

Optimalizace

6. Nelineární funkce a zobrazení

Tomáš Werner, Tomáš Kroupa

11. listopadu 2025

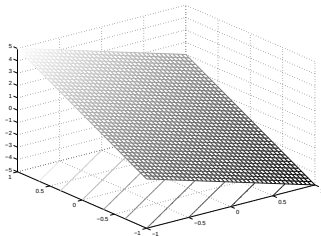
FEL ČVUT

Příklady funkcí $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

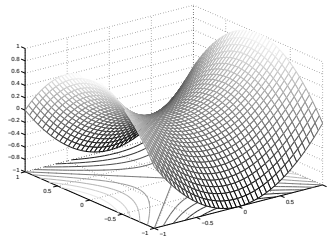
- $f(x_1, x_2) = 3x_1 - x_1^3 - 3x_1x_2^2$
- $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}^T \mathbf{x} + b) / \|\mathbf{x}\|$
- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$
- skalární pole $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Zopakujme:

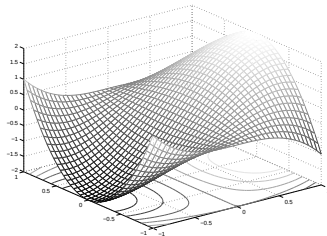
- **Graf** funkce f je množina $\{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, f(\mathbf{x}) = y\}$.
- **Vrstevnice** funkce f výšky y je množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = y\}$.



$$f(x_1, x_2) = -2x_1 + 3x_2$$



$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

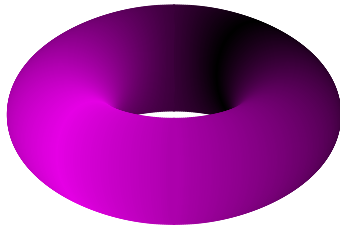


$$f(x_1, x_2) = 3x_1 - x_1^3 - 3x_1x_2^2$$

Příklady zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

- $f(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$
- $f(t) = (\cos t, \sin t)$
- $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$
- poloha objektu (částice, auta, letadla, ...) jako funkce času

- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$
- vektorové pole $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
- $f(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v)$

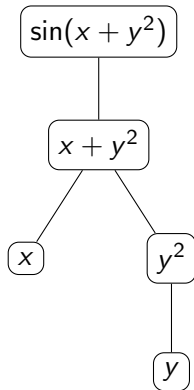


Spojitosť

Zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **spojité** v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, jestliže $\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})$.

Tvrzení (postačující podmínka pro spojitost)

Spojitosť se zachovává sčítáním, odčítáním, násobením, dělením a skládáním funkcí.

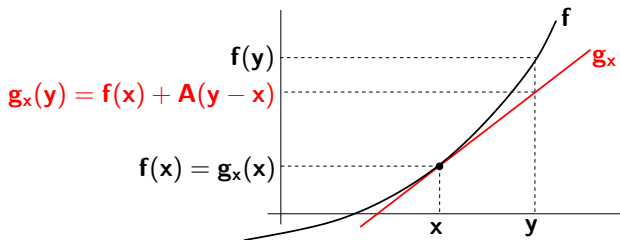


Derivace

Derivace zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Intuice: Zobrazení f je v bodě $x \in \mathbb{R}^n$ **diferencovatelné**, jestliže je v okolí bodu x podobné nějakému afinnímu zobrazení $g_x(y) = f(x) + A(y - x)$.

Matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se nazývá (totální) **derivace** zobr. f v bodě x , píšeme $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = A$.



Přesná definice:

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - g_x(y)}{\|x - y\|} = 0.$$

Tvrzení: Pro $m = n = 1$ je tato definice ekvivalentní obvyklé definici derivace.

Tvrzení

Je-li $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelné, pak existují všechny parciální derivace $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ a

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Této matici se říká **Jacobiho matice** zobrazení $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$.

Speciální případy:

- Pro $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je $f'(x)$ skalár.

- Pro $\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ je $\mathbf{f}'(x) = \begin{bmatrix} f'_1(x) \\ \vdots \\ f'_m(x) \end{bmatrix}$ sloupcový vektor.

- Pro $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je $f'(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right]$ řádkový vektor.

Postačující podmínka pro diferencovatelnost

Věta

Jestliže v bodě $\mathbf{x}$ existují všechny parciální derivace $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ a funkce $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ jsou v bodě $\mathbf{x}$ spojité, pak je $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelné.

Příklad: Parciální derivace funkce $f(x, y) = \sin(x + y^2)$ existují v každém bodě a jsou rovny

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \cos(x + y^2)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y \cos(x + y^2)$$

Obě tyto funkce jsou spojité v každém bodě.

Věta (řetízkové pravidlo)

Pro diferencovatelná zobrazení $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^\ell$ platí

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))}{d\mathbf{x}} = (\mathbf{g}' \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \mathbf{f}'(\mathbf{x}).$$

V Leibnizově značení: Je-li $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{u})$ a $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, pak

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}}$$

Přirozeně se zobecní pro složení více zobrazení.

Pravidla pro derivování maticových výrazů, jejichž **výsledek je opět maticový výraz**.

Příklad: Najděte derivaci kvadratické formy (**A** nemusí být symetrická)

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

Parciální derivace podle k -té proměnné je

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n (a_{ki} + a_{ik}) x_i = \mathbf{x}^T (\mathbf{a}_k + \mathbf{a}^k)$$

kde $\mathbf{a}_k^T$ značí k -tý řádek a $\mathbf{a}^k$ značí k -tý sloupec matice **A**.

Tedy

$$f'(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right] = \mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$$

Derivace některých zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$f(x)$	$f'(x)$
x	I
$Ax + b$	A
$Ag(x) + b$	$Ag'(x)$
$g(Ax + b)$	$g'(Ax + b)A$

$f(\mathbf{x})$	$f'(\mathbf{x})$
$\mathbf{a}^T \mathbf{x} + b$	$\mathbf{a}^T$
$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \ \mathbf{x}\ ^2$	$2\mathbf{x}^T$
$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$	$\mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$
$\ \mathbf{x}\ $	$\mathbf{x}^T / \ \mathbf{x}\ $
$\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \ \mathbf{g}(\mathbf{x})\ ^2$	$2\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}'(\mathbf{x})$
$\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$	$\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{h}'(\mathbf{x}) + \mathbf{h}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}'(\mathbf{x})$

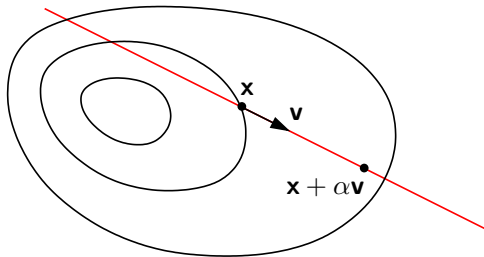
Derivace funkce $f: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ (nepovinné)

Derivaci funkce $f: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je přirozené definovat jako matici

$$f'(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_{1n}} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_{mn}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

protože pro $n = 1$ je to Jacobiho matice zobrazení $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ (tj. řádkový vektor).

$f(\mathbf{X})$	$f'(\mathbf{X})$	poznámka
$\text{tr } \mathbf{X} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{X} \rangle$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{X}$ čtvercová
$\text{tr}(\mathbf{AXB})$	$\mathbf{BA}$	
$\ \mathbf{X}\ ^2 = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})$	$2\mathbf{X}^T$	
$\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{AX}) = \langle \mathbf{X}, \mathbf{AX} \rangle$	$\mathbf{X}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$	
$\text{tr}(\mathbf{X}^k)$	$k\mathbf{X}^{k-1}$	k celé nenulové, pro $k < 0$ je $\mathbf{X}$ regulární
$\det \mathbf{X}$	$(\det \mathbf{X})\mathbf{X}^{-1}$	$\mathbf{X}$ regulární
$\ln \det \mathbf{X}$	$\mathbf{X}^{-1}$	$\mathbf{X}$ pozitivně definitní



Řez zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ve směru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je zobrazení $\varphi(\alpha) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v})$.

Směrová derivace zobrazení $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$ ve směru $\mathbf{v}$ je

$$\mathbf{f}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \varphi'_+(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(0)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\alpha}$$

Věta

Je-li zobrazení $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$ (totálně) diferencovatelné, pak $\mathbf{f}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{v}$.

Důkaz: Zobrazení $\varphi(\alpha) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v})$ je složením zobrazení $\mathbf{f}$ a zobrazení $g(\alpha) = \mathbf{x} + \alpha\mathbf{v}$.

Věta pak plyne z řetízkového pravidla.

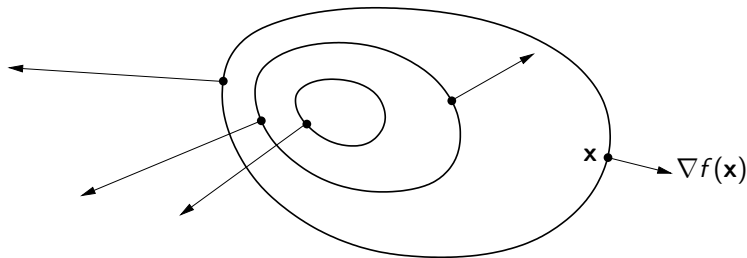
Gradient

Gradient funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je sloupcový vektor

$$\nabla f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Zkoumejme směrovou derivaci $f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{v}$ ve směrech $\|\mathbf{v}\| = 1$:

- Je maximální ve směru $\mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$.
- Je nulová ve směru $\mathbf{v}$ ortogonálním na $\nabla f(\mathbf{x})$.



Věta

Nechť $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Jestliže druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}$$

v bodě $\mathbf{x}$ existují a jsou v bodě $\mathbf{x}$ spojité, potom jsou si rovny.

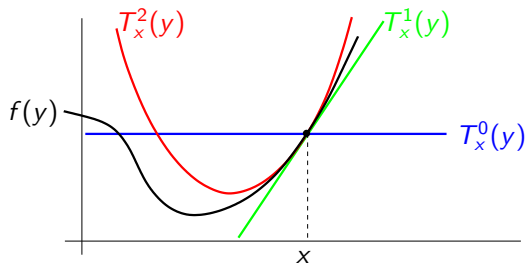
Druhá derivace funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x}$ (**Hessova matice**):

$$f''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Taylorův polynom

Taylorův polynom funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stupně k v bodě $\mathbf{x}$ je polynom $T_{\mathbf{x}}^k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stupně k , který má v bodě $\mathbf{x}$ parciální derivace řádu $0, 1, \dots, k$ stejné jako f .

Příklad pro $n = 1$:



Taylorovy polomy funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x}$ do stupně dva:

$$T_{\mathbf{x}}^0(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})$$

$$T_{\mathbf{x}}^1(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

$$T_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T f''(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

Lokální extrémy

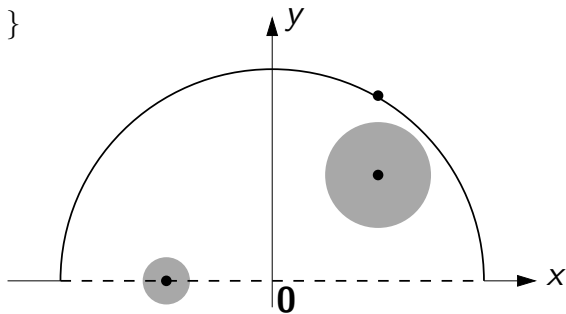
Vnitřní a hraniční body podmnožiny $\mathbb{R}^n$

Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\epsilon > 0$ označme $B_\epsilon(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \epsilon \}$.

Mějme množinu $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se nazývá její

- **vnitřní bod**, jestliže $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq X$ pro nějaké $\epsilon > 0$,
- **hraniční bod**, jestliže $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap X \neq \emptyset$ a $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$ pro všechna $\epsilon > 0$.

Příklad: $X = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y > 0 \}$



Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá

- **otevřená**, jestliže každý její bod je vnitřní,
- **uzavřená**, jestliže obsahuje každý svůj hraniční bod

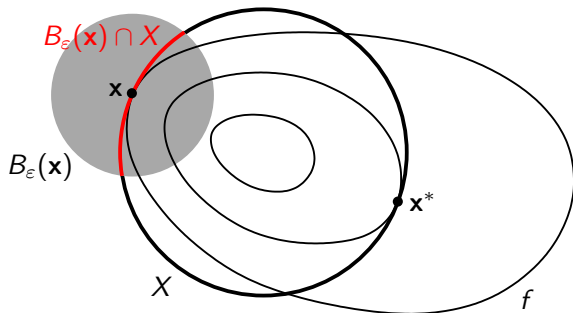
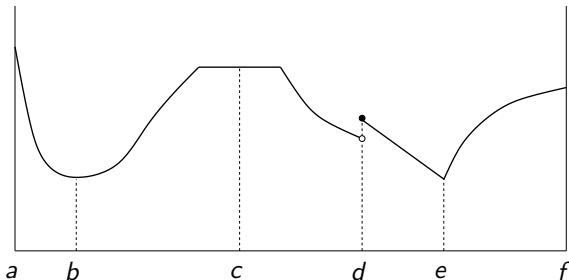
Globální a lokální extrémy funkce na množině

Říkáme, že funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nabývá na množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$ v bodě $\mathbf{x} \in X$

- **(globálního) minima**, jestliže $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}')$ pro všechna $\mathbf{x}' \in X$,
- **lokálního minima**, jestliže existuje $\epsilon > 0$ takové, že funkce f nabývá v bodě $\mathbf{x}$ (globálního) minima na množině $X \cap B_\epsilon(\mathbf{x})$.

Příklady:

$X \subseteq \mathbb{R}$ je interval $[a, f]$



Volné a vázané extrémy

(Globální, lokální) minimum $\mathbf{x}$ funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá

- **volné**, pokud $\mathbf{x}$ je vnitřním bodem množiny X ,
- **vázané**, pokud $\mathbf{x}$ je hraničním bodem množiny X .

Tvrzení

Nechť $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť $\mathbf{x}$ je vnitřní bod množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Následující výroky jsou ekvivalentní:

- $\mathbf{x}$ je lokální minimum funkce f na množině X .
- $\mathbf{x}$ je lokální minimum funkce f na množině $\mathbb{R}^n$.

Důkaz je snadný, viz skripta.

