

Optimalizace

4. Kvadratické formy a funkce

Tomáš Werner, Tomáš Kroupa

17. října 2025

FEL ČVUT

Polynomy více proměnných

- **Monom** proměnných $x_1, \dots, x_n$ je součin $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ kde exponenty k_i jsou celé nezáporné.
Stupeň monomu je číslo $k_1 + \dots + k_n$.
- **Polynom** n proměnných je lineární kombinace monomů.
Stupeň polynomu je stupeň jeho monomu s nejvyšším stupněm.
- Polynom je **homogenní**, jestliže má stupně všech monomů shodné.

Příklady:

- $f(x, y, z) = xy^2 - 5x^3 + 2xyz$ je homogenní polynom tří proměnných stupně 3
- $f(x, y) = x^3y^2 - y^2 + 2xy - 7$ je nehomogenní polynom dvou proměnných stupně 5

Ekvivalentní názvy v lineární algebře (pro funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$):

- homogenní polynom stupně 1 = lineární forma = lineární funkce
- nehomogenní polynom stupně 1 = afinní funkce
- homogenní polynom stupně 2 = kvadratická forma
- nehomogenní polynom stupně 2 = kvadratická funkce

Kvadratické formy

Kvadratická forma

Kvadratická forma (tj. homogenní polynom druhého stupně) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

Příklad: $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Tvrzení

Pro každou kvadratickou formu f existuje **symetrická** matice $\mathbf{A}$ tak, že $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$.
Matice $\mathbf{A}$ je formou f určena jednoznačně.

Důkaz: S každým členem $a_{ij}x_i x_j$ je v sumě také člen $a_{ji}x_j x_i$. Jejich součet $(a_{ij} + a_{ji})x_i x_j$ závisí jen na $a_{ij} + a_{ji}$.
Tedy můžeme zvolit $a_{ij} = a_{ji}$.

Jiný důkaz: Každá čtvercová matice $\mathbf{A}$ se dá psát jako $\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}_{\text{symetrická}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)}_{\text{antisymetrická}}.$

Ale $\mathbf{x}^T (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \underbrace{\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x}}_{= (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}} = 0.$

Definitnost kvadratické formy / její matice

Kvadratická forma f je

- **pozitivně semidefinitní**, když $f(\mathbf{x}) \geq 0$ pro každé $\mathbf{x}$
- **negativně semidefinitní**, když $f(\mathbf{x}) \leq 0$ pro každé $\mathbf{x}$
- **pozitivně definitní**, když $f(\mathbf{x}) > 0$ pro každé $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **negativně definitní**, když $f(\mathbf{x}) < 0$ pro každé $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **indefinitní**, když $f(\mathbf{x}) > 0$ a $f(\mathbf{y}) < 0$ pro nějaká $\mathbf{x}, \mathbf{y}$

Definitností čtvercové matice $\mathbf{A}$ rozumíme definitnost kvadr. formy $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$.

Všimněte si:

- Matice může mít i více těchto vlastností najednou.
- $\mathbf{A}$ je negativně [semi]definitní, právě když $-\mathbf{A}$ je pozitivně [semi]definitní.
- Matice je indefinitní, právě když není ani pozitivně ani negativně semidefinitní.

Částečné uspořádání indukované pozitivní semidefinitností

Na množině $\mathbb{R}^{n \times n}$ zavedeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$\mathbf{A} \preceq \mathbf{B} \iff \mathbf{B} - \mathbf{A} \text{ je pozitivně semidefinitní}$$

Tvrzení

Relace $\preceq$ je částečné uspořádání (tedy reflexivní, transitivní a antisymetrická).

- Speciálně: $\mathbf{A} \succeq \mathbf{0}$ značí, že $\mathbf{A}$ je pozitivně semidefinitní.
- $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou neporovnatelné (tj. neplatí $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$ ani $\mathbf{B} \preceq \mathbf{A}$), právě když $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ je indefinitní.

Pro $n = 1$ dostaneme obyčejné uspořádání $\leq$ na množině reálných čísel.

Tvrzení

Nechť $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ je kvadratická forma.

- Je-li f **pozitivně semidefinitní**, pak má v bodě **0** **minimum** (tj. je zdola omezená nulou).
- Je-li f **negativně semidefinitní**, pak má v bodě **0** **maximum** (tj. je shora omezená nulou).
- Je-li f **pozitivně definitní**, pak má v bodě **0** **ostré minimum**.
- Je-li f **negativně definitní**, pak má v bodě **0** **ostré maximum**.
- Je-li f **indefinitní**, pak **nemá minimum ani maximum** (tj. je neomezená shora i zdola).

Je-li f pozitivně semidefinitní ale ne pozitivně definitní, pak má minimum i jinde než v bodě **0**.
(Podobně pro negativně semidefinitní.)

Definitnost z hlavních minorů

Motivace: nutné podmínky

Tvrzení

Determinant symetrické pozitivně [semi]definitní matice je kladný [nezáporný].

Důkaz neuvádíme.

Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a neprázdnou množinu $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ označme $\mathbf{A}_I = [a_{ij}]_{i,j \in I}$ (tj. $\mathbf{A}_I$ získáme z $\mathbf{A}$ vyškrtnutím řádků a sloupců s indexy $i \notin I$).

Tvrzení

Je-li $\mathbf{A}$ pozitivně [semi]definitní, pak $\mathbf{A}_I$ je také pozitivně [semi]definitní.

Důkaz: Zvolme $\mathbf{x}$ takové, že $x_i = 0$ pro $i \notin I$. Pak $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}_I^T \mathbf{A}_I \mathbf{x}_I$ kde $\mathbf{x}_I = (x_i)_{i \in I}$.

Důsledek: Je-li $\mathbf{A}$ pozitivně [semi]definitní, pak $\det \mathbf{A}_I$ je kladný [nezáporný] pro každou I .

Charakterizace pozitivně (semi)definitních matic

Názvosloví:

- Číslo $\det \mathbf{A}_I$ pro nějakou $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ se nazývá **hlavní minor** matice $\mathbf{A}$.
- **Vůdčí hlavní minor** je hlavní minor pro $I = \{1, \dots, k\}$ a nějaké $k \leq n$.

Věta

Symetrická matice je

- **pozitivně semidefinitní**, právě když všechny její hlavní minory jsou **nezáporné**.
- **pozitivně definitní**, právě když všechny její **vůdčí** hlavní minory jsou **kladné**

Částečný důkaz na minulém slajdu. Důkaz zbytku neuvádíme.

První podmínka nepraktická, protože hlavních minorů je $2^n - 1$.

Druhá podmínka je známa jako **Sylvestrovo pravidlo**.

Diagonalizace kvadratické formy

Kongruentní matice

Matice **B** se nazývá **kongruentní** matici **A**, jestliže $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$ pro nějakou regulární **C**.

Tvrzení

Kongruentní matice mají stejnou definitnost.

Důkaz. Pro každou funkci $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a regulární **C** platí

$$[\forall \mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \geq 0] \iff [\forall \mathbf{x} : f(\mathbf{C}\mathbf{x}) \geq 0].$$

Pro $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ je

$$f(\mathbf{C}\mathbf{x}) = (\mathbf{C}\mathbf{x})^T \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{x}.$$

Podobně pro negativní [semi]definitnost a indefinitnost.

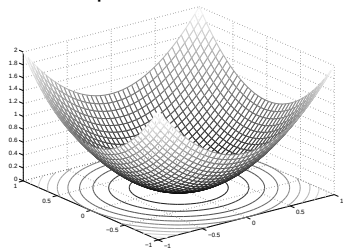
Definitnost diagonální matice

Je-li $\mathbf{A}$ diagonální, pak

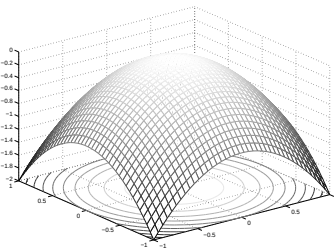
$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

Definitnost diagonální matice okamžitě vidíme ze **znamének diagonálních prvků**.

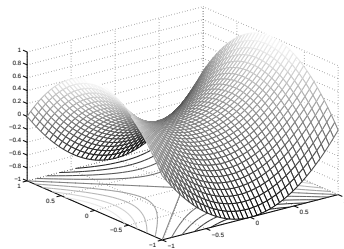
Příklad pro $n = 2$:



$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
(pozitivně definitní)



$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$
(negativně definitní)



$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$
(indefinitní)

Diagonalizace matice kvadratické formy

Věta

Každá symetrická matice je kongruentní nějaké diagonální matici.

Tedy pro každou symetrickou $\mathbf{A}$ existuje regulární $\mathbf{C}$ tak, že $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$ je diagonální.

Uvedeme dvě metody:

- diagonalizace pomocí **symetrických elementárních operací** (rychlá)
- **spektrální rozklad** (pomalý, ale $\mathbf{C}$ je ortogonální)

Diagonalizace symetrickými elementárními úpravami

Elementární řádkové úpravy

Z Gaussovy(-Jordanovy) eliminace známe elementární řádkové úpravy.

Každá úprava je násobení **zleva** nějakou regulární maticí (tzv. **elementární maticí**) $\mathbf{E}^T$.

1. prohod' dva řádky

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_3^T \\ \mathbf{a}_2^T \end{bmatrix}$$

2. vynásob řádek nenulovým skalárem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \alpha \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix}$$

3. přičti násobek jednoho řádku k jinému řádku

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \alpha \mathbf{a}_1^T + \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix}$$

Symetrické elementární úpravy

Uděláme-li stejnou elementární úpravu na řádcích i sloupcích **symetrické** matice **A**, dostaneme matici $\mathbf{E}^T \mathbf{A} \mathbf{E}$, která je **symetrická** a **kongruentní** matici **A**.

Posloupnost elem. úprav na matici **A**:

$$\mathbf{B} = \underbrace{\mathbf{E}_k^T \dots \mathbf{E}_2^T \mathbf{E}_1^T}_{\mathbf{C}^T} \mathbf{A} \underbrace{\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k}_{\mathbf{C}}$$

Matice **B** je kongruentní matici **A**.

Posloupnost zvolíme tak, aby **B** byla diagonální.

Základní algoritmus (používá jen elem. úpravu 3):

Postupně pro $i = 1, \dots, n - 1$ vynuluj prvky pod prvkem a_{ii} (**pivot**) a vpravo od něj.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{řad}_i} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{slo}_i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{řad}_i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{21}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{slo}_i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{5} \end{bmatrix}$$

Co když je pivot nulový?

Základní algoritmus předpokládá, že všechny pivoty jsou nenulové.

To je zaručeno jen pro pozitivně či negativně definitní matice. Jinak:

- Když potkáme nulový pivot (tj. $a_{ij} = 0$), prohodíme řádky+sloupce.

Např. zde prohodíme 2. a 4. řádek+sloupec:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{řad.}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{slo.}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Když pro nějaké i máme $a_{ij} = 0$ pro všechna $j \geq i$, tak matice buď je již diagonální nebo je indefinitní (protože nesplňuje $\det \mathbf{A}_l \geq 0$ pro $l = \{i, j\}$).

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Choleského a LDL rozklad

Na symetrické Gaussově eliminaci jsou založené numerické algoritmy:

- LDL rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T$
kde $\mathbf{A}$ je pos/neg. semidefinitní, $\mathbf{L}$ (permutovaná) dolní trojúhelníková a $\mathbf{D}$ diagonální.
- Choleského rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{LL}^T$
kde $\mathbf{A}$ je pos. semidefinitní.

Viz funkce `ldl` a `chol` v Matlabu!

Spektrální rozklad

Vlastní čísla a vektory

Když pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ platí

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

pak λ se nazývá **vlastní číslo** matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{v}$ **vlastní vektor** příslušný λ .

Interpretace: $\mathbf{v}$ je vektor, který lineární zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ zobrazí na rovnoběžný vektor.

- Přepíšeme jako $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

To má netriviální řešení právě když $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

- Tedy vlastní čísla jsou právě kořeny **charakteristického polynomu**

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda).$$

Je to polynom stupně n , tedy $\mathbf{A}$ má n vlastních čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, počítaje násobnost.

Vlastní vektory příslušné λ pak tvoří (kromě počátku) množinu $\text{null}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, **vlastní podprostor** příslušný λ .

Příklad pro $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Dva reálné kořeny $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = -2$, každý s násobností 1.

Vlastní vektory příslušné λ_1 jsou (nenulovými) řešeními homogenní lineární soustavy

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Vlastní podprostor příslušný λ_1 je přímka $\text{null}(\mathbf{A} + \lambda_1 \mathbf{I}) = \text{span}\{(-1, 1)\}$.

Maticový tvar

Soustavu rovnic

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

lze napsat maticově jako

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}$$

kde

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n], \quad \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

V Matlabu: `[V,D]=eig(A)` (kde D označuje $\mathbf{\Lambda}$)

Spektrální rozklad symetrické matice

Věta (spektrální věta)

Pro každou symetrickou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (tedy $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$) platí:

- Všechna její vlastní čísla jsou reálná.
- Existuje množina n jejích vlastních vektorů, které jsou po dvojicích ortogonální.

Důsledek (spektrální rozklad symetrické matice)

Každou symetrickou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lze rozložit jako

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T$$

kde $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ortogonální.

Důkaz: V rovnici $\mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}$ lze zvolit matici $\mathbf{V}$ ortogonální, tedy $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$, tedy $\mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T$.

Úmluva: Diagonální prvky matice $\mathbf{\Lambda}$ budeme řadit **sestupně**: $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

(Matlab je bohužel řadí vzestupně)

Vztah ke kongruenci a diagonalizaci

Matice $\mathbf{A}$ je kongruentní diagonální matici $\mathbf{\Lambda}$:

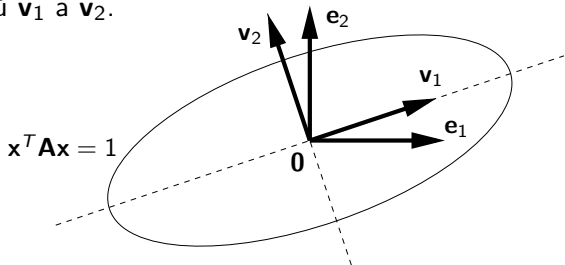
$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = g(\mathbf{y})$$

Změna souřadnic $\mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{y}$ (tj. $\mathbf{y} = \mathbf{V}^T \mathbf{x}$) je nejen bijekce, ale dokonce isometrie.

Definitnost matice $\mathbf{A}$ ihned vidíme ze **znamének vlastních čísel**.

Příklad pro $n = 2$:

- Isometrie $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]$ určuje natočení vrstevnic kvadr. formy f (kuželoseček). Ty mají hlavní osy ve směru vlastních vektorů $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$.
- Vlastní čísla λ_1, λ_2 určují typ kuželosečky.



Kvadratické funkce

Kvadratická funkce

Kvadratická funkce je polynom $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ druhého stupně, tj.

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$$

pro nějaké $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$.

Příklad pro $n = 2$:

$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 2y + 3 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 3$$

Doplnění kvadratické funkce na čtverec

Hledejme $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a $y_0 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + y_0 \\&= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}_0^T \mathbf{A} \mathbf{x}_0 + y_0 \\&= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \underbrace{\mathbf{x}_0^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}_{\mathbf{b}^T} \mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{x}_0^T \mathbf{A} \mathbf{x}_0 + y_0}_c\end{aligned}$$

Aby to platilo, koeficienty u stejných monomů se musí rovnat:

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= -(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x}_0 \\c &= \mathbf{x}_0^T \mathbf{A} \mathbf{x}_0 + y_0\end{aligned}\tag{*}$$

- Rovnice (*) je vlastně stacionární podmínka $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
- Doplnění na čtverec je možné, právě když rovnice (*) má řešení (tj. f má aspoň jeden stacionární bod).
- Nová funkce je kvadratická forma s počátkem posunutým do bodu $(\mathbf{x}_0, y_0)$. Z ní umíme zjistit, zda f má extrém a jaký.

Příklad: Tato kvadr. funkce doplnit na čtverec jde:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 2x^2 - 2xy + y^2 - 2y + 3 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 3 \\&= \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{bmatrix} + 1 \\&= 2(x - 1)^2 - 2(x - 1)(y - 2) + (y - 2)^2 + 1\end{aligned}$$

tedy $\mathbf{x}_0 = (1, 2)$, $y_0 = 1$.

Příklad: A tato nejde:

$$f(x, y) = x^2 + y = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Soustava $\mathbf{b} = -(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\mathbf{x}_0$, tj.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

nemá řešení.

Množina

$$\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0 \}$$

kořenů (= vrstevnice výšky 0) kvadratické funkce se nazývá **kvadrika**.

Některé speciální případy:

- **kuželosečka**: kvadrika pro $n = 2$
- **elipsoid**: $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní

Elipsoid se středem v počátku: $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 1 \}$