

BIPARTITNÍ PÁROVÁNÍ

Petr Ryšavý

15. září 2025

Katedra počítačů, FEL, ČVUT

ÚVOD

Rumpelstiltskin principle (něm. Rumpelstilzchen)



Credits: Patrick Winston (MIT), Zdeněk Hanzálek,

<https://www.pohadky.org/index.php?co=pohadka&pohadka=322>,

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rumpelstiltskin-Crane1886.jpg>

PÁROVÁNÍ A ZÁKLADNÍ ALGORITMUS

Definice 2.1 (Bipartitní graf) *Graf G je bipartitní, pokud lze jeho vrcholy rozdělit do dvou skupin X a Y tak, že každá hrana má jeden koncový vrchol v X a druhý v Y .*

Definice 2.2 (Párování) *Nechť G je neorientovaný graf se smyčkami. $P \subseteq E(G)$ se nazývá párování (anglicky matching) pokud žádné dvě různé hrany nesdílejí společný vrchol.*

Proč by nás párování mělo zajímat?

- Přřazení lidí k pracem, strojů k úkolům, ...
- Problém tanečních
- Aproximace problému obchodního cestujícího (Christofidesův algoritmus)

Definice 2.3 (Nasycený vrchol) Je-li P párování, pak v je **nasycený** (anglicky *saturated*) vrchol pokud existuje $e \in P$, že v je koncový vrchol e . Jinak je v **volný** (anglicky *free*) vrchol.

Definice 2.4 (Dokonalé párování) **Dokonalé párování** (anglicky *perfect matching*) je párování, kde jsou všechny vrcholy nasycené.

Definice 2.5 (Maximální párování) **Maximální párování** (anglicky *maximal matching*) P je takové s největším možným $|P|$.

Definice 2.6 (Střídavá cesta) *Nechť P je párování v G . **Střídavá** (anglicky *alternating*) cesta C vzhledem k P je cesta v G taková, že*

1. *obsahuje na střídačku hrany, které jsou z P a nejsou z P ;*
2. *pokud koncový vrchol C je saturovaný v P , pak v C leží hrana, která ho saturuje.*

Pokud oba koncové vrcholy C jsou volné, pak C nazýváme zlepšující cestou vzhledem k P .

Tvrzení 2.7 *Pokud C je zlepšující cesta vzhledem k párování P , pak párování $P' = P \oplus C$ je také párováním.¹*

¹Symetrický rozdíl je definovaný jako $P \oplus C = (P \setminus C) \cup (C \setminus P)$.

Algoritmus (Edmonds's Blossom algorithm, Hopcroft-Karp)

$P \leftarrow$ prázdné párování

while existuje zlepšující cesta C **do**

$$P = P \oplus C$$

end while

Věta 2.8 (Berge) *Nechť P je párování v G a nechť*

$$|P| = |P_{max}| - k.$$

Pak existuje k zlepšujících cest vzhledem k P , jejichž množiny vrcholů jsou disjunktní. Alespoň jedna z nich má délku $\leq \frac{n}{k}$.

Důsledek *Nechť G je neorientovaný graf a P párování v G . Pak P je maximální párování právě tehdy, když neexistuje žádná zlepšující cesta vzhledem k P .*

HLEDÁNÍ ZLEPŠUJÍCÍCH CEST

Jak na hledání zlepšujících cest

- Zlepšující cesta začíná a končí ve volném vrcholu
- Začneme ve všech volných vrcholech
- Vpřed jdeme hranami z $E \setminus P$
- Zpět jdeme hranami z P
- Když skončíme ve volném vrcholu máme zlepšující cestu

- Přidáme nový vrchol s a vedeme hrany do všech volných vrcholů levé strany
- Nový vrchol t a hrany do něj z volných vrcholů pravé strany
- Hrany z párování orientujeme doleva, zbylé doprava
- Hledáme cestu z s do t
- V pomocném grafu existuje cesta z s do t právě tehdy, když existuje zlepšující cesta
- Pomocí BFS sestrojíme *alternating level graph*
- Skončíme při nález první cesty do t pomocí DFS nalezneme vrcholově disjunktní cesty

$P \leftarrow$ prázdné párování

while existuje zlepšující cesta **do**

 pomocí BFS sestroj *alternating level graph*

 pomocí DFS nalezni množinu disjunktních zlepšujících cest

 pro každou zlepšující cestu C nahraď $P \leftarrow P \oplus C$

end while

Lemma *Po k iteracích musí být délka zlepšující cesty alespoň k .*

Společně s Bergeho větou to znamená, že čas běhu je $\mathcal{O}((m + n) \cdot \sqrt{n})$.

- Párování v obecných grafech
- Toky v sítích

- 11045 - My T-shirt suits me
- 10092 - The Problem with the Problem Setter
- 10080 - Gopher II

- Předmět Teorie grafů
http://math.feld.cvut.cz/demlova/teaching/grafy/grafy_dom.html
- Robert Sedgewick and Kevin Wayne, Algorithms,
<http://algs4.cs.princeton.edu/home/>, namely
<http://algs4.cs.princeton.edu/44sp/>
- Halim, S., Halim, F., Skiena, S. S., & Revilla, M. A. (2013).
Competitive Programming 3. Lulu Independent Publish.
- <https://www.youtube.com/watch?v=1M5eIpF0xjA>
- <https://www.youtube.com/watch?v=JpapV5DrBek>

DĚKUJI ZA POZORNOST.
ČAS NA OTÁZKY!