

Optimalizace

11. Dualita v lineárním programování

Tomáš Werner, Tomáš Kroupa

FEL ČVUT

Motivace

$$\min \quad 2x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Pro libovolné $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ zřejmě platí (porovnáním kriteria a prvního omezení)

$$2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$$

neboť $2 \leq 2$, $5 \leq 1$, $6 \leq 2$. Tedy 3 je dolní mez na optimální hodnotu.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Pro libovolné $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ zřejmě platí (porovnáním kriteria a prvního omezení)

$$2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$$

neboť $2 \leq 2$, $5 \leq 1$, $6 \leq 2$. Tedy 3 je dolní mez na optimální hodnotu.

- Použitím nezáporné kombinace prvního a třetího omezení

$$0.5 \cdot (2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3) + 1 \cdot (x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3) = (2x_1 + 3.5x_2 + 2x_3 \geq 4.5)$$

dostaneme lepší (= větší) dolní mez

$$2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq 2x_1 + 3.5x_2 + 2x_3 \geq 4.5$$

$$\min \quad 2x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$\max \quad 3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

$$y_3 \geq 0$$

$$y_4 \geq 0$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 2$$

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5$$

$$2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 6$$

- Pro libovolné $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ zřejmě platí (porovnáním kritéria a prvního omezení)

$$2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$$

neboť $2 \leq 2$, $5 \leq 1$, $6 \leq 2$. Tedy 3 je dolní mez na optimální hodnotu.

- Použitím nezáporné kombinace prvního a třetího omezení

$$0.5 \cdot (2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3) + 1 \cdot (x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3) = (2x_1 + 3.5x_2 + 2x_3 \geq 4.5)$$

dostaneme lepší (= větší) dolní mez

$$2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq 2x_1 + 3.5x_2 + 2x_3 \geq 4.5$$

Věty o dualitě

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}\end{array}$$

Věty o dualitě

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}\end{array}$$

Věta (o slabé dualitě)

Pro každá přípustná $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$.

Důkaz: Pro přípustná $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ zřejmě platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{Ax} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{b}$.

Věty o dualitě

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}\end{array}$$

Věta (o slabé dualitě)

Pro každá přípustná $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$.

Důkaz: Pro přípustná $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ zřejmě platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{Ax} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{b}$.

Věta (o komplementaritě)

Nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou přípustná. Pak $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ právě když

$$\begin{array}{lll}\sum_j a_{ij} x_j = b_i & \text{nebo} & y_i = 0 & \forall i \\ x_j = 0 & \text{nebo} & \sum_i a_{ij} y_j = c_j & \forall j\end{array}$$

Důkaz: Podmínky komplementarity jdou napsat jako $\mathbf{y}^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0 = (\mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T \mathbf{A}) \mathbf{x}$.

Věta pak plyne z $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{Ax} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{b}$.

Věty o dualitě

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

Věta (o slabé dualitě)

Pro každá přípustná $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$.

Důkaz: Pro přípustná $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ zřejmě platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{Ax} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{b}$.

Věta (o komplementaritě)

Nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou přípustná. Pak $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ právě když

$$\begin{array}{lll} \sum_j a_{ij} x_j = b_i & \text{nebo} & y_i = 0 \quad \forall i \\ x_j = 0 & \text{nebo} & \sum_i a_{ij} y_j = c_j \quad \forall j \end{array}$$

Důkaz: Podmínky komplementarity jdou napsat jako $\mathbf{y}^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0 = (\mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T \mathbf{A})\mathbf{x}$.

Věta pak plyne z $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{Ax} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{b}$.

Věta (o silné dualitě)

Primární úloha má optimální řešení, právě když duální úloha má optimální řešení.

Pokud $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou optimální řešení, pak $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$.

Důkaz neuvádíme, vychází z **Farkasova lematu**.

Illustrate slabé duality

$$\begin{aligned}\min \quad & 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \\ 5 = \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ 4 = \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 5 = \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3 \\ -1 = \quad & -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1 \\ 2 = \quad & x_1 \geq 0 \\ 1 = \quad & x_2 \geq 0 \\ 0 = \quad & x_3 \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\max \quad & 3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 = 4.5 \\ 0.5 = \quad & y_1 \geq 0 \\ 0 = \quad & y_2 \geq 0 \\ 1 = \quad & y_3 \geq 0 \\ 0 = \quad & y_4 \geq 0 \\ 2 = \quad & 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 2 \\ 3.5 = \quad & y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5 \\ 3 = \quad & 2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 6\end{aligned}$$

Illustrate complementarity

min	$2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 5.4$	max	$3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 = 5.4$
3 =	$2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$	0.2 =	$y_1 \geq 0$
2.4 =	$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1$	0 =	$y_2 \geq 0$
3 =	$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$	1.6 =	$y_3 \geq 0$
-0.6 =	$-x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1$	0 =	$y_4 \geq 0$
1.2 =	$x_1 \geq 0$	2 =	$2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 2$
0.6 =	$x_2 \geq 0$	5 =	$y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5$
0 =	$x_3 \geq 0$	3 =	$2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 6$

Dovolené možnosti řešitelnosti primární a duální úlohy

primár/duál	má optimum	neomezená	nepřípustná
má optimum	✓	×	×
neomezená	×	×	✓
nepřípustná	×	✓	✓

- Tvrzení v prvním sloupci a prvním řádku plynou ze silné duality
- Zbylá tvrzení plynou ze slabé duality

Citlivost na změnu omezení (stínové ceny)

Definujme funkci

$$f(\mathbf{b}) = \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \max\{\mathbf{b}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

Věta (o stínových cenách)

Nechť má duální úloha pro nějaké $\mathbf{b}$ právě jedno optimální řešení $\mathbf{y}^*$.

Pak je funkce f na nějakém okolí bodu $\mathbf{b}$ diferencovatelná a platí $\nabla f(\mathbf{b}) = \mathbf{y}^*$.

Citlivost na změnu omezení (stínové ceny)

Definujme funkci

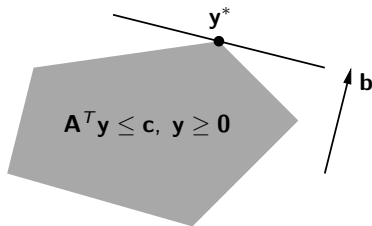
$$f(\mathbf{b}) = \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \max\{\mathbf{b}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

Věta (o stínových cenách)

Nechť má duální úloha pro nějaké $\mathbf{b}$ právě jedno optimální řešení $\mathbf{y}^*$.

Pak je funkce f na nějakém okolí bodu $\mathbf{b}$ diferencovatelná a platí $\nabla f(\mathbf{b}) = \mathbf{y}^*$.

Důkaz: Duál nabývá optima v jediném extrémálním bodě $\mathbf{y}^*$ přípustného mnohostěnu duálu:



Změníme-li nepatrně $\mathbf{b}$, optimální duální řešení se nezmění a zůstane jediné.

Tedy na nějakém okolí bodu $\mathbf{b}$ je $f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$ a tedy $\nabla f(\mathbf{b}) = \mathbf{y}^*$.

Příklad

$$\min \quad 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 5.4$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$\max \quad 3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 = 5.4$$

$$0.2 = y_1 \geq 0$$

$$0 = y_2 \geq 0$$

$$1.6 = y_3 \geq 0$$

$$0 = y_4 \geq 0$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 2$$

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5$$

$$2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 6$$

$$f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = (3, 1, 3, -1)^T (0.2, 0, 1.6, 0) = 5.4$$

Příklad

$$\min \quad 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 5.402$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3.01$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$\max \quad 3.01y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 = 5.402$$

$$0.2 = y_1 \geq 0$$

$$0 = y_2 \geq 0$$

$$1.6 = y_3 \geq 0$$

$$0 = y_4 \geq 0$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 2$$

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5$$

$$2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 6$$

$$f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = (3.01, 1, 3, -1)^T (0.2, 0, 1.6, 0) = 5.402$$

Duální úloha pro LP v rovnicovém tvaru

Tvrzení: Tyto dvě úlohy jsou navzájem duální:

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}\end{array}$$

Duální úloha pro LP v rovnícovém tvaru

Tvrzení: Tyto dvě úlohy jsou navzájem duální:

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}\end{array}$$

Důkaz: Přepíšme úlohy jako

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \text{za podm.} & -\mathbf{Ax} \geq -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{b}^T (\mathbf{y}_+ - \mathbf{y}_-) \\ \text{za podm.} & \mathbf{y}_+ \geq \mathbf{0} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y}_- \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T (\mathbf{y}_+ - \mathbf{y}_-) \leq \mathbf{c}\end{array}$$

Duální úloha pro LP v rovnícovém tvaru

Tvrzení: Tyto dvě úlohy jsou navzájem duální:

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}\end{array}$$

Důkaz: Přepíšme úlohy jako

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \text{za podm.} & -\mathbf{Ax} \geq -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{b}^T (\mathbf{y}_+ - \mathbf{y}_-) \\ \text{za podm.} & \mathbf{y}_+ \geq \mathbf{0} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y}_- \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T (\mathbf{y}_+ - \mathbf{y}_-) \leq \mathbf{c}\end{array}$$

neboli

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{bmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & \begin{bmatrix} \mathbf{b}^T & -\mathbf{b}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_+ \\ \mathbf{y}_- \end{bmatrix} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y}_+, \mathbf{y}_- \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_+ \\ \mathbf{y}_- \end{bmatrix} \leq \mathbf{c}\end{array}$$

O této dvojici víme, že je navzájem duální.

Duální úloha pro LP v obecném tvaru

$\min$	$\sum_{j \in J} c_j x_j$	$\max$	$\sum_{i \in I} y_i b_i$	
za podm.	$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i$	za podm.	$y_i \in \mathbb{R}$	$\forall i \in I_0$
	$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i$	$y_i \geq 0$		$\forall i \in I_+$
	$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i$	$y_i \leq 0$		$\forall i \in I_-$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$\sum_{i \in I} y_i a_{ij} = c_j$		$\forall j \in J_0$
	$x_j \geq 0$	$\sum_{i \in I} y_i a_{ij} \leq c_j$		$\forall j \in J_+$
	$x_j \leq 0$	$\sum_{i \in I} y_i a_{ij} \geq c_j$		$\forall j \in J_-$

kde

$$I = \{1, \dots, m\} = I_0 \cup I_+ \cup I_-$$

$$J = \{1, \dots, n\} = J_0 \cup J_+ \cup J_-$$

Příklad:

$$\begin{array}{ll}\min & 2x_1 \quad \quad - 3x_3 + x_4 \\ \text{za podm.} & 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R} \\ & x_3 \geq 0 \\ & x_4 \leq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & 6y_1 + 5y_2 \\ \text{za podm.} & y_1 \in \mathbb{R} \\ & y_2 \leq 0 \\ & y_3 \geq 0 \\ & 2y_1 - y_2 + y_3 \leq 2 \\ & -y_1 + 2y_2 - y_3 = 0 \\ & y_1 - 3y_2 - y_3 \leq -3 \\ & 2y_1 \quad \quad - 3y_3 \geq 1\end{array}$$

Duální řešení jako certifikát optimality

Vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou optimální pro úlohy

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

právě tehdy, když splňují soustavu

$$\begin{array}{l} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

Tedy přípustné duální řešení $\mathbf{y}$ splňující $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ je důkaz (**certifikát**) toho, že přípustné primární řešení $\mathbf{x}$ je optimální.

Příklady na LP dualitu

Jak byste spočítali minimum z daných čísel?

$$\begin{array}{ll}\min & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{za podm.} & x_1 + \cdots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & y \\ \text{za podm.} & y \in \mathbb{R} \\ & y \leq c_i \quad \forall i\end{array}$$

neboli

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & y \\ \text{za podm.} & y \in \mathbb{R} \\ & y\mathbf{1} \leq \mathbf{c}\end{array}$$

Jak byste spočítali minimum z daných čísel?

$$\begin{array}{ll}\min & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{za podm.} & x_1 + \cdots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & y \\ \text{za podm.} & y \in \mathbb{R} \\ & y \leq c_i \quad \forall i\end{array}$$

neboli

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & y \\ \text{za podm.} & y \in \mathbb{R} \\ & y\mathbf{1} \leq \mathbf{c}\end{array}$$

- silná dualita: optimální hodnota primáru i duálu je očividně rovna $\min\{c_1, \dots, c_n\}$

Jak byste spočítali minimum z daných čísel?

$$\begin{array}{ll}\min & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{za podm.} & x_1 + \cdots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & y \\ \text{za podm.} & y \in \mathbb{R} \\ & y \leq c_i \quad \forall i\end{array}$$

neboli

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & y \\ \text{za podm.} & y \in \mathbb{R} \\ & y\mathbf{1} \leq \mathbf{c}\end{array}$$

- silná dualita: optimální hodnota primáru i duálu je očividně rovna $\min\{c_1, \dots, c_n\}$
- slabá dualita: $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \geq \min\{c_1, \dots, c_n\} \geq y$

Jak byste spočítali minimum z daných čísel?

$$\begin{array}{ll}\min & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{za podm.} & x_1 + \cdots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & y \\ \text{za podm.} & y \in \mathbb{R} \\ & y \leq c_i \quad \forall i\end{array}$$

neboli

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & y \\ \text{za podm.} & y \in \mathbb{R} \\ & y\mathbf{1} \leq \mathbf{c}\end{array}$$

- silná dualita: optimální hodnota primáru i duálu je očividně rovna $\min\{c_1, \dots, c_n\}$
- slabá dualita: $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \geq \min\{c_1, \dots, c_n\} \geq y$
- komplementarita: optimální $\mathbf{x}, y$ splňují

$$(x_i = 0) \vee (y = c_i) \quad \forall i$$

Ekonomická interpretace duality

Výroba lupínků a hranolků z brambor a oleje:

$$\begin{array}{ll}\max & 120l + 76h \\ \text{za podm.} & 2l + 1.5h \leq 100 \\ & 0.4l + 0.2h \leq 16 \\ & l \geq 0 \\ & h \geq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\min & 100a + 16b \\ \text{za podm.} & a \geq 0 \\ & b \geq 0 \\ & 2a + 0.4b \geq 120 \\ & 1.5a + 0.2b \geq 76\end{array}$$

Ekonomická interpretace duality

Výroba lupínků a hranolků z brambor a oleje:

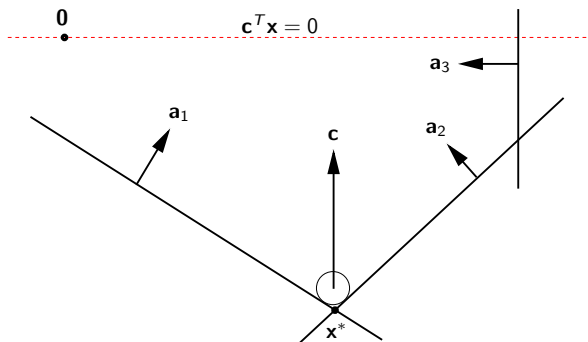
$$\begin{array}{ll}\max & 120l + 76h \\ \text{za podm.} & 2l + 1.5h \leq 100 \\ & 0.4l + 0.2h \leq 16 \\ & l \geq 0 \\ & h \geq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\min & 100a + 16b \\ \text{za podm.} & a \geq 0 \\ & b \geq 0 \\ & 2a + 0.4b \geq 120 \\ & 1.5a + 0.2b \geq 76\end{array}$$

Význam duální úlohy:

- a, b jsou jednotkové ceny surovin (brambor a oleje)
- Překupník: Jaké nejnižší ceny mohu nabídnout, aby mi výrobce prodal své zásoby surovin?
- Optimální duální řešení je $a = 32$ a $b = 140$ (stínové ceny surovin).

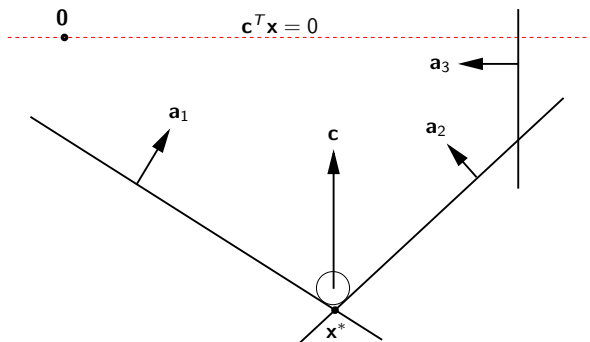
Míček v mnohostěnu



$$\min\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$$

- Míček v poloze $\mathbf{x}$ je uvnitř mnohostěnu: $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$
- Potenciální energie $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ je minimální pro $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ (primární optimum)

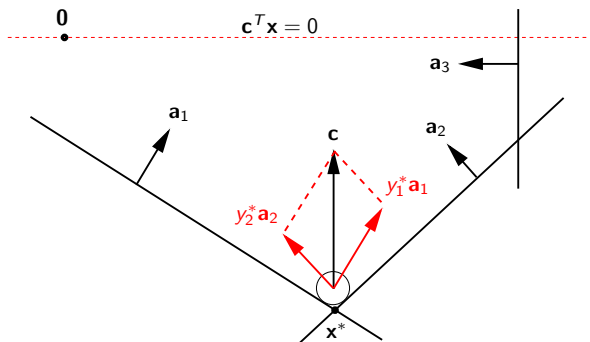
Míček v mnohostěnu



$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \max\{\mathbf{b}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

- Míček v poloze $\mathbf{x}$ je uvnitř mnohostěnu: $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$
- Potenciální energie $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ je minimální pro $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ (primární optimum)

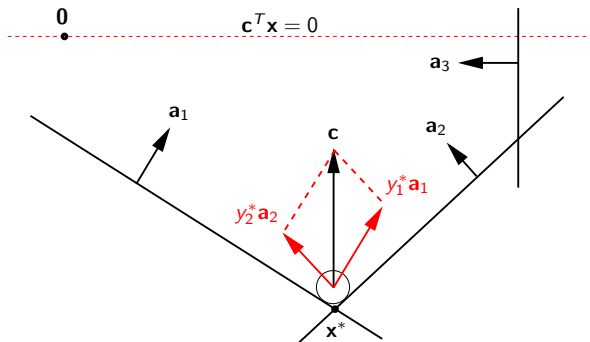
Míček v mnohostěnu



$$\min\{c^T x \mid Ax \geq b, x \in \mathbb{R}^n\} = \max\{b^T y \mid A^T y = c, y \geq 0\}$$

- Míček v poloze x je uvnitř mnohostěnu: $Ax \geq b$
- Potenciální energie $c^T x$ je minimální pro $x = x^*$ (primární optimum)
- Rovnováha sil na míček (míček se nehýbe): $c = \sum_i y_i^* a_i = A^T y^*$

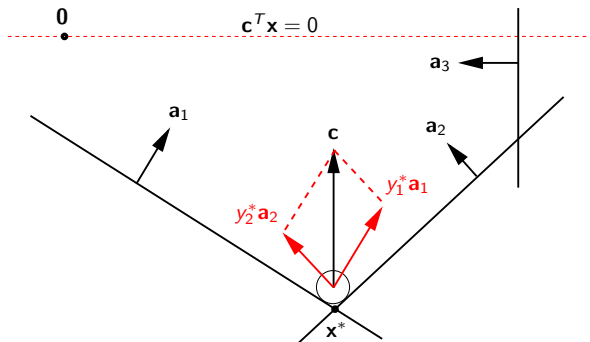
Míček v mnohostěnu



$$\min\{c^T x \mid Ax \geq b, x \in \mathbb{R}^n\} = \max\{b^T y \mid A^T y = c, y \geq 0\}$$

- Míček v poloze x je uvnitř mnohostěnu: $Ax \geq b$
- Potenciální energie $c^T x$ je minimální pro $x = x^*$ (primární optimum)
- Rovnováha sil na míček (míček se nehýbe): $c = \sum_i y_i^* a_i = A^T y^*$
- Síly stěn působí dovnitř mnohostěnu: $y_i^* \geq 0$

Míček v mnohostěnu



$$\min\{c^T x \mid Ax \geq b, x \in \mathbb{R}^n\} = \max\{b^T y \mid A^T y = c, y \geq 0\}$$

- Míček v poloze x je uvnitř mnohostěnu: $Ax \geq b$
- Potenciální energie $c^T x$ je minimální pro $x = x^*$ (primární optimum)
- Rovnováha sil na míček (míček se nehýbe): $c = \sum_i y_i^* a_i = A^T y^*$
- Síly stěn působí dovnitř mnohostěnu: $y_i^* \geq 0$
- Když $a_i^T x^* > b_i$ (míček se stěny i nedotýká), síla stěny na míček je $y_i^* = 0$.
Proto $y_i^* (a_i^T x^* - b_i) = 0$ (komplementarita).

Dopravní úloha

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{za podm.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j \\ & x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \\ \text{za podm.} \quad & u_i \in \mathbb{R} \\ & v_j \in \mathbb{R} \\ & u_i + v_j \leq c_{ij} \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

