

Úloha nejmenších čtverců

Petr Olšák
petr@olsak.net

<http://petr.olsak.net/>

Vlastnosti Gramovy matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$

Nejprve dokážeme tvrzení, které budeme potřebovat:

Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je libovolná matice. Pak

$$\text{Null } \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \text{Null } \mathbf{A}$$

$$\text{rng } \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \text{rng } \mathbf{A}^T$$

Vlastnosti Gramovy matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$

Nejprve dokážeme tvrzení, které budeme potřebovat:

Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je libovolná matice. Pak

$$\text{Null } \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \text{Null } \mathbf{A}$$

$$\text{rng } \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \text{rng } \mathbf{A}^T$$

Důsledek: $\mathbf{A}$ má LN sloupce, právě když $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ je regulární.

$\mathbf{A}$ má LN řádky, právě když $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ je regulární.

Soustavy nehomogenních rovnic $Ax = b$

Z hlediska množiny řešení rozlišujeme tři případy:

- Soustava nemá řešení:
nastane právě když $b \notin \text{rng } A$.
- Soustava má jediné řešení:
nastane právě když $b \in \text{rng } A$ a matice A má LN sloupce.
- Soustava má více řešení:
nastane právě když $b \in \text{rng } A$ a matice A má LZ sloupce.

Prvnímu případu říkáme **přeurčená soustava**, třetímu případu **nedourčená soustava**.

Úloha nejmenších čtverců najde „optimální řešení“ přeurčené soustavy.

Motivační příklad

Máme soustavu nehomogenních rovnic

$$x + 2y = 6$$

$$-x + y = 3$$

$$x + y = 4$$

Je to přeúčřená soustava, $\mathbf{b} \notin \text{rng } \mathbf{A}$, konkrétně $\text{rank } \mathbf{A} = 2$, $\text{rank}[\mathbf{A} \ \mathbf{b}] = 3$.

Motivační příklad

Máme soustavu nehomogenních rovnic

$$x + 2y = 6$$

$$-x + y = 3$$

$$x + y = 4$$

Je to přeurčená soustava, $\mathbf{b} \notin \text{rng } \mathbf{A}$, konkrétně $\text{rank } \mathbf{A} = 2$, $\text{rank}[\mathbf{A} \ \mathbf{b}] = 3$.

Například každý řádek soustavy vyjadřuje lineární závislost nějakých parametrů danou třeba z fyzikální podstaty měřeného jevu. Jednotlivým měřením získáme koeficienty jedné rovnice. Těch měření provedeme třeba desítky či stovky. Kvůli zaokrouhlovacím chybám a chybám měření skoro jistě budeme mít přeurčenou soustavu s úzkou maticí.

Úloha nejmenších čtverců

Hledá se $\mathbf{x}$ takové, že po dosazení do soustavy má vektor levých stran nejmenší vzdálenost od vektoru pravých stran. Tedy:

$$\min \{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \} \quad (1)$$

Mezinárodní název: *least squares method* (LS).

- Pozorování: Má-li soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ řešení, pak je také řešením optimalizační úlohy (1) (vzdálenost je nulová). Jinak optimalizační úloha nenajde skutečné řešení soustavy, ale vektor, který intuitivně nejlépe vyhovuje zadané soustavě.

Úloha nejmenších čtverců

Hledá se $\mathbf{x}$ takové, že po dosazení do soustavy má vektor levých stran nejmenší vzdálenost od vektoru pravých stran. Tedy:

$$\min \{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \} \quad (1)$$

Mezinárodní název: *least squares method* (LS).

- Pozorování: Má-li soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ řešení, pak je také řešením optimalizační úlohy (1) (vzdálenost je nulová). Jinak optimalizační úloha nenajde skutečné řešení soustavy, ale vektor, který intuitivně nejlépe vyhovuje zadané soustavě.
- Předchozí příklad zformulovaný jako úloha nejmenších čtverců:

$$\min (x + 2y - 6)^2 + (-x + y - 3)^2 + (x + y - 4)^2, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Řešení bychom mohli najít pomocí parciálních derivací.
Ale dnes na to půjdeme jinak...

Algebraické řešení úlohy LS

- $\min \| \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \|^2 = \min \| \mathbf{y} - \mathbf{b} \|^2, \mathbf{y} \in \text{rng} \mathbf{A}.$

Algebraické řešení úlohy LS

- $\min \| \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \|^2 = \min \| \mathbf{y} - \mathbf{b} \|^2, \mathbf{y} \in \text{rng} \mathbf{A}.$
- Geometricky: $\mathbf{y}$ musí být kolmý průmět vektoru $\mathbf{b}$ do podprostoru $\text{rng} \mathbf{A}.$

Algebraické řešení úlohy LS

- $\min \| \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \|^2 = \min \| \mathbf{y} - \mathbf{b} \|^2, \mathbf{y} \in \text{rng} \mathbf{A}.$
- Geometricky: $\mathbf{y}$ musí být kolmý průmět vektoru $\mathbf{b}$ do podprostoru $\text{rng} \mathbf{A}.$
- Fakt, že vektor $\mathbf{y} - \mathbf{b}$ (tj. vektor $\mathbf{Ax} - \mathbf{b}$) musí být kolmý na $\text{rng} \mathbf{A}$ vyjádříme skalárními součiny: $\mathbf{A}^T(\mathbf{y} - \mathbf{b}) = \mathbf{A}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$

Algebraické řešení úlohy LS

- $\min \| \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \|^2 = \min \| \mathbf{y} - \mathbf{b} \|^2, \mathbf{y} \in \text{rng} \mathbf{A}.$
- Geometricky: $\mathbf{y}$ musí být kolmý průmět vektoru $\mathbf{b}$ do podprostoru $\text{rng} \mathbf{A}.$
- Fakt, že vektor $\mathbf{y} - \mathbf{b}$ (tj. vektor $\mathbf{Ax} - \mathbf{b}$) musí být kolmý na $\text{rng} \mathbf{A}$ vyjádříme skalárními součiny: $\mathbf{A}^T(\mathbf{y} - \mathbf{b}) = \mathbf{A}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$
- To vede na **soustavu normálních rovnic** úlohy:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (2)$$

Algebraické řešení úlohy LS

- $\min \| \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \|^2 = \min \| \mathbf{y} - \mathbf{b} \|^2, \mathbf{y} \in \text{rng} \mathbf{A}.$
- Geometricky: $\mathbf{y}$ musí být kolmý průmět vektoru $\mathbf{b}$ do podprostoru $\text{rng} \mathbf{A}.$
- Fakt, že vektor $\mathbf{y} - \mathbf{b}$ (tj. vektor $\mathbf{Ax} - \mathbf{b}$) musí být kolmý na $\text{rng} \mathbf{A}$ vyjádříme skalárními součiny: $\mathbf{A}^T(\mathbf{y} - \mathbf{b}) = \mathbf{A}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$
- To vede na **soustavu normálních rovnic** úlohy:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (2)$$

- Soustava (2) má vždy řešení díky tvrzení ze slide 2.
- Řešení soustavy (2) je řešením optimalizační úlohy LS (1).
- Má-li $\mathbf{A}$ LZ sloupce, má úloha (1) i úloha (2) více řešení.

Úloha s maticí s LN sloupci

- Gramova matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je v takovém případě regulární.

Úloha s maticí s LN sloupci

- Gramova matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ je v takovém případě regulární.
- Soustavu normálních rovnic lze vyřešit násobením inverzní maticí zleva:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

- Takto spočítaný vektor $\mathbf{x}$ je tedy řešením úlohy LS (1).

Úloha s maticí s LN sloupci

- Gramova matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ je v takovém případě regulární.
- Soustavu normálních rovnic lze vyřešit násobením inverzní maticí zleva:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

- Takto spočítaný vektor $\mathbf{x}$ je tedy řešením úlohy LS (1).
- Matici $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ nazýváme **levou pseudoinvertí** k matici $\mathbf{A}$ (značíme ji $\mathbf{A}^+$). Je to jedna z levých inverzí matice $\mathbf{A}$, protože:

$$\mathbf{A}^+ \mathbf{A} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Úloha s maticí s LN sloupci

- Gramova matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ je v takovém případě regulární.
- Soustavu normálních rovnic lze vyřešit násobením inverzní maticí zleva:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

- Takto spočítaný vektor $\mathbf{x}$ je tedy řešením úlohy LS (1).
- Matici $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ nazýváme **levou pseudoinverzí** k matici $\mathbf{A}$ (značíme ji $\mathbf{A}^+$). Je to jedna z levých inverzí matice $\mathbf{A}$, protože:

$$\mathbf{A}^+ \mathbf{A} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

- Pro srovnání: Má-li matice $\mathbf{A}$ LN řádky, definujeme **pravou pseudoinverzi** k matici $\mathbf{A}$ jako $\mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$ (značíme ji taky $\mathbf{A}^+$). Platí totiž:

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{I}$$

Úloha s maticí s LN sloupci

- Gramova matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ je v takovém případě regulární.
- Soustavu normálních rovnic lze vyřešit násobením inverzní maticí zleva:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

- Takto spočítaný vektor $\mathbf{x}$ je tedy řešením úlohy LS (1).
- Matici $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ nazýváme **levou pseudoinverzí** k matici $\mathbf{A}$ (značíme ji $\mathbf{A}^+$). Je to jedna z levých inverzí matice $\mathbf{A}$, protože:

$$\mathbf{A}^+ \mathbf{A} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

- Pro srovnání: Má-li matice $\mathbf{A}$ LN řádky, definujeme **pravou pseudoinverzi** k matici $\mathbf{A}$ jako $\mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$ (značíme ji taky $\mathbf{A}^+$). Platí totiž:

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{I}$$

- Úloha $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má optimální řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$.
- Poznámka: existuje definice pseudoinverze k libovolné matici, ale tomu se zatím vyhneme.

Řešení úlohy QR rozkladem

- Protože výpočet $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ a následně $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$ může být drahý a může značně snížit přesnost, je řešení úlohy nejmenších čtverců postaveno na QR rozkladu matice $\mathbf{A}$.
- Předpokládejme $\mathbf{A}$ s LN sloupci. Pak úlohu LS (1) řešíme použitím redukovaného rozkladu matice $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ takto:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

$$(\mathbf{QR})^T\mathbf{QR}\mathbf{x} = (\mathbf{QR})^T\mathbf{b}$$

$$\mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{QR}\mathbf{x} = \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$$

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$$

- Úlohu tedy vyřešíme z rovnice $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ zpětným dosazením.
- Obdobně pracuje algoritmus $\mathbf{A} \setminus \mathbf{b}$.

Ortogonalní projektor podruhé

- Z minula víme, že ortogonalní projektor na $\text{rng } \mathbf{U}$ je matice $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$, má-li matice $\mathbf{U}$ ortonormální sloupce.
- Nyní předpokládejme podprostor zadáný jako $\text{rng } \mathbf{A}$, kde $\mathbf{A}$ má LN sloupce, ale ne nutně ortonormální.
- Nechť $\mathbf{x}$ je řešení úlohy LS (1), pak $\mathbf{Ax}$ je kolmá projekce vektoru $\mathbf{b}$ na $\text{rng } \mathbf{A}$. Konkrétně pro $\mathbf{A}$ s LN sloupci:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{AA}^+ \mathbf{b} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{Pb}$$

- Je tedy $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ ortogonalní projektor na $\text{rng } \mathbf{A}$.
- V případě $\mathbf{A} = \mathbf{U}$ matice s ortonormálními sloupci tento obecnější vzorec pro $\mathbf{P}$ přechází na $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$.

Úloha nejm. čtverců s maticí s LZ sloupci

- Soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nemá žádné nebo má více řešení.
- Soustava normálních rovnic $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ má více řešení.
- Najdeme jedno partikulární řešení soustavy normálních rovnic a přidáme k němu podprostor $\text{Null } \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \text{Null } \mathbf{A}$.
- K nalezení partikulárního řešení potřebujeme umět řešit nedourčené nehomogenní soustavy...

Nedourčená soustava $Ax = b$ s LN řádky

- Předpokládáme $\mathbf{b} \in \text{rng } \mathbf{A}$ a $\mathbf{A}$ má LN řádky, soustava má tedy řešení.
- **Úloha:** Mezi řešeními najdeme řešení $\mathbf{x}$ s nejmenší normou.

Nedourčená soustava $Ax = b$ s LN řádky

- Předpokládáme $\mathbf{b} \in \text{rng } \mathbf{A}$ a $\mathbf{A}$ má LN řádky, soustava má tedy řešení.
- **Úloha:** Mezi řešeními najdeme řešení $\mathbf{x}$ s nejmenší normou.
- Musí být splněno $\mathbf{x} \perp \text{Null } \mathbf{A}$ (přednášející načrtne obrázek).

Nedourčená soustava $Ax = b$ s LN řádky

- Předpokládáme $b \in \text{rng } A$ a A má LN řádky, soustava má tedy řešení.
- **Úloha:** Mezi řešeními najdeme řešení x s nejmenší normou.
- Musí být splněno $x \perp \text{Null } A$ (přednášející načrtne obrázek).
- Když $x \perp \text{Null } A$, pak je $x \in \text{rng } A^T$, neboli existuje y tak, že $x = A^T y$.

Nedourčená soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s LN řádky

- Předpokládáme $\mathbf{b} \in \text{rng } \mathbf{A}$ a $\mathbf{A}$ má LN řádky, soustava má tedy řešení.
- **Úloha:** Mezi řešeními najdeme řešení $\mathbf{x}$ s nejmenší normou.
- Musí být splněno $\mathbf{x} \perp \text{Null } \mathbf{A}$ (přednášející načrtne obrázek).
- Když $\mathbf{x} \perp \text{Null } \mathbf{A}$, pak je $\mathbf{x} \in \text{rng } \mathbf{A}^T$, neboli existuje $\mathbf{y}$ tak, že $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$.
- Dosazením do rovnice $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ máme $\mathbf{AA}^T \mathbf{y} = \mathbf{b}$.

Nedourčená soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s LN řádky

- Předpokládáme $\mathbf{b} \in \text{rng } \mathbf{A}$ a $\mathbf{A}$ má LN řádky, soustava má tedy řešení.
- **Úloha:** Mezi řešeními najdeme řešení $\mathbf{x}$ s nejmenší normou.
- Musí být splněno $\mathbf{x} \perp \text{Null } \mathbf{A}$ (přednášející načrtne obrázek).
- Když $\mathbf{x} \perp \text{Null } \mathbf{A}$, pak je $\mathbf{x} \in \text{rng } \mathbf{A}^T$, neboli existuje $\mathbf{y}$ tak, že $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$.
- Dosazením do rovnice $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ máme $\mathbf{AA}^T \mathbf{y} = \mathbf{b}$.
- Protože $\mathbf{A}$ má LN řádky, je $\mathbf{AA}^T$ regulární.
- Vyřešíme: $\mathbf{y} = (\mathbf{AA}^T)^{-1} \mathbf{b}$ tj. $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T (\mathbf{AA}^T)^{-1} \mathbf{b}$. Takže $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$.
- Tentokrát je $\mathbf{A}^+$ pravá pseuoinverze.

Nedourčená soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s LN řádky

- Předpokládáme $\mathbf{b} \in \text{rng } \mathbf{A}$ a $\mathbf{A}$ má LN řádky, soustava má tedy řešení.
- **Úloha:** Mezi řešeními najdeme řešení $\mathbf{x}$ s nejmenší normou.
- Musí být splněno $\mathbf{x} \perp \text{Null } \mathbf{A}$ (přednášející načrtne obrázek).
- Když $\mathbf{x} \perp \text{Null } \mathbf{A}$, pak je $\mathbf{x} \in \text{rng } \mathbf{A}^T$, neboli existuje $\mathbf{y}$ tak, že $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$.
- Dosazením do rovnice $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ máme $\mathbf{AA}^T \mathbf{y} = \mathbf{b}$.
- Protože $\mathbf{A}$ má LN řádky, je $\mathbf{AA}^T$ regulární.
- Vyřešíme: $\mathbf{y} = (\mathbf{AA}^T)^{-1} \mathbf{b}$ tj. $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T (\mathbf{AA}^T)^{-1} \mathbf{b}$. Takže $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$.
- Tentokrát je $\mathbf{A}^+$ pravá pseudoinverze.
- $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$ je tedy řešení optimalizační úlohy

$$\min \{ \|\mathbf{x}\|^2; \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \}.$$

Sjednocující formulace pro řešení $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

- Lze zformulovat jedinou úlohu, která najde v případě soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:
 - řešení s nejmenší normou, má-li soustava více řešení,
 - řešení, má-li soustava jediné řešení,
 - optimální řešení ve smyslu nejmenších čtverců, nemá-li soustava řešení; je-li takových optimálních řešení více, najde úloha mezi nimi optimální řešení s nejmenší normou.

Taková sjednocující optimalizační úloha zní:

$$\min \{ \|\mathbf{x}\|^2; \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \}.$$

Vícekriteriální nejmenší čtverce

Myšlenka na tomto slide se opírá o následující jednoduché tvrzení:

- Je-li $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, pak $\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n}$ a platí:

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \right\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2.$$

- Nechť $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $\mu_i > 0$. Úloha

$$\min \{ \mu_1 \|\mathbf{A}_1 \mathbf{x} - \mathbf{b}_1\|^2 + \dots + \mu_k \|\mathbf{A}_k \mathbf{x} - \mathbf{b}_k\|^2, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$$

je vícekriteriální úloha minimalizace nejmenších čtverců a lze ji převést na standardní úlohu $\min \{ \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu_1} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \sqrt{\mu_k} \mathbf{A}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu_1} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \sqrt{\mu_k} \mathbf{b}_k \end{bmatrix}.$$

Soustava normálních rovnic pro tuto úlohu zní:

$$(\mu_1 \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 + \dots + \mu_k \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k) \mathbf{x} = \mu_1 \mathbf{A}_1^T \mathbf{b}_1 + \dots + \mu_k \mathbf{A}_k^T \mathbf{b}_k.$$

Příklad dvou-kriteriální úlohy

Chceme najít řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ve smyslu nejmenších čtverců, ale rádi bychom s určitou vahou přihlédli také k požadavku, aby norma řešení byla pokud možno malá.

- Pro zadanou váhu $\mu > 0$ hledáme

$$\min \{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 + \mu \|\mathbf{x}\|^2; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}.$$

Toto lze převést na jedinou úlohu nejmenších čtverců

$\min \{ \|\mathbf{Bx} - \mathbf{c}\|^2; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$, kde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \sqrt{\mu} \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

se soustavou normálních rovnic $(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mu \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$. Matice této soustavy je regulární, takže máme řešení

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mu \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$