Abstraktní datové typy II.

Karel Richta a kol.

Katedra počítačů
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

© Karel Richta a kol., 2023

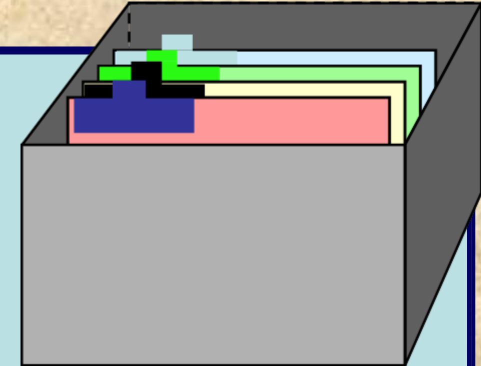
Datové struktury a algoritmy, B6B36DSA
09/2023, Lekce 9

https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b6b36dsa/start

Abstraktní datové typy

- Pole (*Array*)
- Zásobník (*Stack*)
- Fronta (*Queue*)
- ✓ **Tabulka (*Table*)**
- Seznam (*List*)
- Množina bez opakování (*Set*)
- Množina s opakováním (*MultiSet*)

Vyhledávací Tabulka (Look-up Table)

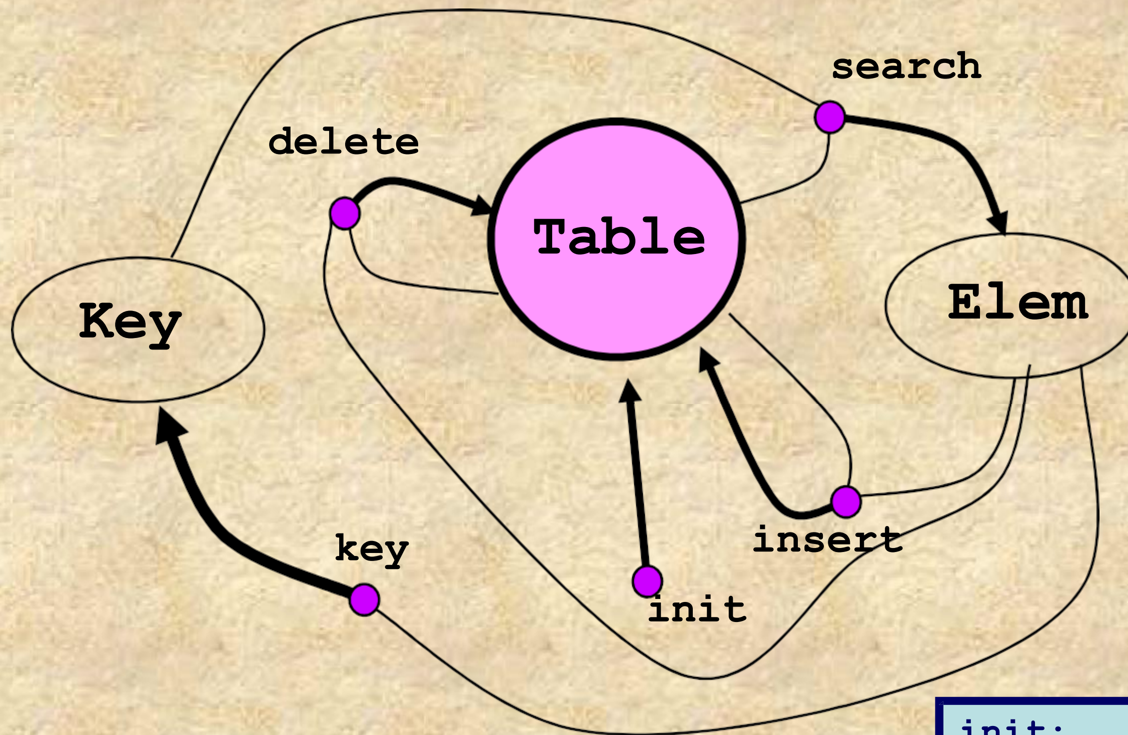


- kartotéka, asociativní paměť
- převod mezi kódy, četnost slov,...
- *homogenní, dynamická* (nejen) a nelineární
- obsahuje
  - *položky* tvořené klíčem a (případnou) asociovanou hodnotou
  - *klíč* jednoznačně identifikuje položku, podle něj se vyhledává

Příklady:

- **telefonní seznam** - klíčem je jméno+adresa, hodnotou tlf číslo
- Č**-A slovník** - položka je dvojice české slovo+anglické slovo

Signatura tabulky

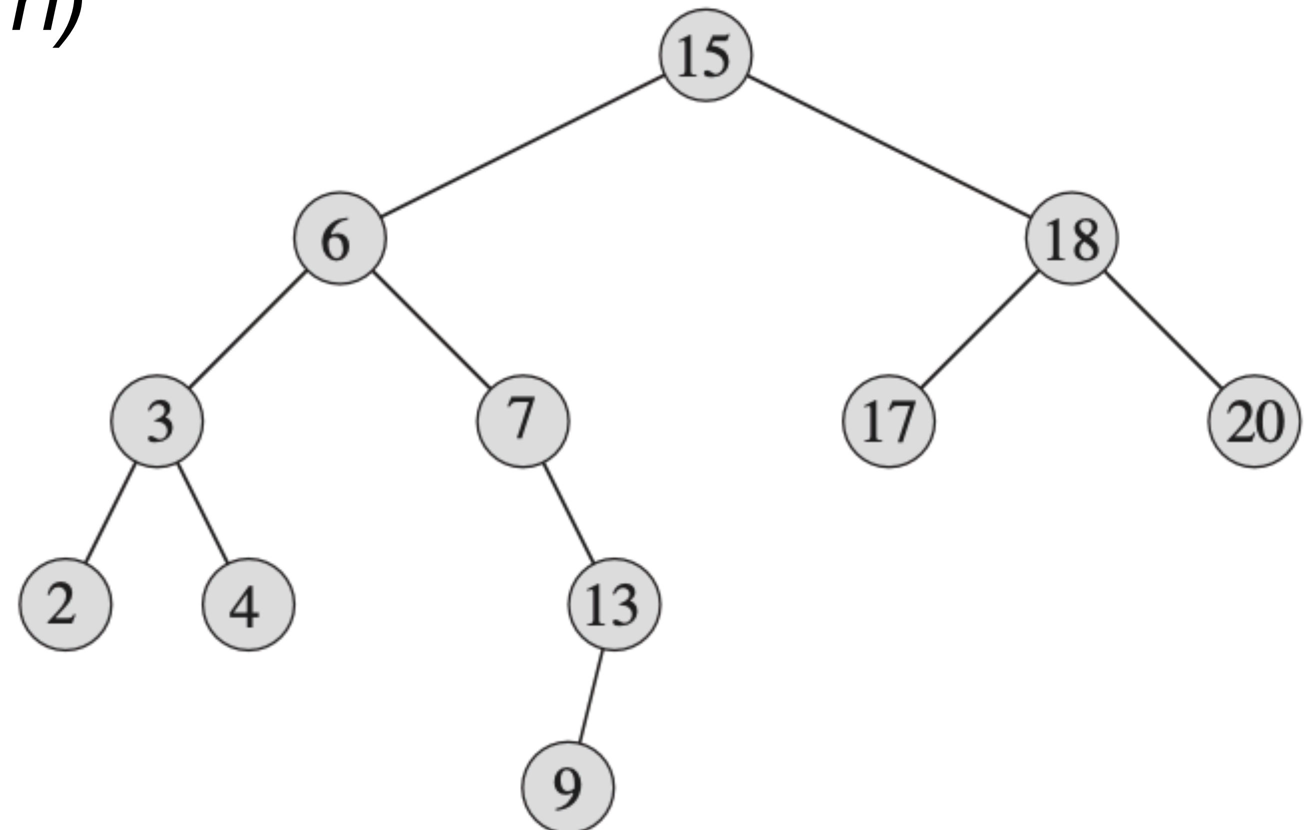



```
init:            -> Table
insert(_,_): Elem, Table -> Table
search(_,_): Key, Table -> Elem
delete(_,_): Elem, Table -> Table
key(_):          Elem -> Key
```

Asociativní vyhledávání

- Sekvenční vyhledávání (linear search): *O(n)*
- Hledání půlením (binary search): *O(log n)*
- Binární vyhledávací stromy (BVS, binary search trees): *O(log n)*
- Nejde to lépe?

```
TREE-SEARCH(x, k)
1  if x == NIL or k == x.key
2       return x
3  if k < x.key
4       return TREE-SEARCH(x.left, k)
5  else return TREE-SEARCH(x.right, k)
```



Přímé adresování

DIRECT-ADDRESS-SEARCH(T, k)

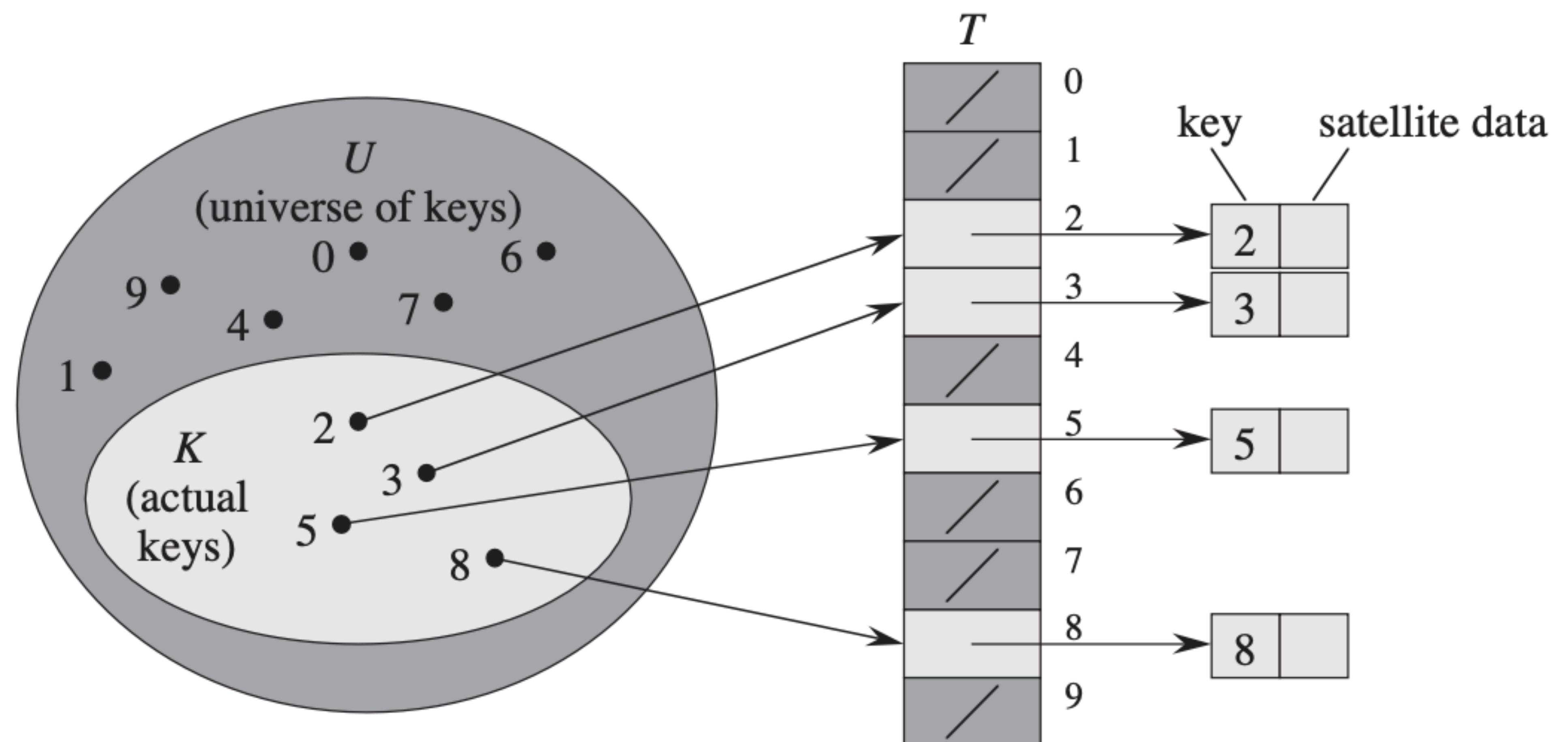
1 **return** $T[k]$

DIRECT-ADDRESS-INSERT(T, x)

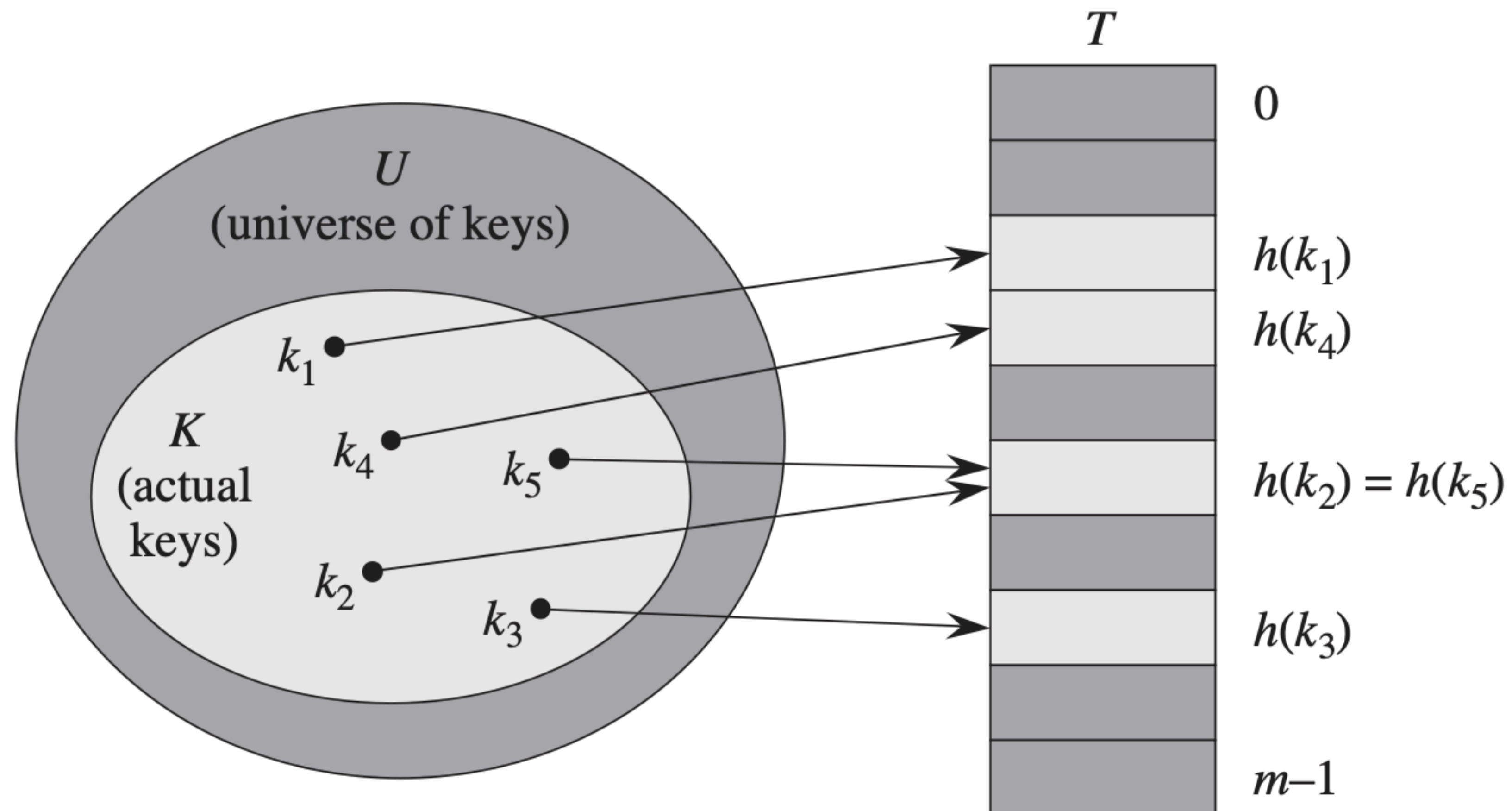
1 $T[x.key] = x$

DIRECT-ADDRESS-DELETE(T, x)

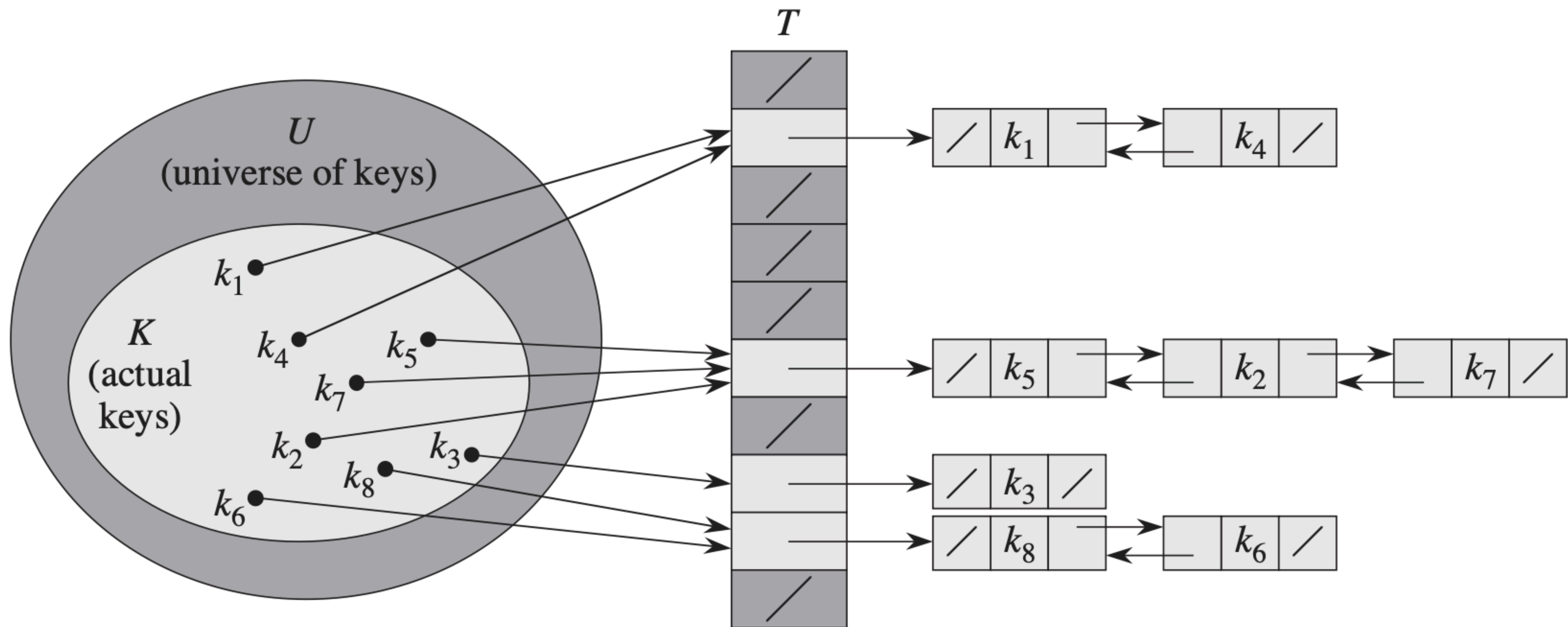
1 $T[x.key] = \text{NIL}$



Rozptylování (Hashování)



Rozptylování řetězením (Chaining)



Možnosti vyhledávání

Asociativní vyhledávání - porovnáváním klíčů

- nalezeno, když *klíč_prvku = hledaný klíč*
- např. sekvenční vyhledávání, hledání půlením, BVS,...

Ω(log n)

Adresní vyhledávání

- **indexací** klíčem (**přímý přístup**)
  - klíč je přímo indexem (adresou)
  - rozsah klíčů ~ rozsahu indexů
- **rozptylováním** (hashing)
  - výpočtem adresy z hodnoty klíče

Θ(1)

průměrně Θ(1)

Rozptylování - Hashing

Rozptylování je kompromis mezi rychlostí a spotřebou paměti

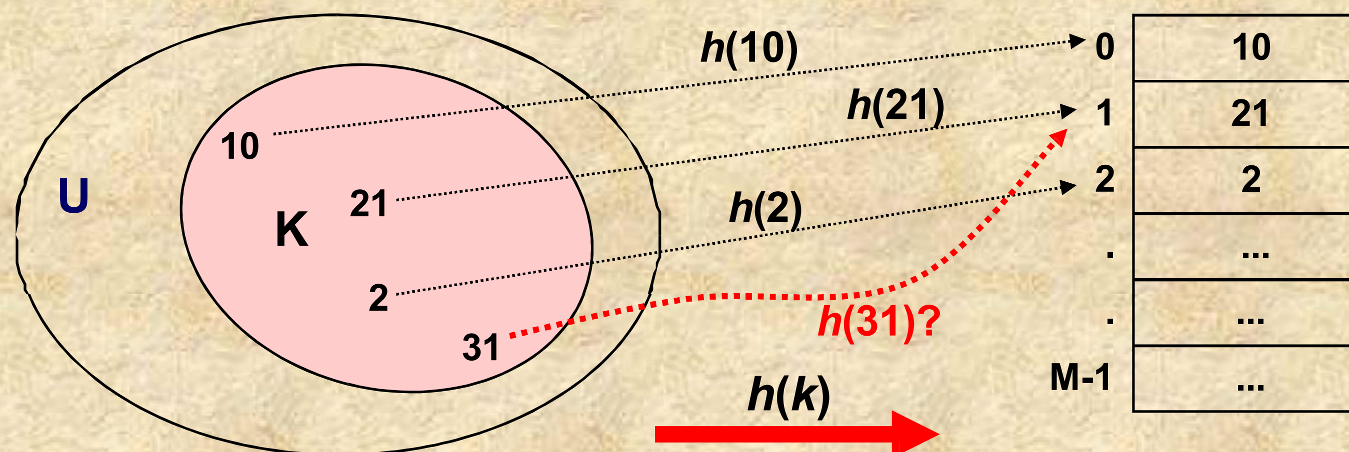
- sekvenční vyhledávání - čas $O(n)$, paměť $O(n)$
- přímý přístup - čas $O(1)$, paměť $O(N)$, N = |*universum klíčů*|
- rozptylování stačí málo času i paměti
  - **velikost tabulky *m* reguluje čas vyhledání**
  - **pro $m = kn$ je čas $O(1)$**
- **konstantní očekávaný čas** pro *vyhledání* a *vkládání* (*search* a *insert)* !

Jaká je cena? (trade-off)

- čas provádění ~ délce klíče
- nevhodné pro operace *výběru k-tého prvku* (*select*) a *řazení* (*sort)*

Rozptylování

U - universum klíčů K – skutečně použité klíče |K| << |U|



Rozptylování má **dvě fáze**

1. Výpočet **rozptylovací funkce** *h*(*k*) (z hodnoty klíče vypočítá adresu)
2. Vyřešení **kolizí** (*h(31) = h(21)* **...** **kolize** – prvek s indexem 1 již obsazen)

Rozptylovací funkce $h(k)$

Rozptylovací funkce

- zobrazuje množinu klíčů $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{U}$ do intervalu adres $\boldsymbol{A} = \langle \text{min}, max \rangle$, obvykle $\langle 0, M-1 \rangle$
- $|U| >> |K| \approx |A|$
- vznikají tak nutně **synonyma**: $h(k_1) = h(k_2)$ pro $k_1 \neq k_2$,

  $\Rightarrow$ nastane **kolize** (místo v tabulce obsazeno)

  Př.: Pro $h(k) = k$ mod 5 jsou synonyma (10, 20, 55, …) (2, 12, 17, 22, …)
- silně závisí na vlastnostech klíčů a jejich reprezentaci v paměti
- ideálně:
  - výpočetně co nejjednodušší (rychlá)
  - aproximuje náhodnou funkci
  - využije **rovnoměrně** adresní prostor
  - generuje **minimum kolizí**
  - proto: měla by využívat **všechny části klíče**

Volba rozptylovací funkce *h*(*k*)

- Pro **reálná čísla** z intervalu ⟨**0,1**⟩ (jak se na něj převede interval ⟨**a,b**⟩ ?)
  - multiplikativní: **h(k,M) = round(k * M)** (neoddělí shluky blízkých čísel)

    M = velikost tabulky
- Pro w-bitová **celá čísla**
  - multiplikativní: (**M** je prvočíslo)
    - **h(k,M) = round(k /2^w * M)**
  - modulární:
    - **h(k,M) = k % M** **(pozor na volbu modulu M!!)**
  - kombinovaná:
    - **h(k,M) = round(c * k) % M, c ∈<0,1>**
    - **h(k,M) = (int)(0.616161 * (float) k) % M**
    - **h(k,M) = (16161 * (unsigned) k) % M**
- Pro **obecné hodnoty** (rychlá, silně závislá na reprezentaci klíčů)
  - M bitů z klíče
    - **h(k,M) = k & (M-1)** pro **M = 2^x** (není prvočíslo!), **&** je bitový součin

Volba rozptylovací funkce $h(k)$

- **Pro řetězce $c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1 c_0$** – bereme jako polynom ⇒ použije se **Hornerovo schéma**

$$c_k * a^k + c_{k-1} * a^{k-1} + \dots + c_2 * a^2 + c_1 * a^1 + c_0 * a^0 = ((\dots((c_k * a + c_{k-1}) * a \dots + c_2) * a + c_1) * a + c_0$$

```
static int hash( String s, int M) {
  int h = 0, a = 127;
  for (int i = 0; i < s.length(); i++)
    h = (a*h + s.charAt(i)) % M;
  return h;
}
```

a=127 je vhodný základ (např. 128 není vhodné)

- **Pro řetězce** (pseudo-)randomizovaná tzv. **univerzální rozptylovací funkce**

```
static int hashU( String s, int M) {
  int h = 0, a = 31415, b = 27183;
  for (int i = 0; i < s.length(); i++) {
    h = (a*h + s.charAt(i)) % M;
    a = a*b % (M-1);                    // pseudonáhodná posloupnost
  return h;
}
```

Řešení kolizí

Jak postupovat, když dojde ke kolizi?

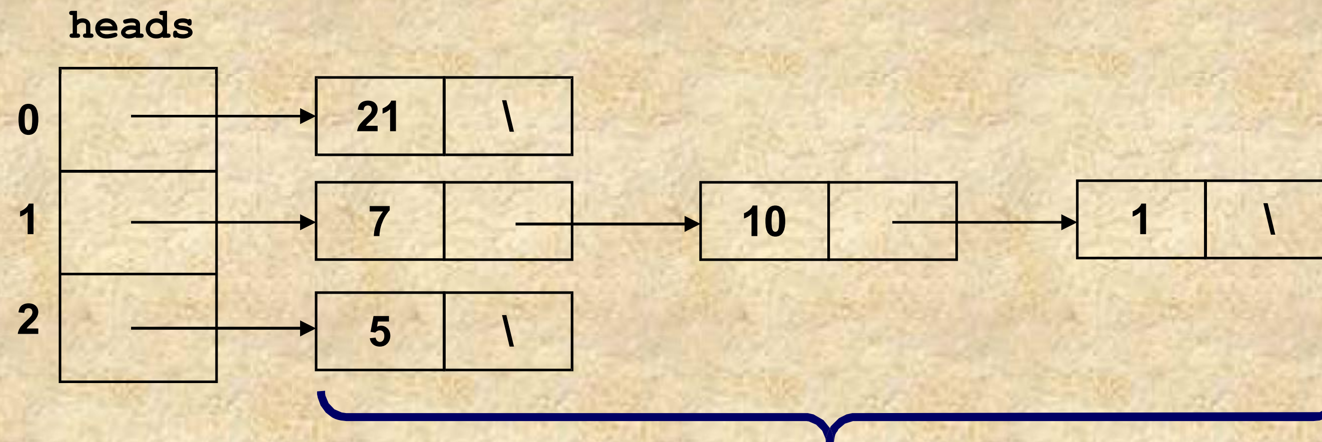
Dva přístupy:

- **řetězení**
- **otevřené rozptylování / adresování**

Řešení kolizí řetězením (Chaining)

Předpokládejme: $h(k) = k \bmod 3$

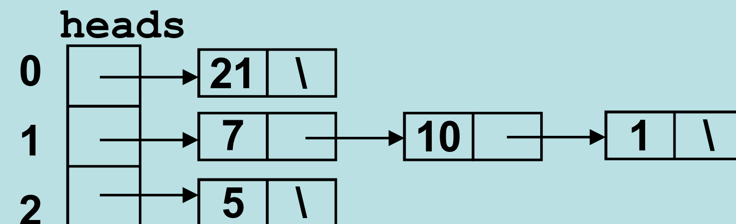
- vkládáme posloupnost klíčů: 1, 5, 21, 10, 7 — **m = 3, n = 5**
- nový klíč vždy na začátek řetězu (proč asi?)



seznamy synonym

Řešení kolizí řetězením (Chaining)

```
private Node[] heads;
int N, M;

void init( int maxN ) {                    // initialization
  N=0;                                     // # of table items
  M = maxN / 5;                            // table size
  heads = new Node[M];                     // array of pointers
  for( int i = 0; i < M; i++ )
    heads[i] = null;
}

Elem search( Key k ) {                     // search in the respective sublist
  return seqSearchList( heads[hash(k, M)], k
  );
}

void insert( Elem item ) {
  int i = hash( item.key(), M );
  heads[i] = new Node( item, heads[i]
  ); N++;
}

void delete( Elem item ) {
  ...
}
```



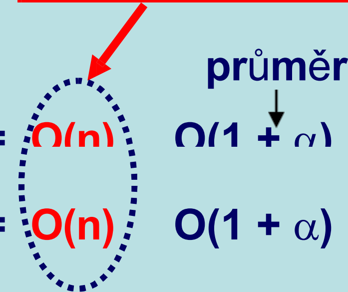
Řešení kolizí řetězením (Chaining)

Řetěz synonym má ideálně délku $\alpha = n / m$, α >1 (zaplnění tabulky)

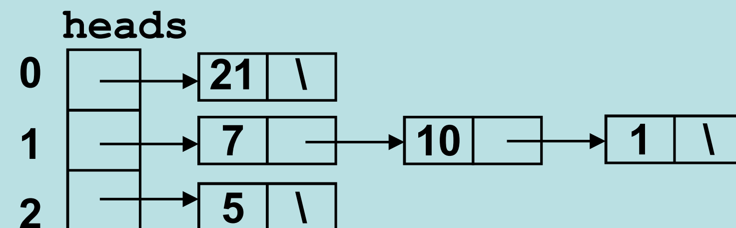
(*n* = počet prvků, *m* = velikost tabulky, m<n)

nepravděpodobný extrém

- **Insert** $I(n) = t_{hash} + t_{link} = O(1)$
- **Search** $Q(n) = t_{hash} + t_{search}$ průměr
  $= t_{hash} + t_c * n/(2m) = O(n) \quad O(1 + \alpha)$
- **Delete** $D(n) = t_{hash} + t_{search} + t_{link} = O(n) \quad O(1 + \alpha)$



- pro malá α (velká *m*) - se hodně blíží O(1) !!!
- pro velká α (malá *m*) - *m*-násobné zrychlení proti sekvenčnímu hledání



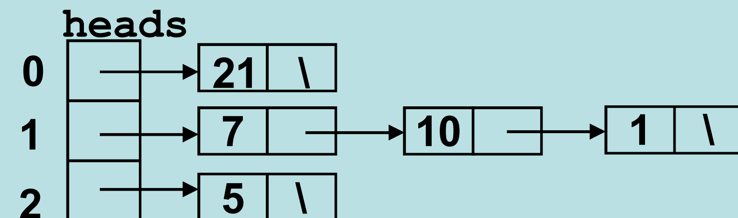
Řešení kolizí řetězením (Chaining)

Praxe:

- **volit $m = n/5$ až $n/10$ $\Rightarrow$ plnění $\alpha \leq 10$ prvků / řetěz**
- vyplatí se hledat sekvenčně
- neplýtvá nepoužitými ukazateli

Shrnutí:

+ nemusíme znát *n* předem
– potřebuje dynamické přidělování paměti
– potřebuje paměť na ukazatele a na tabulku *heads*[*m*]



Otevřené rozptylování (open addressing)

Východiska:

- známe (odhadneme) předem počet prvků
- nechceme seznamy ani pole ukazatelů
- ⇒ jednotlivé položky tabulky ukládáme (nesouvisle!) do pole na místa určená rozptylovací funkcí *h(k)*

Jak postupujeme při kolizi?

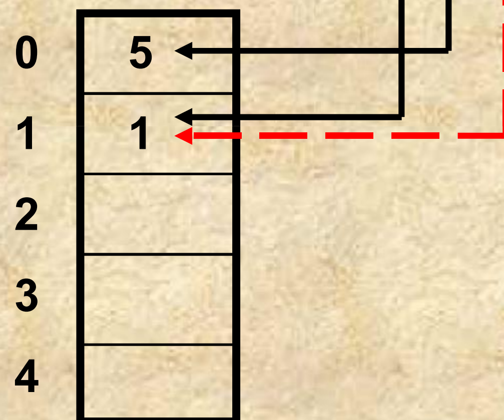
- **lineární prohledávání (linear probing)**
- **dvojí rozptylování (double hashing)**

0	**5**
1	**1**
2	**21**
3	**10**
4	

Otevřené rozptylování

Příklad

- $h(k) = k \bmod 5$ ($h(k) = k \bmod m$, m je rozměr pole)
- posloupnost: 1, 5, 21, 10



Problém:
kolize – klíč **1** blokuje místo pro klíč **21**

Postup

- lineární prohledávání
- dvojí rozptylování

Poznámka:
1 a **21** jsou synonyma, často ale blokuje nesynonymum.
Kolize je blokování **libovolným klíčem**

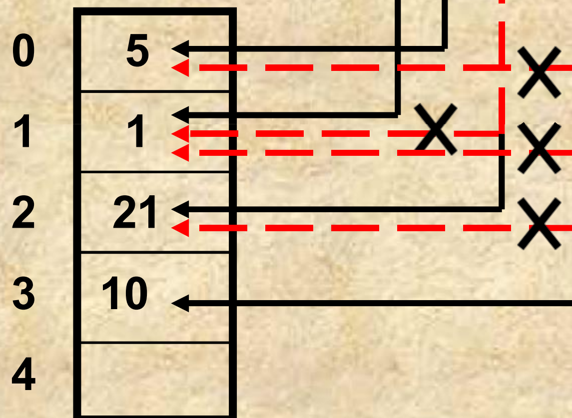
Test (Probe) = určení, zda pozice v tabulce obsahuje klíč shodný s hledaným klíčem

- search hit = klíč nalezen
- search miss = pozice prázdná, klíč nalezen
- jinak = na pozici je jiný klíč, hledej dál

Lineární prohledávání

Příklad

- $h(k,i) = (k+i)$ mod 5 ($h(k,i) = (k+i)$ mod m, i je pořadí testu/probe)
- posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



Problém pro 21:
1 blokuje místo pro **21** – **vlož o pozici dál**

Problém pro 10:
5 blokuje místo pro **10** – **vlož o pozici dál**
1 blokuje – **vlož o pozici dál**
21 blokuje – **vlož o pozici dál**

Lineární prohledávání

```
private Elem[] tab;
private int N, M;

void init( int maxN )
  { N = 0; M = 2*maxN; tab = new Elem[M];
  }

void insert( Elem x ) {
  int i = hash(x.key(), M);                    // co kdyz je tabulka plna ???
  while (tab[i] != null) i = (i+1) %
  M; tab[i] = x; N++;
}

  int i = hash(key, M);
  while (tab[i] != null)                       // co kdyz je tabulka plna ???
    if (key == tab[i].key()) return tab[i];
    else i = (i+1) % M;
  return null;
}
```

Na co je třeba dát pozor:

- lineární prohledávání má **cyklický charakter** **(0, 1, 2, …, M-1, 0, 1, 2, …)**
- musíme se někdy zastavit
  - **na volném místě**
  - **nebo po projití celé (plné) tabulky!**
- jak udělat operaci `delete` **??** **(viz dále)**

Dvojité rozptylování

Základní myšlenka – obecnější tvar, dvě rozptylovací funkce

$$h(k,i) = (h_1(k) + i*h_2(k)) \bmod m$$

Každý klíč má svoji testovací posloupnost !

Možná volba

- $h_1(k) = k \bmod m$ // počátek
- $h_2(k) = 1 + (k \bmod m')$ // offset

- m = prvočíslo 2**w liché
- m' = o něco menší číslo
- nechť $d = NSD(m,m')$ => prohledává se jen m/d položek!

Příklad:

- $k = 123456$, $m = 701$, $m' = 700$, $d = NSD(701, 700) = 1$
- $h_1(k) = 80$, $h_2(k) = 257$
- hledání začne na prvku 80 a pokračuje s krokem 257 % 701

Dvojité rozptylování

```
void insert( Elem x ) {
Key key = x.key();
  int i = hash1(key, M); int k = hash2(key);
  while (tab[i] != null) i = (i+k) % M;   // co kdyz je tabulka plna ???
  tab[i] = x; N++;
}

Elem search( Key key ) {
  int i = hash(key, M); int k = hash2(key);
  while (tab[i] != null)                    // co kdyz je tabulka plna ???
    if (key == tab[i].key()) return tab[i];
    else i = (i+k) % M;
  return null;
}
```

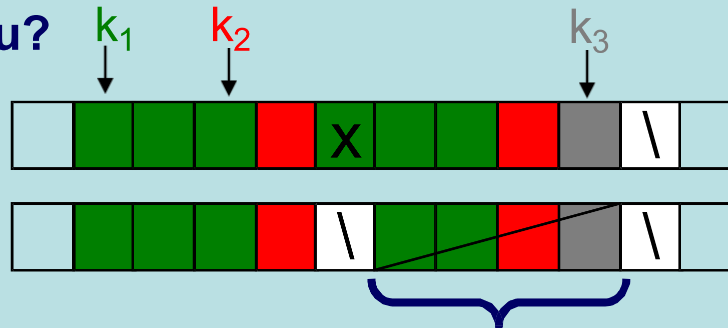
Na co je třeba dát pozor:

- **co dělat při zaplnění tabulky?**
  - **signalizovat chybu**
  - **dynamicky zvětšit tabulku**
- **co to jsou shluky (clusters)?**
- **jak udělat operaci `delete` ?? (viz dále)**

Vypuštění prvku z tabulky (delete)

Co dělat při vypuštění prvku?

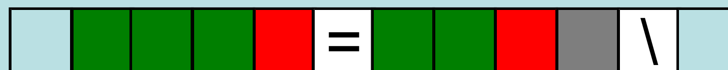
- x nahradíme **`null`**
- null přeruší shluk(-y) !!!
- => **`delete`** nesmí nechat "díru"



Řešení se liší:

- pro **lineární prohledávání**
  znovu vložíme prvky následující za x (až k prvnímu **`null`** = konec shluku)

- pro **dvojité rozptylování**
  vypníme uvolněné místo **speciální zarážkou**
  `search` místo přeskočí, **`insert`** je použije



Implementace operace **delete**

```
// delete pro linearni prohledavani
void delete( Elem item ) {
  Key key = item.key();
  int i = hash( key, M );
  while( tab[i] != null )                          // find item to remove
    if( item.key() == tab[i].key() ) break;
    else i = (i+1) % M;
  if( tab[i] == null ) return;                      // not found
  tab[i] = null; N--;                              //delete, reduce count
  for(int j = (i+1) % M; tab[j] != null; j = (j+1) % M) {
    x = tab[j]; tab[j] = null; insert(x);   //reinsert elements after deleted
  }
}

// delete pro dvojite rozptylovani
void delete( Elem item ) {
  Key key = item.key();
  int i = hash1( key, M ), j = hash2( key );
  while( tab[i] != null )                          // find item to remove
    if( item.key() == tab[i].key() ) break;
    else i = (i+j) % M;
  if( tab[i] == null ) return;                // not found
  tab[i] = sentinelItem; N--;                      // "delete" = replace
}
```

Parametry otevřeného rozptylování

Průměrný počet testů: $\alpha = n / m$, $\alpha \in \langle 0,1)$ koeficient (za-)plnění

- **Linear probing:**
  - Search hits $0.5 (1 + 1 / (1 - \alpha))$ found
  - Search misses $0.5 (1 + 1 / (1 - \alpha)^2)$ not found
- **Double hashing:**
  - Search hits $(1 / \alpha) \ln (1 / (1 - \alpha)) + (1 / \alpha)$
  - Search misses $1 / (1 - \alpha)$

Očekávaný počet testů

- **Linear probing:**

Plnění α	1/2	2/3	3/4	9/10
Search hit	1.5	2.0	3.0	5.5
Search miss	2.5	5.0	8.5	55.5

- **Double hashing:**

Plnění α	1/2	2/3	3/4	9/10
Search hit	1.4	1.6	1.8	2.6
Search miss	1.5	2.0	3.0	5.5

$\Rightarrow$ tabulka může být více zaplněná než začne klesat výkonnost, nebo k dosažení stejného výkonu stačí menší tabulka.

Reference

- [Cormen] Cormen, Leiserson, Rivest: *Introduction to Algorithms*, Chapter 12, McGraw Hill, 1990
- [Wiki] "Hash function," *Wikipedia, The Free Encyclopedia,* http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hash_function&oldid=175698983
- Tables and Hashing presentation http://users.aber.ac.uk/smg/Modules/CO21120-April-2003/NOTES/40-Hashing.ppt
- Bob Jenkins: Hash Functions for Hash Table Lookup *(theory of hash functions)*, http://burtleburtle.net/bob/hash/evahash.html
- Bob Jenkins: A Hash Function for Hash Table Lookup *(practical examples of hash functions)*, http://burtleburtle.net/bob/hash/doobs.html

Abstraktní datové typy

- Pole (*Array*)
- Zásobník (*Stack*)
- Fronta (*Queue*)
- Tabulka (*Table*)
- ✓ **Seznam (List)**
- Množina bez opakování (Set)
- Množina s opakováním (MultiSet)

Seznam (List)

Použití

- Sekvenční kontejner, optimalizovaný na vkládání a mazání uvnitř
- Patří mezi nejzákladnější DS ve výpočetní technice
  (používá se k implementaci jiných DS, stack, queue,…)

Vlastnosti

- Kontejner s rychlým přístupem ke všem prvkům bez upřednostnění konců
- Optimalizovaný pro vkládání a mazání prvků v libovolné pozici – v místě **ukazovátka**
- Nemá možnost indexovaného přístupu

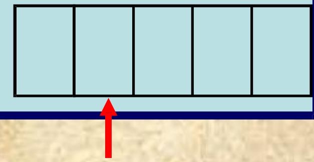
Intuitivní charakteristika: posloupnost údajů + ukazovátko!

- Přidat / zrušit / měnit prvek lze pouze v místě ukazovátka!

Homogenní, lineární, dynamická datová struktura

Příklad: spojový seznam = seznam v dynamické paměti (STL) O(1)
(NE ArrayList v Javě, který má get(i) se složitostí O(n))

Signatura seznamu



init

read

length

Nat

List

Elem

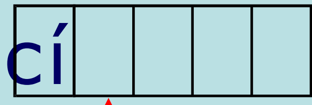
empty,
full

insert

Bool

delete,
first,last
next,prev

Seznam – interpretace operací



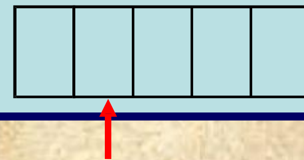
Operace insert

- budeme vkládat **před** nebo **za** ukazovátko?
  - jak se bude vkládat na konec seznamu?
- bude po vložení ukazovátko na **původním** nebo **vloženém** prvku?

Operace delete

- bude po vymazání ukazovátko na **předchozím** nebo **následujícím** prvku?

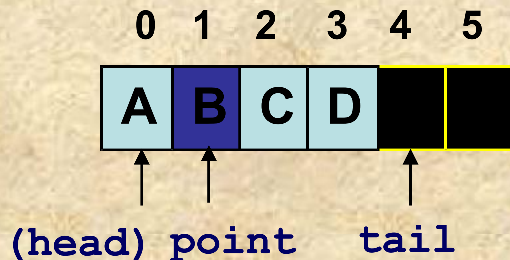
Implementace seznamu



Pomocí pole:

O(n) insert, delete

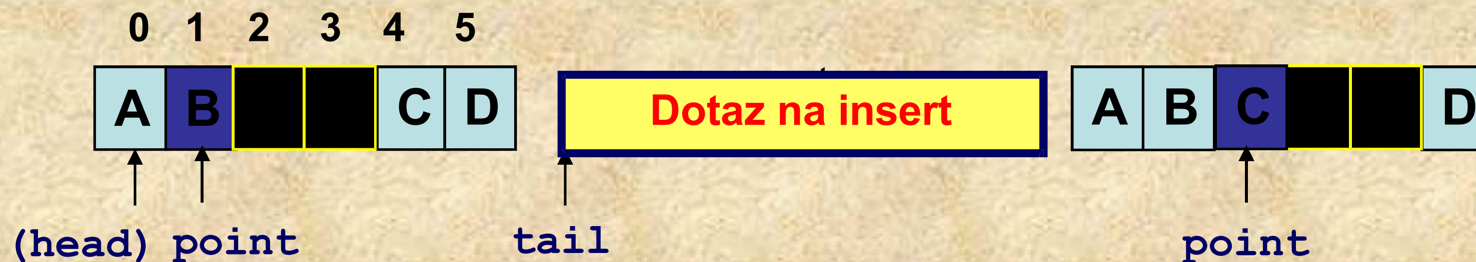
O(1) first, last, prev, next



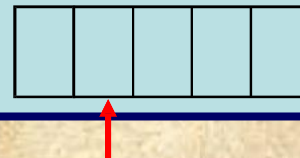
Dva zásobníky v poli:

O(1) insert, delete, prev, next

O(n) first, last

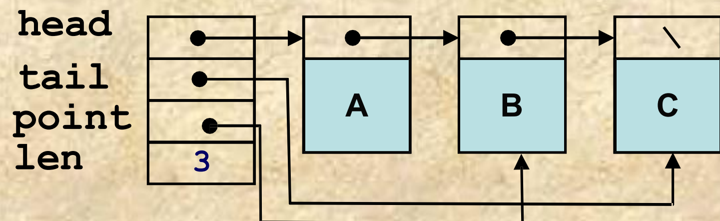


Implementace seznamu

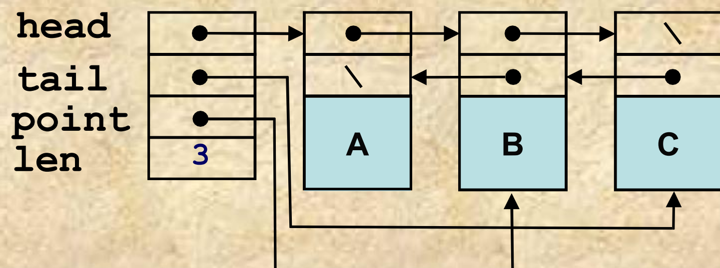


V dynamické paměti: O(n) delete, prev

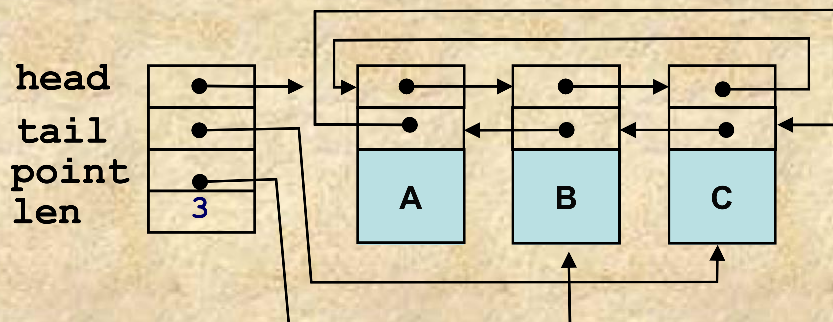
O(1) insert, first, last, next



Jednosměrně zřetězený seznam

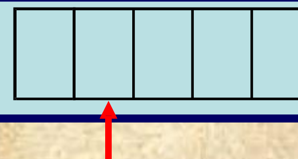


Obousměrně zřetězený seznam
O(1) delete, prev

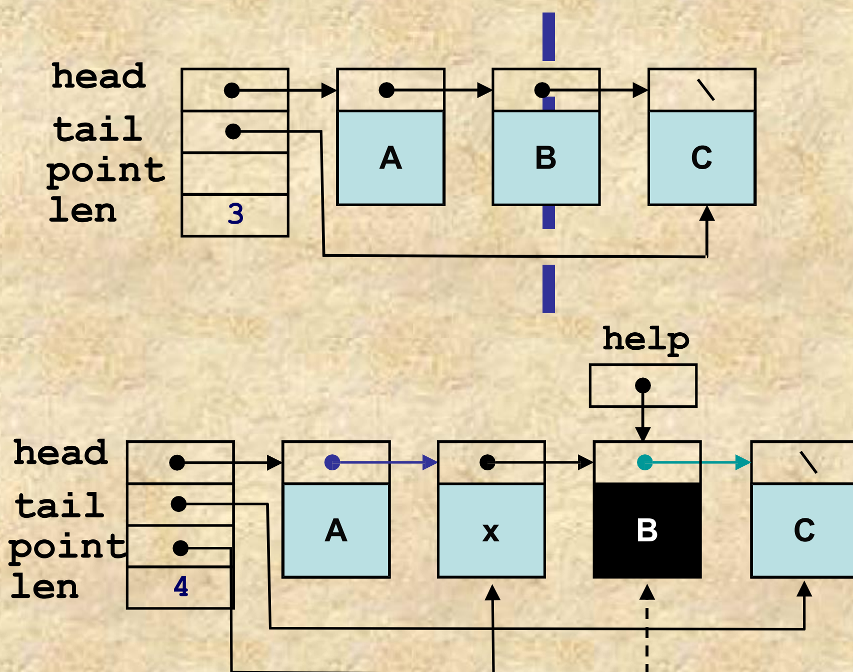


Kruhově obousměrně zřetězený seznam

Implementace seznamu



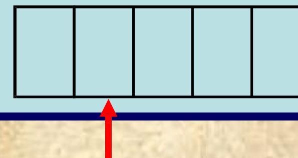
Jednosměrně zřetězený



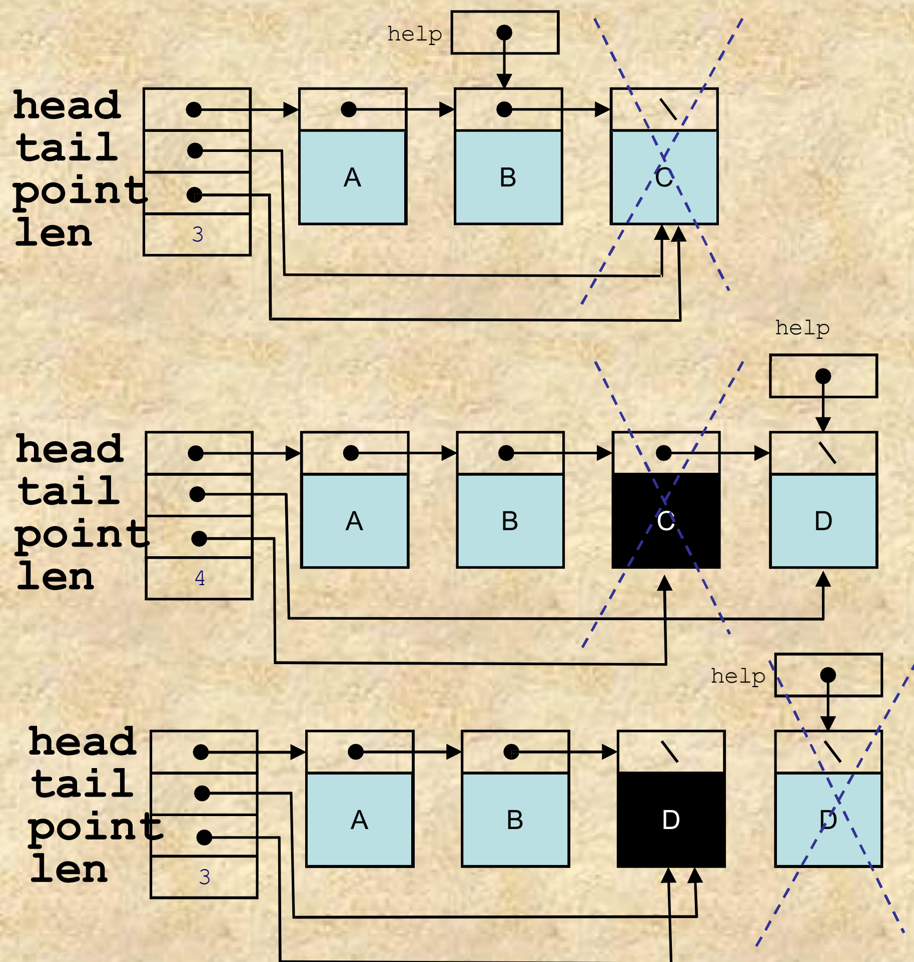

```
void insert( Elem x ) {
  Node help = new Node();
  if( point == null ){   // points behind
    help.next = null;
    help.val = x;
    if( tail == null )   // empty list
       head = help;
    else                 // add at end
       tail.next = help;
    tail = help;
  }         //point pointed behind list!
  else {    //point is in the list -
  trick
    help.val = point.val;
    help.next = point.next;
    point.next = help;
    point.val = x;
    point = help;
  }
  len++;
}
```

Konvence
`tail` = poslední prvek
`point == null` ukazuje za `last`

Implementace seznamu



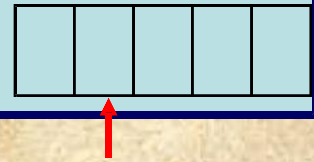
Jednosměrně zřetězený



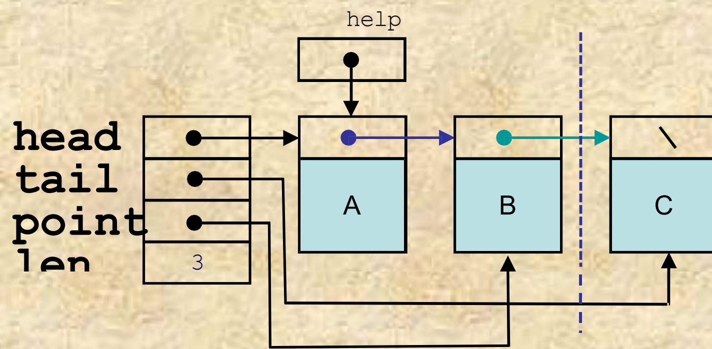

```
void delete( ) {
  Node help;
  if( point != null ){ // behind
    ignored if( point.next == null ) {
    //help = head;     //find predecessor
      while( help.next != point
        ) help = help.next;
      }
      help.next = null;
      point = null;
      tail = help;
    }
    // not last
    else {// trick:skip predec.search
      help = point.next;
      point.next = help.next;
      point.val = help.val;
      if( help == tail )
        tail = point;
    }
    len--;
  }
}
```

O(n) mazání tail
O(1) mazání uvnitř

Implementace seznamu



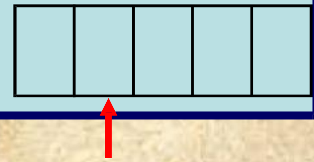
Jednosměrně zřetězený



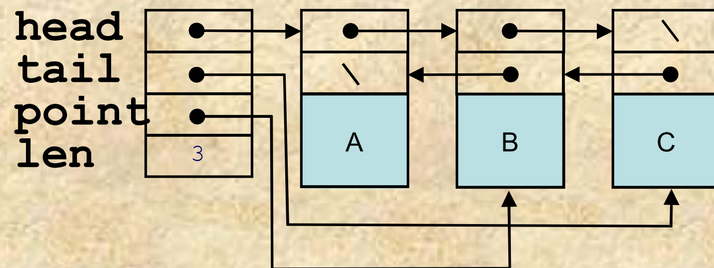

```
void prev( ) {
  Node help;
  if( point != head){   // could move
    help = head;
    while( help.next != point
      ) help = help.next;
    point = help;
  }

}
```

O(n)

Implementace seznamu



Obousměrně zřetězený



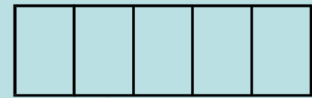

```
void prev( ) {
  Node help;
  if( point != head){ //could move
    if(point == null)
      point = tail;   // last
    else
      point = point.prev;
  }
}
```

O(1)

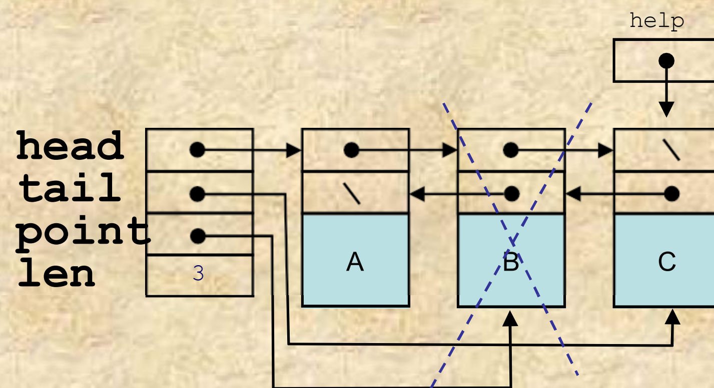
prev a **delete** posledního prvku

jsou jediné operace, kde obousměrné zřetězený seznam sníží složitost

Implementace seznamu

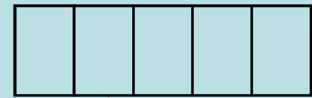


Obousměrně zřetězený

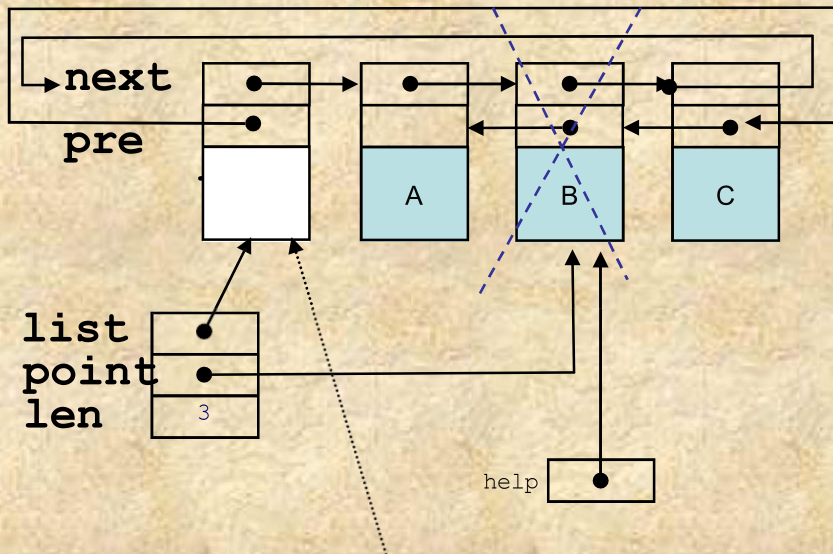



```
void delete( ) {
  Node help;
  if( point != null ){ // behind
  ignored
    help = point.next ;

    if( head == point ) //first
       head = help;

    if( tail == point ) //last
       tail = tail.prev;

    if( help != null )  //update prev
       help.prev = point.prev;

    if( point.prev != null ); //upd
       next point.prev.next = help;

    point = help;

    len--;
  }
}
```

Implementace seznamu



Kruhový obousměrně zřetězený



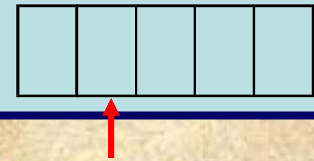

```
void delete( ) {

  if( point != list ){     //not empty
    point.prev.next = point.next;
    point.next.prev = point.prev;

    ________________;
    point = point.next;

    len--;
  }
}

void prev( ) {
  if( !atBegin() )    //point != list.next
    point = point.prev;
}
```

Konvence:

Zarážka (dummy head) - prvek navíc, který nenese data, zjednoduší operaci **`delete`.**

Ovlivní implementaci dalších operací!

Shrnutí seznamu



- Jedna z nejzákladnějších DS ve výpočetní technice (používá se k implementaci jiných DS, stack, queue,…)
- Kontejner s rychlým přístupem ke všem prvkům bez upřednostnění konců
- Optimalizovaný pro vkládání a mazání prvků v libovolné pozici – v místě ukazovátka
- Nemá možnost indexovaného/přímého přístupu

- Lineární
- Homogenní
- Dynamický

Reference

- Jan Honzík: Programovací techniky, skripta, VUT Brno, 19xx
- Karel Richta: Datové struktury, skripta pro postgraduální studium, ČVUT Praha, 1990
- Bohuslav Hudec: Programovací techniky, skripta, ČVUT Praha, 1993
- Miroslav Beneš: Abstraktní datové typy, Katedra informatiky FEI VŠB-TU Ostrava. (Pozor, má jinak šipky a jiný seznam) http://www.cs.vsb.cz/benes/vyuka/upr/texty/adt/index.html
- Aho, Hopcroft, Ullman: Data Structures and Algorithms, Addison-Wesley,1987

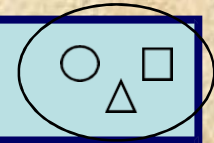
Reference

- Steven Skiena: The Algorithm Design Manual, Springer-Verlag New York, 1998 http://www.cs.sunysb.edu/~algorith
- Cormen, Leiserson, Rivest, Stein: Introduction to Algorithms, MIT Press, 1990
- Code exapmples: M.A.Weiss: Data Structures and Problem Solving using JAVA, Addison Wesley, 2001, code web page: http://www.cs.fiu.edu/~weiss/dsj2/code/code.html
- Paul E. Black, "abstract data type", in *Dictionary of Algorithms and Data Structures* [online], Paul E. Black, ed., U.S. National Institute of Standards and Technology. 10 February 2005. (accessed 10.2006) Available from: http://www.nist.gov/dads/HTML/abstractDataType.html
- "Abstract data type." Wikipedia, The Free Encyclopedia. 28 Sep 2006, 19:52 UTC. Wikimedia Foundation, Inc. 25 Oct 2006 http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Abstract_data_type&oldid=78362071

Abstraktní datové typy

- Pole (*Array*)
- Zásobník (*Stack*)
- Fronta (*Queue*)
- Tabulka (*Table*)
- Seznam (List)
- ✓ **Množina bez opakování (Set)**
- Množina s opakováním (MultiSet)

Množina bez opakování (Set)



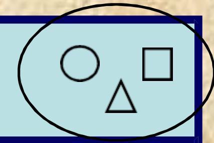
Vlastnosti

- Množina je soubor objektů, chápaný jako celek
- Je jednoznačně určena svými prvky (ale neurčuje jejich pořadí ani žádné další vztahy)
- V podstatě je to tabulka (map), v níž položky mají pouze klíč
- Chybí asociovaná informace, zajímá nás pouze existence/neexistence prvku (klíče) v množině

Použití

- Množina jako základní matematická struktura
- Může sloužit jako doplňující ADT v kombinaci s jiným typem
- Bitové masky (např. požadavky jednotlivých zařízení o přerušení, stavový registr v procesoru,…)

Množina bez opakování (Set)



Množina z pohledu matematika = *neuspořádaný* souhrn (kolekce) *prvků* - bez opakovaných výskytů

Je plně určena

- ***výčtem*** **prvků, např. {1, 5, 99} nebo {1, 99 , 5} (nezáleží na pořadí)**
- ***definováním vlastností*** **prvků** $\{\, x \mid x \in N \wedge x \le 100 \,\}$
- **∅ = {} = prázdná množina**

Množina z pohledu programátora

- **volba takové reprezentace, aby se dobře implementovaly potřebné množinové operace**

  ⇒ pole bitů (bitová mapa), nebo

  ⇒ seřazený seznam prvků dle relace (případného) uspořádání

Typy množin jako ADT

Neuspořádaná množina

- Nejobecnější, nejbližší matematickému pojetí
- Neexistuje žádná relace uspořádání mezi prvky

Částečně **uspořádaná množina**

- většina datových typů v počítačích
- relace částečného uspořádání: $x \leq y$
- a navíc existují neporovnatelné prvky (neplatí ani $x \leq y$ ani $y \leq x$)

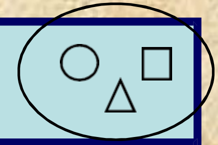
Relace uspořádání ≤ musí být

- **reflexivní** $(x \leq x)$
- **antisymetrická** $(x \leq y) \& (y \leq x) \Rightarrow x = y$
- **tranzitivní** $(x \leq y) \& (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

Úplně **uspořádaná množina**

- Pro libovolné dva prvky $x, y \in S$ platí buď $x \leq y$ nebo $y \leq x$
- Např. typ **`int`**

Možné operace nad množinou



Konstruktor

- **`init`**() – vytvoří prázdnou množinu

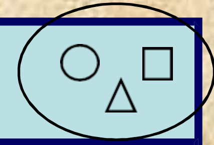
Modifikující operace (x je typu Key a S,A,B jsou množiny)

- **`insert`**(S, x) – vloží do množiny S prvek x
- **`delete`**(S, x) – vyjme z množiny S prvek x

Predikáty (*queries*)

- **`member`**(S, x) – vrací **`true`**, pokud $x \in S$, nebo **`false`**, pokud $x \notin S$
  (je možná i jiná/šikovnější interpretace …)
- **`equal`**(A, B) – vrací **`true`**, pokud množiny obsahují stejné prvky
- **`card`**(A) – vrací počet prvků množiny

Možné operace nad množinou



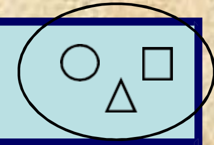
Pro úplně uspořádané množiny navíc operace

- **`min`**(S) – vrací nejmenší prvek
- **`max`**(S) – vrací největší prvek
- **`succ`**(x, S) – pro prvek x vrací nejblíže větší prvek, nebo **`null`**
- **`pred`**(x, S) – pro prvek x vrací nejblíže nižší prvek, nebo **`null`**

Množinové operace

- **`intersection`**(A,B) – průnik množin $A \cap B$
- **`difference`**(A,B) – rozdíl množin $A - B$
- **`union`**(A,B) – sjednocení množin $A \cup B$
- **`merge`**(A,B) – sjednocení disjunktních množin $A \cup B$ (musí být $A \cap B \neq \emptyset$)

Implementace množiny



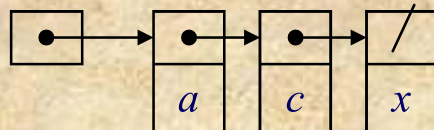
Implementace závisí na operacích a velikosti množiny

Bitovým vektorem

- **pro malý rozsah prvků k 1,..,N, N malé, předem známé**
- **i-tý bit je true, pokud je i prvkem množiny**
- **O(1) `member,insert,delete`**
- **O(N /w) `union,intersection,difference`**

Seřazeným seznamem

head



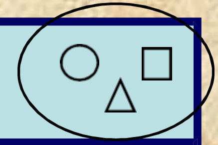
- **pro libovolný rozsah možných prvků**
- **paměť úměrná počtu uložených prvků N**
- **O(N) `member,insert,delete`**
- **O(N) `union,intersection` a `difference`**

Binárním vyhledávacím stromem

- **bude probráno později - O(log N) až O(N)**

Hash Map O(1)

Implementace bitovým vektorem



Konkrétní implementace závisí na možnosti implementace bitové mapy v daném programovacím jazyce a dostupnosti bitových operací na celá (w-bitová) slova.

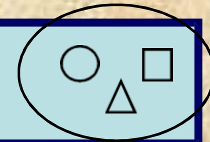
1 datový bit ≈ 1 bit paměti (výhody vs. nevýhody)

1 datový bit ≈ 1 byte paměti (výhody vs. nevýhody)

Výpočetní složitost

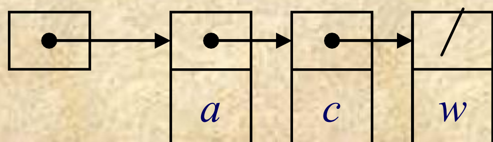
- **`init` - O(N), resp. O(N/w), N = velikost univerza**
- **`insert, delete, member` - O(1) !!!**
- **`equal, card, min, max, succ, pred` - O(N)**
- **`intersection, union, difference, merge` - O(N), resp. O(N/w),**

Implementace seřazeným seznamem



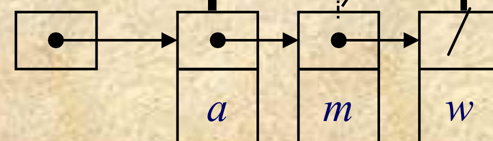
Průnik

a.head



= ≠ ≠ =

b.head



O($m + n$)

Průnik a ∩ b

- porovnáváme prvky
- jsou shodné ⇒ na výstup, postup v obou
- nebo různé ⇒ postup v seznamu s menším prvkem

Sjednocení a ∪ b

- vložíme všechny v rostoucím pořadí
- jsou shodné ⇒ na výstup, postup v obou
- nebo různé ⇒ menší prvek na výstup a postup v seznamu s menším prvkem

Rozdíl a - b

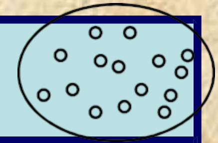
- shodné ignoruji
- různé
  - pokud menší a<b ⇒ a na výstup
  - pokud b<a, prvek v b přeskočím

Abstraktní datové typy

- Pole (*Array*)
- Zásobník (*Stack*)
- Fronta (*Queue*)
- Tabulka (*Table*)
- Seznam (List)
- Množina bez opakování (Set)

✓ **Množina s opakováním (MultiSet)**

Množina s opakováním (Multiset)



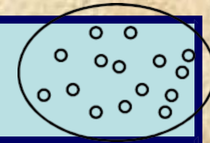
Použití

- Všechny reálné množiny – aplikace se vstupy z reálných dat, kde se nedá zamezit opakování
  (databáze: Jiří Novák – 6x na FEL)
- Přidávají další atributy, aby se rozlišily

Vlastnosti

- Rozšíření množiny o opakující se prvky

Implementace množiny s opakováním



Implementace

- bitovým vektorem **nejde** – musíme použít **vektor** čítačů
- uspořádaným seznamem - stejné jako u množiny bez opakování (povolí se opakování prvku / klíče)

Problémy

- je třeba nově definovat přesnou sémantiku většiny operací
  - jak počítat počet prvků (započítáváme stejné NEBO jen různé ?)
  - jak sjednocení – počet stejných prvků je max(m_i, n_i) nebo m_i+n_i?
- jak velká počítadla budeme potřebovat?

Množina - shrnutí

- Nelineární (asociativní) kontejner
  - pořadí uložených prvků není obecně definováno (z klíče nelze vypočítat adresa)
  - pro uspořádané klíče je pořadí dáno vzájemným porovnáním klíčů
- Homogenní – prvky stejného typu – klíč
- Dynamická

Varianty

- Set - žádný prvek se neopakuje
- MultiSet - prvky se mohou opakovat

Strom (Tree) a Graf (Graph)

Těmto ADT se věnujeme později ...

Prameny

- Jan Honzík: Programovací techniky, skripta, VUT Brno, 19xx
- Karel Richta: Datové struktury, skripta pro postgraduální studium, ČVUT Praha, 1990
- Bohuslav Hudec: Programovací techniky, skripta, ČVUT Praha, 1993
- Miroslav Beneš: Abstraktní datové typy, Katedra informatiky FEI VŠB-TU Ostrava. (Pozor, má jinak šipky a jiný seznam) http://www.cs.vsb.cz/benes/vyuka/upr/texty/adt/index.html
- Aho, Hopcroft, Ullman: Data Structures and Algorithms, Addison-Wesley,1987

References

- Steven Skiena: The Algorithm Design Manual, Springer-Verlag New York, 1998 http://www.cs.sunysb.edu/~algorith
- Cormen, Leiserson, Rivest, Stein: Introduction to Algorithms, MIT Press, 1990
- Code exapmples: M.A.Weiss: Data Structures and Problem Solving using JAVA, Addison Wesley, 2001, code web page: http://www.cs.fiu.edu/~weiss/dsj2/code/code.html
- Paul E. Black, "abstract data type", in *Dictionary of Algorithms and Data Structures* [online], Paul E. Black, ed., U.S. National Institute of Standards and Technology. 10 February 2005. (accessed 10.2006) Available from: http://www.nist.gov/dads/HTML/abstractDataType.html
- "Abstract data type." Wikipedia, The Free Encyclopedia. 28 Sep 2006, 19:52 UTC. Wikimedia Foundation, Inc. 25 Oct 2006 http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Abstract_data_type&oldid=78362071