

Příkladová dávka č. 1

(k řešení mezi 24.9. – 8.10.)

Tato dávka příkladů uvádí studenta do matematického aparátu nutného k popisu elektromagnetického pole. K vyřešení není nutné programování.

Úloha 1 (nebodovaná)

Prostudujte si kapitolu č. 1 z [1] a ideálně i kapitolu č. 1 z [2].

(a) Věnujte pozornost zápisu vektorových diferenciálních operací pomocí ∇ (nazývaného „del“ či „nabla“) operátoru.

(b) Věnujte pozornost fyzikálnímu významu gradientu ∇f , divergence $\nabla \cdot \mathbf{F}$ a rotace $\nabla \times \mathbf{F}$, viz kapitola č. 1.2 v [1]. *Pozn.: V anglické literatuře se operace rotace někdy uvádí jako „curl“.*

(c) Prostudujte si matematické identity uvedené v dokumentu [“Mathematical identities”](#) na webových stránkách předmětu. Uvědomte si, že identity typu (16), (17) platí univerzálně, bez ohledu na použitou souřadnou soustavu.

Úloha 2 (1 bod)

Uvažujte vektorové pole

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x + 3y + az) \mathbf{x}_0 + (bx - 2y - z) \mathbf{y}_0 + (7x + cy + z) \mathbf{z}_0. \quad (1)$$

Zvolte konstanty a, b, c tak, aby pole bylo konzervativní, tedy, aby mělo nulovou rotaci. Určete dále funkci $\phi(\mathbf{r})$ tak, aby $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r})$. Po správném určení konstant nakonec spočítejte divergenci tohoto pole.

Výsledek: $a = 7, b = 3, c = -1, \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}x^2 - y^2 + \frac{1}{2}z^2 + 3xy + 7xz - yz + C$$

Pozn.: Jelikož $\nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0}$ pro libovolnou funkci ϕ a jelikož $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, musí být výše požadované přiřazení $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r})$ proveditelné.

Úloha 3 (1 bod)

S použitím vektorových identit ukažte, že pokud $\mathbf{A}(\mathbf{r}), \mathbf{B}(\mathbf{r})$ definují konzervativní pole s nulovou rotací, pak vektorový součin $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$ naopak představuje pole s nulovou divergencí.

Pozn.: Takto je např. popsáno magnetické pole pomocí Biot-Savartova zákona.

Úloha 4 (1 bod)

Výhradně s použitím identit (16) a (24) z dokumentu “[Mathematical identities](#)” ukažte, že platí

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{R}_0}{R^n} \right) = \frac{2-n}{R^{n+1}}; \mathbf{r} \neq \mathbf{r}', \quad (2)$$

a

$$\nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{R} \right) = 0; \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'. \quad (3)$$

V žádném místě odvození nepoužívejte skutečné souřadnice, vše vyřešte pouze nad radius vektory.

Pozn.: Operátor $\nabla \cdot \nabla ()$, slovně divergence gradientu, je ve fyzice natolik používaný, že má i vlastní symbol ∇^2 nebo Δ a říká se mu Laplaceův operátor nebo Laplacián.

Pozn.: Matematické identity (2) a (3) mají v elektromagnetismu enormní význam. Vztah (2) pro $n = 2$ vede na Gaussovu větu elektrostatiky. Vztah (3) vede na řešení Laplaceovy rovnice v elektrostatice.

Literatura

- [1] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, 2017.
- [2] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press, 2012.