

Optimalizace

10. Konvexní množiny a mnohostěny

Tomáš Werner, Tomáš Kroupa

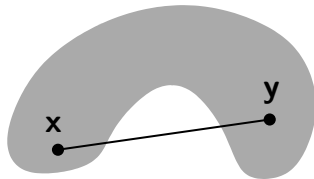
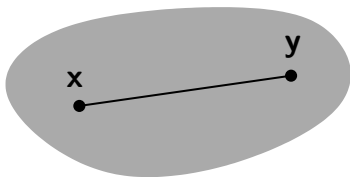
5. prosince 2025

FEL ČVUT

Konvexní množiny

Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je **konvexní**, jestliže

$$\mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in X, 0 \leq \alpha \leq 1 \implies (1 - \alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \in X.$$



- **Konvexní kombinace** bodů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je bod $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{x}_k$, kde

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0.$$

Tvrzení: Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, právě když je uzavřená na konvexní kombinace.

- **Konvexní obal** bodů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ je množina všech jejich konvexních kombinací:

$$\text{conv}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} = \{ \alpha_1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{x}_k \mid \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1, \alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0 \}.$$

Obecněji: **konvexní obal množiny** $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je průnik všech konvexních množin, které množinu X obsahují. Značíme $\text{conv } X$.

Příbuzné kombinace, obaly a množiny

Lineární kombinace $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k$ vektorů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ se nazývá jejich

afinní kombinace, jestliže $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$.

nezáporná kombinace, jestliže $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$.

konvexní kombinace, jestliže $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$.

Množina, která je uzavřená na

lineární kombinace, se nazývá **lineární podprostor**.

afinní kombinace, se nazývá **afinní podprostor**.

nezáporné kombinace, se nazývá **konvexní kužel**.

konvexné kombinace, se nazývá **konvexní množina**.

Některé operace zachovávající konvexitu množin

- **Průnik.** Průnik konvexních množin je konvexní množina.
- **Afinní zobrazení.** Necht' $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je afinní zobrazení, tj.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}.$$

Jestliže $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, pak

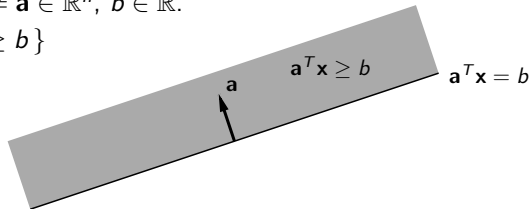
$$\mathbf{f}(X) = \{ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X \}$$

je také konvexní množina.

Důkazy obou tvrzení jsou snadné.

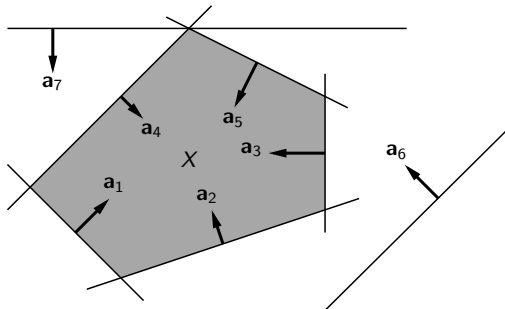
Konvexní mnohostěny

- **Nadrovina** je množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$, kde $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.
- (Uzavřený) **poloprostor** je množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b\}$



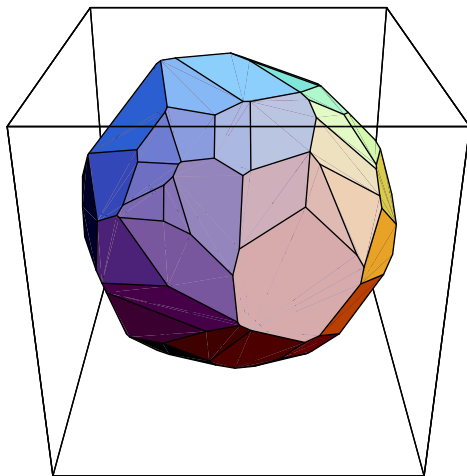
- **Konvexní mnohostěn** je průnik konečně mnoha poloprostorů:
$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$$

Dimenze mnohostěnu: $\dim X = \dim \text{aff } X$



Náhodný omezený konvexní mnohostěn v $\mathbb{R}^3$:

(From Wolfram Mathworld)



Příklady jednoduchých konvexních mnohostěnů v $\mathbb{R}^n$:

- $\emptyset, \mathbb{R}^n$
- **afinní podprostor** (bod, přímka, rovina, nadrovina, ...)
- **polopřímka** $\{ \mathbf{x} + \alpha \mathbf{v} \mid \alpha \geq 0 \}$
- **poloprostor** $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b \}$
- **hyperkrychle** $[a, b]^n = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x_i \leq b \ \forall i \}$
- **hyperkvádr (box)** $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \ \forall i \}$
- **simplex**: konvexní obal afinně nezávislé množiny bodů
 - **standardní (= pravděpodobnostní) simplex** $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \}$
- **křížový polytop (cross-polytope)** $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \} = \text{conv}(\{-1, +1\}^n)$
- **polyhedrální konvexní kužel**: je zároveň konvexní kužel a konvexní mnohostěn
 - **nezáporný kužel** $\mathbb{R}_+^n$ (kde $\mathbb{R}_+$ je množina nezáporných reálných čísel)
- **panel (slab)** $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid b_1 \leq \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b_2 \}$

Příklad konvexní množiny, která není mnohostěn: **koule** $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1 \}$

- průnik **nekonečně** mnoha poloprostorů: $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq 1 \ \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n: \mathbf{a}^T \mathbf{a} = 1 \}$

Extremální body

Definice: Bod $\mathbf{x} \in X$ je **extremální bod** konvexní množiny X , jestliže

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, \mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \implies \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$$

Věta (Krein-Milman)

Každá uzavřená omezená konvexní množina je konvexním obalem svých extrémálních bodů.

Lze zobecnit na neomezené konvexní množiny přidáním '**extremálních směrů**'.

Tvrzení: Každý konvexní mnohostěn má konečně mnoho extrémálních bodů (dokážeme za chvíli).

Dvě možné reprezentace (omezeného) konvexního mnohostěnu:

- **H-representace:** průnik konečně mnoha poloprostorů
- **V-representace:** konvexní obal konečně mnoha bodů (někdy se nazývá **polytop**)

Charakterizace extrémálních bodů mnohostěnu

Konvexní mnohostěn

$$X = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b} \}$$

- $I(\mathbf{x}) = \{ i \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i \} \subseteq \{1, \dots, m\}$ označuje množinu indexů nerovností aktivních v bodě $\mathbf{x}$.
- Pro $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ označme jako $\mathbf{A}_I$ řádky matice $\mathbf{A}$ s indexy I . Podobně pro $\mathbf{b}_I$.

Věta

Bod $\mathbf{x} \in X$ je extrémální bod mnohostěnu X , právě když matice $\mathbf{A}_{I(\mathbf{x})}$ má lin. nezávislé sloupce (tj. soustava $\mathbf{A}_{I(\mathbf{x})} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{I(\mathbf{x})}$ má jediné řešení).

Důkaz je technický, viz skripta.

Příklad: $X = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 1 \}$, tedy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Bod $\mathbf{x} = (2, 0) \in X$ není extrémální:
 $I(\mathbf{x}) = \{2\}$, soustava $\mathbf{A}_{I(\mathbf{x})} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{I(\mathbf{x})}$ zní $x_2 = 0$, má nekonečně mnoho řešení $\{ (x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R} \}$.
- Bod $\mathbf{x} = (1, 0) \in X$ je extrémální:
 $I(\mathbf{x}) = \{2, 3\}$, soustava $\mathbf{A}_{I(\mathbf{x})} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{I(\mathbf{x})}$ zní $x_2 = 0, x_1 + x_2 = 1$, má jediné řešení $(1, 0)$.

Nalezení všech extrémálních bodů mnohostěnu

Z Věty plyne **algoritmus**: Pro každou neprázdnou $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ otestuj:

- Má soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ právě jedno řešení?
- Splňuje toto řešení $\mathbf{x}$ soustavu $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$?

Pokud oboje platí, pak $\mathbf{x}$ je extrémální bod.

Příklad (poračování): Zkoumejme neprázdné podmnožiny $I \subseteq \{1, 2, 3\}$:

- $I = \{1\}$ a $I = \{2\}$: soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má nekonečně mnoho řešení.
- $I = \{1, 2\}$: soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má jediné řešení $\mathbf{x} = (0, 0)$, které nesplňuje $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$.
- $I = \{1, 3\}$: soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má jediné řešení $\mathbf{x} = (0, 1)$, které splňuje $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$.
- $I = \{2, 3\}$: soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má jediné řešení $\mathbf{x} = (1, 0)$, které splňuje $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$.
- $I = \{1, 2, 3\}$: soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ nemá řešení.

Závěr: Mnohostěn má dva extrémální body $(0, 1)$ a $(1, 0)$.

Minimum lineární funkce na mnohostěnu

Věta

Neprázdný konvexní mnohostěn má (aspoň jeden) extrémální bod, právě když neobsahuje přímku.

Důkaz je technický, viz skripta.

Příklady mnohostěnu obsahujících přímku: poloprostor, afinní podprostor, panel $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid b \leq \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq c \}$

Věta

Nechť konvexní mnohostěn X neobsahuje přímku. Nechť lineární funkce f nabývá na X minima. Potom existuje (aspoň jeden) extrémální bod X , v němž f nabývá na X minima.

Důkaz je technický, viz skripta.

Řešení LP 'hrubou silou': projdi všechny extrémální body X a vyber ten s nejmenší hodnotou f .

Potíž: Extrémálních bodů může být příliš mnoho.

Simplexový algoritmus (George Dantzig, 1947):

- Uvažuje LP ve tvaru $\min\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$
- Začne z nějakého extrémálního bodu mnohostěnu.
- V každé iteraci přejde (po hraně) k jinému extrémálnímu bodu s lepší (nebo stejnou) hodnotou f .