kvadr. forma extrém nemá.

4. Dáno je n bodů $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$, které tvoří sloupce matice $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3 \times n}$. Napiš postup, jak spočítat čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ taková, aby následující výraz byl minimální:

a) (1 bod) $\sum_{i=1}^n (ax_i + by_i + c - z_i)^2$

To je úloha na lin. regresi, potažmo lin. nejmenší čtverce. Vektor $(a, b, c) = \mathbf{x}$ je opt. řešením úlohy $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ & \ddots & \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \text{ a } \mathbf{b} = (z_1, \dots, z_n). \text{ Opt. } \mathbf{x} \text{ najdeme např. řešením lineární soustavy } \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

b) (1 bod) $\sum_{i=1}^n d_i^2$, kde d_i značí (kolmou) vzdálenost bodu (x_i, y_i, z_i) od přímky $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$.

To je úloha na PCA. Kýžený vektor (a, b, c) je vlastní vektor matice $\mathbf{XX}^T$ příslušný jejímu nejmenšímu vl. číslu.

1. Zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem $\mathbf{f}(x, y) = (x + y, -y, xy - 1)$
- (a) žádná z uvedených možností **Toto je správně, jelikož člen xy je nelineární.**
 - (b) je afinní
 - (c) je lineární
 - (d) není jednoznačně definované
 - fl (e) je isometrie
2. Máme matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Podprostor $(\text{null } \mathbf{A})^\perp$ je roven
- (a) $\text{span}\{(0, 1, 1), (1, -1, 0)\}$ **Toto je správně, protože $(\text{null } \mathbf{A})^\perp = \text{rng}(\mathbf{A}^T)$.**
 - (b) $\text{span}\{(0, 1), (1, -1), (1, 0)\}$
 - (c) $\{(0, 0, 0)\}$
 - (d) $\mathbb{R}^3$
 - ll (e) žádná z uvedených možností
3. Ortogonální projektor je vždy
- (a) symetrická pozitivně semidefinitní matice **Toto je správně, např. proto, že ort. projektor lze vždy napsat jako $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$, což je zjevně symetrická pos. semidefinitní matice.**
 - (b) čtvercová antisymetrická matice
 - (c) ortogonální matice
 - (d) čtvercová matice, která má vlastní čísla -1 a 1 a žádná jiná
 - ll (e) žádná z uvedených možností
4. Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ jsou takové, že úloha $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ má nekonečný počet optimálních řešení. Pak
- (a) $\text{null } \mathbf{A} \neq \{\mathbf{0}\}$ **Toto je správně. Opt. řešení jsou právě řešeními normální soustavy $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$. Protože ta má nekonečně mnoho řešení, musí být matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ (velikosti $n \times n$) singulární, tedy mít hodnotu méně než n . Dle Věty ze skript je $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$, tedy $\mathbf{A}$ má hodnotu méně než n , tedy lin. závislé sloupce, tedy netriviální nulový prostor.**
 - (b) existuje vektor $\mathbf{x}_0$ splňující $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$
 - (c) soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá řešení
 - (d) $m < n$
 - ll (e) žádná z uvedených možností
5. Nechť matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická. Pak
- (a) má reálná vlastní čísla **Správně, viz Věta s spektrálním rozkladu.**
 - (b) má nezáporná vlastní čísla
 - (c) má nenulová vlastní čísla
 - (d) má komplexní (ne nutně reálná) vlastní čísla, ale vždy po dvou komplexně sdružená
 - ll (e) žádná z uvedených možností
6. Nechť $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$, kde $\mathbf{A}$ je symetrická pozitivně semidefinitní matice, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ a $c < 0$. Pak funkce f má vždy
- (a) žádná z uvedených možností **Správně. Protože $\mathbf{A}$ je jen semidefinitní (tedy může být sinbulární), doplnění na čtverec nemusí být možné (ekvivalentně, funkce nemusí mít stacionární bod).**
 - (b) minimum v nějakém bodě $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (ale možná i v jiných bodech)
 - (c) maximum v nějakém bodě $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (ale možná i v jiných bodech)
 - (d) minimum v bodě $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (ale možná i v jiných bodech)
 - fl (e) maximum v bodě $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (ale možná i v jiných bodech)
7. Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$
- (a) má všechna vlastní čísla reálná nezáporná **Správně, protože $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ je symetrická pro libovolnou $\mathbf{A}$ a zbytek je Věta a spektrálním rozkladu.**
 - (b) je pozitivně definitní
 - (c) je ortogonální projektor
 - (d) má aspoň jedno nenulové vlastní číslo
 - ll (e) žádná z uvedených možností