

Pravděpodobnost, proč je to tak těžké?

Tomáš Svoboda and Petr Pošík

Vision for Robots and Autonomous Systems, Center for Machine Perception
Department of Cybernetics
Faculty of Electrical Engineering, Czech Technical University in Prague

12. března 2025

1 / 39

Notes

Specializovaný předmět na pravděpodobnost a statistiku teprve přijde.

Pravděpodobnost (nejistota) je všude

- ▶ Pravděpodobnost srážek zítra je 70%.
- ▶ Jakou mám šanci vyhrát v loterii?
- ▶ Mám pozitivní test na nemoc X, jsem opravdu nemocný?
- ▶ Svědectví jsou X, Y, a Z, je obviněný vinen?
- ▶ Nezaměstnanost se změnila o X, jaká bude inflace?
- ▶ Jak se bude vyvíjet cena akcií?
- ▶ Vybraná akce je X, o kolik se robot pohne?
- ▶ Jaká je pravděpodobnost, že na fotce je osoba XY?
- ▶ Jak dlouho mi bude trvat cesta, když pojedu tramvají?
- ▶ ...

Potřebujeme matematický popis ...

- ▶ Náhodný vs. deterministický pokus
- ▶ Náhodný jev jako jeho výsledek; prostor jevů
- ▶ Pravděpodobnost – naivní, axiomaticky definovaná
- ▶ Náhodná proměnná a její očekávaná hodnota
- ▶ *Podmíněná pravděpodobnost, nezávislé jevy*

(Náhodný) pokus, jev

Pokus :

- ▶ Zjednodušeně: pozorování nějaké vlastnosti světa
- ▶ Děj či procedura, která
 - ▶ může být libovolněkrát konzistentně opakována a
 - ▶ má jednoznačně definovanou množinu možných výsledků.
- ▶ **Deterministický pokus** má jediný možný výsledek.
- ▶ **Náhodný pokus** má více možných výsledků.
- ▶ Neznáme výsledek *před* vykonáním náhodného pokusu. Po pokusu, je vše již jasné, nejistota mizí.



Náhodný jev je výsledek náhodného pokusu.

Jaká je pravděpodobnost náhodného jevu?

(Náhodný) pokus, jev

Pokus :

- ▶ Zjednodušeně: pozorování nějaké vlastnosti světa
- ▶ Děj či procedura, která
 - ▶ může být libovolněkrát konzistentně opakována a
 - ▶ má jednoznačně definovanou množinu možných výsledků.
- ▶ **Deterministický pokus** má jediný možný výsledek.
- ▶ **Náhodný pokus** má více možných výsledků.
- ▶ Neznáme výsledek *před* vykonáním náhodného pokusu. Po pokusu, je vše již jasné, nejistota mizí.



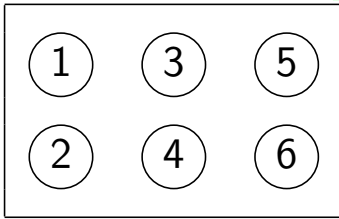
Náhodný jev je výsledek náhodného pokusu.

Jaká je pravděpodobnost náhodného jevu?

Notes

Náhodný pokus: Jeden hod hrací kostkou

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů :



Náhodné jevy (výsledky pokusů) :

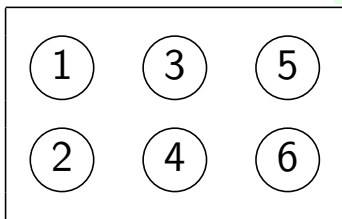
- ▶ A - číslo 6, $P(A) = ?$
- ▶ B - liché číslo, $P(B) = ?$
- ▶ C - číslo větší než 2, $P(C) = ?$
- ▶ D - číslo větší než 6, $P(D) = ?$



Think twice, DALL-E!

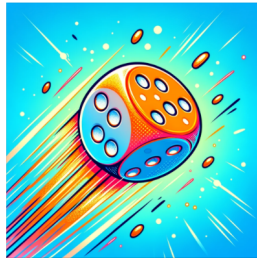
Náhodný pokus: Jeden hod hrací kostkou

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů :



Náhodné jevy (výsledky pokusů) :

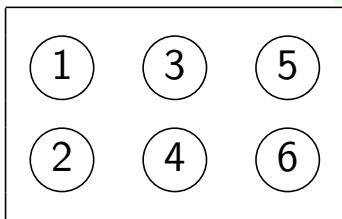
- ▶ A - číslo 6, $P(A) = ?$
- ▶ B - liché číslo, $P(B) = ?$
- ▶ C - číslo větší než 2, $P(C) = ?$
- ▶ D - číslo větší než 6, $P(D) = ?$



Think twice, DALL-E!

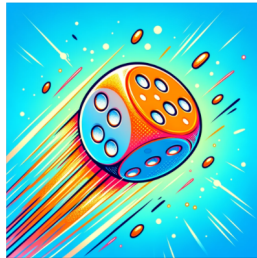
Náhodný pokus: Jeden hod hrací kostkou

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů :



Náhodné jevy (výsledky pokusů) :

- ▶ A - číslo 6, $P(A) = ?$
- ▶ B - liché číslo, $P(B) = ?$
- ▶ C - číslo větší než 2, $P(C) = ?$
- ▶ D - číslo větší než 6, $P(D) = ?$



Think twice, DALL-E!

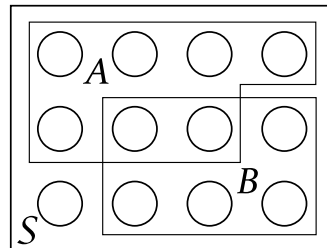
(Náhodné) jevy

Elementární jevy jsou *všechny možné, vzájemně se vylučující výsledky* nějakého experimentu.

Množinu elementárních jevů označme $\mathcal{S}$.

Náhodný jev A je jakákoli podmnožina množiny elementárních jevů, $A \subseteq \mathcal{S}$.

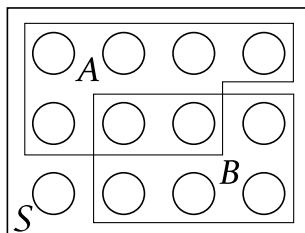
- ▶ Jev A nastal, pokud výsledek experimentu patří do A .
- ▶ Jevem je jakýkoli výrok o výsledku experimentu, pro který můžeme rozhodnout, zda nastal či nikoli.



Naivní definice pravděpodobnosti (Bernoulli/Laplace)

$$P(A) = \frac{|A|}{|\mathcal{S}|} = \frac{\text{počet výsledků vyhovujících jevu } A}{\text{celkový počet možných výsledků v } \mathcal{S}}$$

- ▶ Platí jen pro *stejně pravděpodobné* elementární jevy. (*Stejně pravděpodobné?*)
- ▶ Neumožňuje pracovat s nekonečným počtem elementárních jevů, geometrickou pravděpodobností, ...
- ▶ *Kombinatorika!* Počítání možností (variace, permutace, kombinace, ...)



Notes

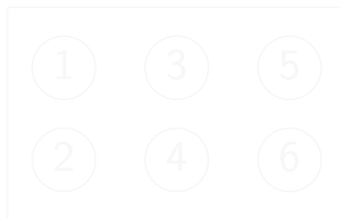
"Equally likely": we actually use an assumption on probability values in the definition of the probability.

Příklad 2: Vlastnosti P , hod kostkou

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Uvažujme jevy:

- ▶ A - padne 6
- ▶ B - padne sudé číslo



Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

- ▶ C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Notes

Pro názornost nám opět dobře poslouží oblázkový svět.

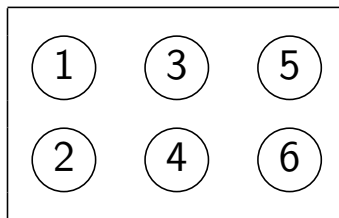
Rozdíl množin

Příklad 2: Vlastnosti P , hod kostkou

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Uvažujme jevy:

- ▶ A - padne 6
- ▶ B - padne sudé číslo



Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

- ▶ C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Notes

Pro názornost nám opět dobře poslouží oblázkový svět.

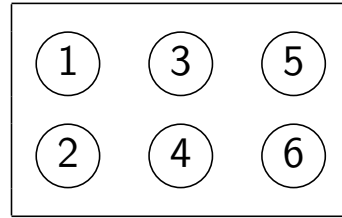
Rozdíl množin

Příklad 2: Vlastnosti P , hod kostkou

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Uvažujme jevy:

- ▶ A - padne 6
- ▶ B - padne sudé číslo



Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

- ▶ C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Notes

Pro názornost nám opět dobře poslouží oblázkový svět.

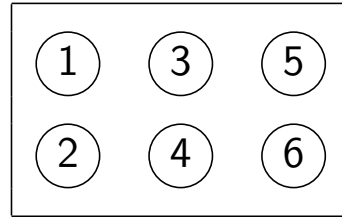
Rozdíl množin

Příklad 2: Vlastnosti P , hod kostkou

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Uvažujme jevy:

- ▶ A - padne 6
- ▶ B - padne sudé číslo



Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

- ▶ C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Notes

Pro názornost nám opět dobře poslouží oblázkový svět.

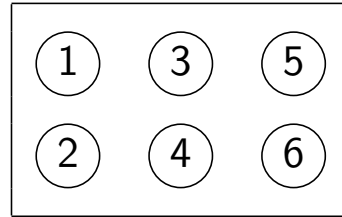
Rozdíl množin

Příklad 2: Vlastnosti P , hod kostkou

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Uvažujme jevy:

- ▶ A - padne 6
- ▶ B - padne sudé číslo



Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

- ▶ C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Notes

Pro názornost nám opět dobře poslouží oblázkový svět.

Rozdíl množin

Příklad 2: Vlastnosti P , hod kostkou

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Uvažujme jevy:

- ▶ A - padne 6
- ▶ B - padne sudé číslo

Množinově: $A \subset B$

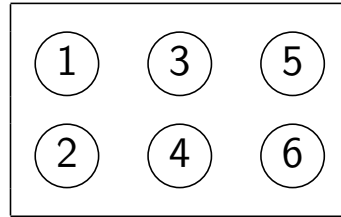
Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

- ▶ C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$



Notes

Pro názornost nám opět dobře poslouží oblázkový svět.

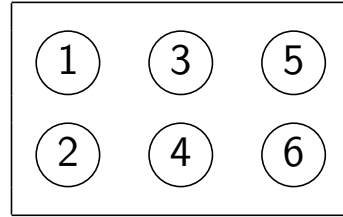
Rozdíl množin

Příklad 2: Vlastnosti P , hod kostkou

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Uvažujme jevy:

- ▶ A - padne 6
- ▶ B - padne sudé číslo



Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

- ▶ C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Notes

Pro názornost nám opět dobře poslouží oblázkový svět.

Rozdíl množin

Příklad 2: Vlastnosti P , hod kostkou

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Uvažujme jevy:

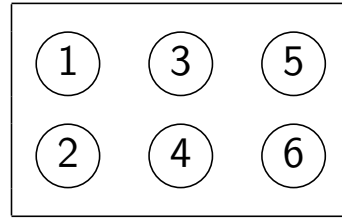
- ▶ A - padne 6
- ▶ B - padne sudé číslo

Množinově: $A \subset B$

Další jev:

- ▶ C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$



Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Notes

Pro názornost nám opět dobře poslouží oblázkový svět.

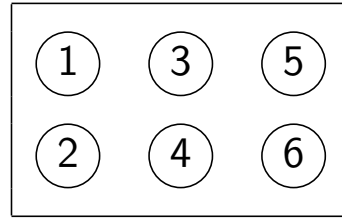
Rozdíl množin

Příklad 2: Vlastnosti P , hod kostkou

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Uvažujme jevy:

- ▶ A - padne 6
- ▶ B - padne sudé číslo



Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

- ▶ C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Notes

Pro názornost nám opět dobře poslouží oblázkový svět.

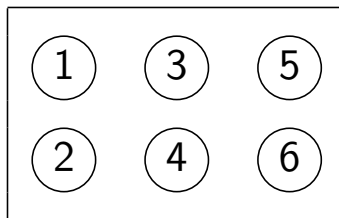
Rozdíl množin

Příklad 2: Vlastnosti P (pokr.)

Hod kostkou,

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

- ▶ A - padne 6,
- ▶ B - padne liché číslo.



Jaká je pravděpodobnost, že nastane jev A nebo B ?

Zjevně $A \cap B = \emptyset$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

C - padne sudé číslo.

Jaká je pravděpodobnost, že nastane jev A nebo C ?

Notes

Základní kontrola pravděpodobnosti libovolně složité události A : $0 \leq P(A) \leq 1$.

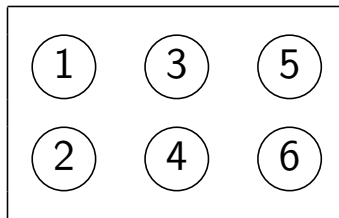
Jak spočítat $P(A_1 \cap A_2)$? Existuje nějaký případ, kdy to lze spočítat snadno?

Příklad 2: Vlastnosti P (pokr.)

Hod kostkou,

$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

- ▶ A - padne 6,
- ▶ B - padne liché číslo.



Jaká je pravděpodobnost, že nastane jev A nebo B ?

Zjevně $A \cap B = \emptyset$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

C - padne sudé číslo.

Jaká je pravděpodobnost, že nastane jev A nebo C ?

Notes

Základní kontrola pravděpodobnosti libovolně složité události A : $0 \leq P(A) \leq 1$.

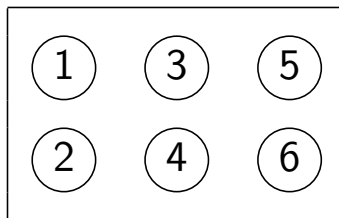
Jak spočítat $P(A_1 \cap A_2)$? Existuje nějaký případ, kdy to lze spočítat snadno?

Příklad 2: Vlastnosti P (pokr.)

Hod kostkou,

$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

- ▶ A - padne 6,
- ▶ B - padne liché číslo.



Jaká je pravděpodobnost, že nastane jev A nebo B ?

Zjevně $A \cap B = \emptyset$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

C - padne sudé číslo.

Jaká je pravděpodobnost, že nastane jev A nebo C ?

Notes

Základní kontrola pravděpodobnosti libovolně složité události A : $0 \leq P(A) \leq 1$.

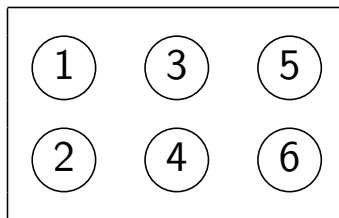
Jak spočítat $P(A_1 \cap A_2)$? Existuje nějaký případ, kdy to lze spočítat snadno?

Příklad 2: Vlastnosti P (pokr.)

Hod kostkou,

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

- ▶ A - padne 6,
- ▶ B - padne liché číslo.



Jaká je pravděpodobnost, že nastane jev A nebo B ?

Zjevně $A \cap B = \emptyset$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

C - padne sudé číslo.

Jaká je pravděpodobnost, že nastane jev A nebo C ?

Notes

Základní kontrola pravděpodobnosti libovolně složité události A : $0 \leq P(A) \leq 1$.

Jak spočítat $P(A_1 \cap A_2)$? Existuje nějaký případ, kdy to lze spočítat snadno?

Vážnější problém z oblasti pravděpodobnosti

Čerpadlo v elektrárně je zálohováno pomocí druhého identického čerpadla. Jev A_i znamená, že čerpadlo i funguje. Jaká je pravděpodobnost, že funguje alespoň jedno?

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Obě čerpadla fungují:

$$P(A_1 \cap A_2) = ?$$

10 / 39

Notes

Jaký jev je negace (opak) jevu *alespoň jedno čerpadlo funguje*?

Čerpadla: hypotéza $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$

- Dvě různá, nezávislá zařízení.
- Ale co když jsou připojeny na společný zdroj energie?

Vážnější problém z oblasti pravděpodobnosti

Čerpadlo v elektrárně je zálohováno pomocí druhého identického čerpadla. Jev A_i znamená, že čerpadlo i funguje. Jaká je pravděpodobnost, že funguje alespoň jedno?

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Obě čerpadla fungují:

$$P(A_1 \cap A_2) = ?$$

10 / 39

Notes

Jaký jev je negace (opak) jevu *alespoň jedno čerpadlo funguje*?

Čerpadla: hypotéza $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$

- Dvě různá, nezávislá zařízení.
- Ale co když jsou připojeny na společný zdroj energie?

Vážnější problém z oblasti pravděpodobnosti

Čerpadlo v elektrárně je zálohováno pomocí druhého identického čerpadla. Jev A_i znamená, že čerpadlo i funguje. Jaká je pravděpodobnost, že funguje alespoň jedno?

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Obě čerpadla fungují:

$$P(A_1 \cap A_2) = ?$$

10 / 39

Notes

Jaký jev je negace (opak) jevu *alespoň jedno čerpadlo funguje*?

Čerpadla: hypotéza $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$

- Dvě různá, nezávislá zařízení.
- Ale co když jsou připojeny na společný zdroj energie?

Vážnější problém z oblasti pravděpodobnosti

Čerpadlo v elektrárně je zálohováno pomocí druhého identického čerpadla. Jev A_i znamená, že čerpadlo i funguje. Jaká je pravděpodobnost, že funguje alespoň jedno?

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Obě čerpadla fungují:

$$P(A_1 \cap A_2) = ?$$

10 / 39

Notes

Jaký jev je negace (opak) jevu *alespoň jedno čerpadlo funguje*?

Čerpadla: hypotéza $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$

- Dvě různá, nezávislá zařízení.
- Ale co když jsou připojeny na společný zdroj energie?

Vážnější problém z oblasti pravděpodobnosti

Čerpadlo v elektrárně je zálohováno pomocí druhého identického čerpadla. Jev A_i znamená, že čerpadlo i funguje. Jaká je pravděpodobnost, že funguje alespoň jedno?

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Obě čerpadla fungují:

$$P(A_1 \cap A_2) = ?$$

Notes

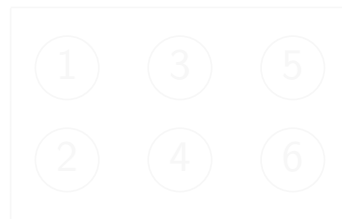
Jaký jev je negace (opak) jevu *alespoň jedno čerpadlo funguje*?

Čerpadla: hypotéza $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$

- Dvě různá, nezávislá zařízení.
- Ale co když jsou připojeny na společný zdroj energie?

Nastanou jevy A a B současně. Házíme kostkou

- ▶ A : padne liché číslo
- ▶ B : padne číslo menší než tři

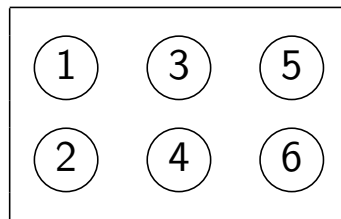


Jaká je pravděpodobnost, že nastanou oba jevy současně, neboli $P(A, B) = ?$

- A $1/4$
- B $1/6$
- C $1/2$
- D $1/3$

Nastanou jevy A a B současně. Házíme kostkou

- ▶ A : padne liché číslo
- ▶ B : padne číslo menší než tři

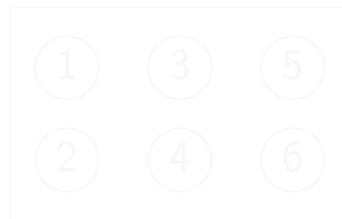


Jaká je pravděpodobnost, že nastanou oba jevy současně, neboli $P(A, B) = ?$

- A** $1/4$
- B** $1/6$
- C** $1/2$
- D** $1/3$

Nastanou jevy A a B současně. Házíme kostkou

- ▶ A : padne *sudé* číslo
- ▶ B : padne číslo *větší* než tři

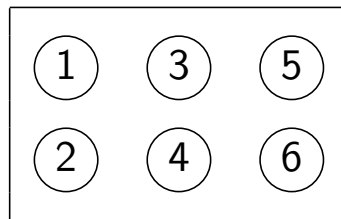


Jaká je pravděpodobnost, že nastanou oba jevy současně, neboli $P(A, B) = ?$

- A $1/4$
- B $1/6$
- C $1/2$
- D $1/3$

Nastanou jevy A a B současně. Házíme kostkou

- ▶ A : padne *sudé* číslo
- ▶ B : padne číslo *větší* než tři

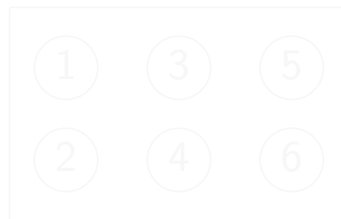


Jaká je pravděpodobnost, že nastanou oba jevy současně, neboli $P(A, B) = ?$

- A** $1/4$
- B** $1/6$
- C** $1/2$
- D** $1/3$

Nastane jev B ; jak to ovlivní $P(A)$?

- ▶ A : padne *sudé* číslo
- ▶ B : padne číslo *větší* než tři

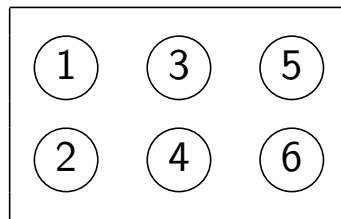


Máme informaci, že nastal jev B . Jaká je pravděpodobnost, že je to sudé číslo? Tedy: $P(A|B) = ?$

- A $1/4$
- B $2/3$
- C $1/2$
- D $1/3$

Nastane jev B ; jak to ovlivní $P(A)$?

- ▶ A : padne *sudé* číslo
- ▶ B : padne číslo *větší* než tři



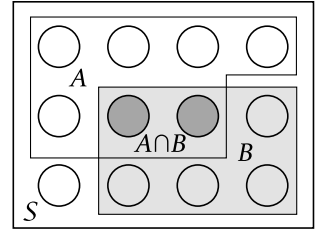
Máme informaci, že nastal jev B . Jaká je pravděpodobnost, že je to sudé číslo? Tedy: $P(A|B) = ?$

- A** $1/4$
- B** $2/3$
- C** $1/2$
- D** $1/3$

Podmíněná pravděpodobnost

Podmíněná pravděpodobnost jevu A , pokud nastal jev B je definována jako

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0.$$



- ▶ Všechny pravděpodobnosti jsou podmíněné: $P(A) = P(A|S)$.
- ▶ Interpretace:
 1. $P(A)$ je naše aktuální (apriorní) důvěra v to, že jev A nastane.
 2. Dostaneme novou informaci, že jiný jev B nastal.
 3. $P(A|B)$ je naše aktualizovaná (aposteriorní) důvěra, že jev A nastane.
- ▶ Podmíněná pravděpodobnost je stále pravděpodobnost; mapuje každý jev $A \subseteq S$ na $\langle 0, 1 \rangle$.

Notes

S výrazy *apriorní* a *aposteriorní* pravděpodobnost se budeme setkávat i nadále. V předmětu i v dalším studiu, proto jsou zvýrazněny.

Bayesovo pravidlo

Pravděpodobnost $P(A \cap B)$ průniku dvou jevů A a B lze vyjádřit dvěma způsoby:

- ▶ $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
- ▶ $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

Porovnáním získáme Bayesovo pravidlo

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Aplikací pravidla úplné pravděpodobnosti pro výpočet $P(A)$ ve jmenovateli získáme:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j \in I} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

15 / 39

Notes

Vidíme, že se k Bayesově pravidlu můžeme dopracovat:

- vzpomenutím na problém odhadu povolání osoby na základě popisu, viz Vennův diagram
- ze symetričnosti výpočtu pravděpodobnosti průniku jevů/událostí
- zatím možná není jasné, k čemu to bude, ale uvidíte později v předmětu, ještě se k tomu vrátíme . . .

Bayesovo pravidlo

Pravděpodobnost $P(A \cap B)$ průniku dvou jevů A a B lze vyjádřit dvěma způsoby:

- ▶ $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
- ▶ $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

Porovnáním získáme **Bayesovo pravidlo**

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Aplikací pravidla úplné pravděpodobnosti pro výpočet $P(A)$ ve jmenovateli získáme:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j \in I} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

15 / 39

Notes

Vidíme, že se k Bayesově pravidlu můžeme dopracovat:

- vzpomenutím na problém odhadu povolání osoby na základě popisu, viz Vennův diagram
- ze symetričnosti výpočtu pravděpodobnosti průniku jevů/událostí
- zatím možná není jasné, k čemu to bude, ale uvidíte později v předmětu, ještě se k tomu vrátíme . . .

Bayesovo pravidlo

Pravděpodobnost $P(A \cap B)$ průniku dvou jevů A a B lze vyjádřit dvěma způsoby:

- ▶ $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
- ▶ $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

Porovnáním získáme **Bayesovo pravidlo**

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Aplikací pravidla úplné pravděpodobnosti pro výpočet $P(A)$ ve jmenovateli získáme:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j \in I} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}.$$

15 / 39

Notes

Vidíme, že se k Bayesově pravidlu můžeme dopracovat:

- vzpomenutím na problém odhadu povolání osoby na základě popisu, viz Vennův diagram
- ze symetričnosti výpočtu pravděpodobnosti průniku jevů/událostí
- zatím možná není jasné, k čemu to bude, ale uvidíte později v předmětu, ještě se k tomu vrátíme . . .

Úprava/aktualizace pravděpodobnosti

1. Pravděpodobnost $P(A)$ je naše úvodní (apriorní) důvěra, že nastane jev A .
2. Dozvíme se, že nastal jev B .
3. Pravděpodobnost $P(A|B)$ je naše aktualizovaná (aposteriorní) důvěra, že nastane jev A .

O jevech A a B nevíme nic dalšího. Která z následujících možností je správná?

- A $P(A|B) < P(A)$
- B $P(A|B) = P(A)$
- C $P(A|B) > P(A)$
- D Může nastat kterákoli z uvedených možností.

Za jakých podmínek nastane možnost B?

16 / 39

Notes

Pomůžeme přemýšlet nad extrémními případy, např.:

- prázdný průnik $A \cap B$,
- $B = A$
- ...

$P(A|B) = P(A)$ platí, pokud jsou A a B nezávislé (B nám nepřineslo žádnou informaci o A).

Úprava/aktualizace pravděpodobnosti

1. Pravděpodobnost $P(A)$ je naše úvodní (apriorní) důvěra, že nastane jev A .
2. Dozvíme se, že nastal jev B .
3. Pravděpodobnost $P(A|B)$ je naše aktualizovaná (aposteriorní) důvěra, že nastane jev A .

O jevech A a B nevíme nic dalšího. Která z následujících možností je správná?

- A $P(A|B) < P(A)$
- B $P(A|B) = P(A)$
- C $P(A|B) > P(A)$
- D Může nastat kterákoli z uvedených možností.

Za jakých podmínek nastane možnost B?

16 / 39

Notes

Pomůže přemýšlet nad extrémními případy, např.:

- prázdný průnik $A \cap B$,
- $B = A$
- ...

$P(A|B) = P(A)$ platí, pokud jsou A a B nezávislé (B nám nepřineslo žádnou informaci o A).

Úprava/aktualizace pravděpodobnosti

1. Pravděpodobnost $P(A)$ je naše úvodní (apriorní) důvěra, že nastane jev A .
2. Dozvíme se, že nastal jev B .
3. Pravděpodobnost $P(A|B)$ je naše aktualizovaná (aposteriorní) důvěra, že nastane jev A .

O jevech A a B nevíme nic dalšího. Která z následujících možností je správná?

- A $P(A|B) < P(A)$
- B $P(A|B) = P(A)$
- C $P(A|B) > P(A)$
- D Může nastat kterákoli z uvedených možností.

Za jakých podmínek nastane možnost B?

16 / 39

Notes

Pomůže přemýšlet nad extrémními případy, např.:

- prázdný průnik $A \cap B$,
- $B = A$
- ...

$P(A|B) = P(A)$ platí, pokud jsou A a B nezávislé (B nám nepřineslo žádnou informaci o A).

Příklad: Voják nebo technik?

Tomáš je pořádkumilovný, rozhodný a má smysl pro spravedlnost. Jako dítě rád hrál na počítači strategické hry a střílečky. Vždy se zajímal o zbraně a vojenskou techniku.

Čím je podle vás Tomáš v současnosti?

A Voják

B Technik

C Obojí, voják i technik

17 / 39

Notes

Nechť je identifikace povolání jev V a T . Máme dvě hypotézy: buď platí $H = V$ nebo $H = T$. Daný popis osobnosti označme E jako evidence.

Podle [Sčítání 2021](#) je v ČR cca 22 tis. zaměstnanců v ozbrojených silách a cca 860 tis. technických a odborných pracovníků.

Diskutujme, podle čeho jsme se rozhodovali. Nakresleme diagram s jevy V a T , znázorníme v obou jevech části, kdy platí E .

Důležité je si uvědomit rozdíl mezi

- věrohodností (likelihood) $P(E|H)$, což je hodnota, kterou usuzujeme z popisu ("jaká je věrohodnost toho, že daný popis odpovídá vojákovi, resp. technikovi") a
- pravděpodobností $P(H|E)$ což je hodnota, kterou potřebujeme pro odpověď v kvízu.

Příklad: Voják nebo technik?

Tomáš je pořádkumilovný, rozhodný a má smysl pro spravedlnost. Jako dítě rád hrál na počítači strategické hry a střílečky. Vždy se zajímal o zbraně a vojenskou techniku.

Čím je podle vás Tomáš v současnosti?

A Voják

B Technik

C Obojí, voják i technik

17 / 39

Notes

Nechť je identifikace povolání jev V a T . Máme dvě hypotézy: buď platí $H = V$ nebo $H = T$. Daný popis osobnosti označme E jako evidence.

Podle [Sčítání 2021](#) je v ČR cca 22 tis. zaměstnanců v ozbrojených silách a cca 860 tis. technických a odborných pracovníků.

Diskutujme, podle čeho jsme se rozhodovali. Nakresleme diagram s jevy V a T , znázorníme v obou jevech části, kdy platí E .

Důležité je si uvědomit rozdíl mezi

- věrohodností (likelihood) $P(E|H)$, což je hodnota, kterou usuzujeme z popisu ("jaká je věrohodnost toho, že daný popis odpovídá vojákově, resp. technikovi") a
- pravděpodobností $P(H|E)$ což je hodnota, kterou potřebujeme pro odpověď v kvízu.

Příklad: Voják nebo technik?

Tomáš je pořádkumilovný, rozhodný a má smysl pro spravedlnost. Jako dítě rád hrál na počítači strategické hry a střílečky. Vždy se zajímal o zbraně a vojenskou techniku.

Čím je podle vás Tomáš v současnosti?

- A Voják
- B Technik
- C Obojí, voják i technik

17 / 39

Notes

Nechť je identifikace povolání jev V a T . Máme dvě hypotézy: buď platí $H = V$ nebo $H = T$. Daný popis osobnosti označme E jako evidence.

Podle [Sčítání 2021](#) je v ČR cca 22 tis. zaměstnanců v ozbrojených silách a cca 860 tis. technických a odborných pracovníků.

Diskutujme, podle čeho jsme se rozhodovali. Nakresleme diagram s jevy V a T , znázorníme v obou jevech části, kdy platí E .

Důležité je si uvědomit rozdíl mezi

- věrohodností (likelihood) $P(E|H)$, což je hodnota, kterou usuzujeme z popisu ("jaká je věrohodnost toho, že daný popis odpovídá vojákovi, resp. technikovi") a
- pravděpodobností $P(H|E)$ což je hodnota, kterou potřebujeme pro odpověď v kvízu.

Náhodný pokus 1: Házíme třikrát mincí (Head/Tails)

(Náhodný) Jev – výsledek náhodného pokusu

Prostor (množina) S všech elementárních jevů . Jak je velká?

- A 3^2
- B 2^3
- C $2 \cdot 3$
- D ∞

(Náhodné) Jevy :

- A - 3× panna (hlava), $P(A) = ?$
- B - 3× stejný symbol, $P(B) = ?$
- C - alespoň jeden orel (tail), $P(C) = ? \dots$

18 / 39

Notes

Pro výpočet velikosti prostoru všech elementárních jevů někdy poslouží vhodný model. Tady např. to může být n –bitové binární číslo.

Vyděme z množiny elementárních jevů - $HHH, HHT, \dots, TTT$.

Je pravděpodobnost některého elementárního jevu větší nebo menší než u ostatních? Je to tak vždy?

Jak definovat jevy A, B, C ? Nešlo by jev C definovat snáze, pomocí množinových operací a jiných elementárních jevů?

Jaká je jejich pravděpodobnost? Jak by se dala spočítat $P(C)$ pomocí již známých pstí?

Náhodný pokus 1: Házíme třikrát mincí (Head/Tails)

(Náhodný) Jev – výsledek náhodného pokusu

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů . Jak je velká?

- A 3^2
- B 2^3
- C $2 \cdot 3$
- D ∞

(Náhodné) Jevy :

- ▶ A - 3× panna (hlava), $P(A) = ?$
- ▶ B - 3× stejný symbol, $P(B) = ?$
- ▶ C - alespoň jeden orel (tail), $P(C) = ? \dots$

18 / 39

Notes

Pro výpočet velikosti prostoru všech elementárních jevů někdy poslouží vhodný model. Tady např. to může být n –bitové binární číslo.

Vyděme z množiny elementárních jevů - $HHH, HHT, \dots, TTT$.

Je pravděpodobnost některého elementárního jevu větší nebo menší než u ostatních? Je to tak vždy?

Jak definovat jevy A, B, C ? Nešlo by jev C definovat snáze, pomocí množinových operací a jiných elementárních jevů?

Jaká je jejich pravděpodobnost? Jak by se dala spočítat $P(C)$ pomocí již známých pstí?

Náhodný pokus 1: Házíme třikrát mincí (Head/Tails)

(Náhodný) Jev – výsledek náhodného pokusu

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů . Jak je velká?

- A 3^2
- B 2^3
- C $2 \cdot 3$
- D ∞

(Náhodné) Jevy :

- ▶ A - 3× panna (hlava), $P(A) = ?$
- ▶ B - 3× stejný symbol, $P(B) = ?$
- ▶ C - alespoň jeden orel (tail), $P(C) = ? \dots$

18 / 39

Notes

Pro výpočet velikosti prostoru všech elementárních jevů někdy poslouží vhodný model. Tady např. to může být n –bitové binární číslo.

Vyjděme z množiny elementárních jevů - $HHH, HHT, \dots, TTT$.

Je pravděpodobnost některého elementárního jevu větší nebo menší než u ostatních? Je to tak vždy?

Jak definovat jevy A, B, C ? Nešlo by jev C definovat snáze, pomocí množinových operací a jiných elementárních jevů?

Jaká je jejich pravděpodobnost? Jak by se dala spočítat $P(C)$ pomocí již známých pstí?

Náhodný pokus 1: Házíme třikrát mincí (Head/Tails)

(Náhodný) Jev – výsledek náhodného pokusu

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů . Jak je velká?

- A 3^2
- B 2^3
- C $2 \cdot 3$
- D ∞

(Náhodné) Jevy :

- ▶ A - 3× panna (hlava), $P(A) = ?$
- ▶ B - 3× stejný symbol, $P(B) = ?$
- ▶ C - alespoň jeden orel (tail), $P(C) = ? \dots$

18 / 39

Notes

Pro výpočet velikosti prostoru všech elementárních jevů někdy poslouží vhodný model. Tady např. to může být n –bitové binární číslo.

Vyjděme z množiny elementárních jevů - $HHH, HHT, \dots, TTT$.

Je pravděpodobnost některého elementárního jevu větší nebo menší než u ostatních? Je to tak vždy?

Jak definovat jevy A , B , C ? Nešlo by jev C definovat snáze, pomocí množinových operací a jiných elementárních jevů?

Jaká je jejich pravděpodobnost? Jak by se dala spočítat $P(C)$ pomocí již známých pstí?

Náhodný pokus 1: Házíme třikrát mincí (Head/Tails)

(Náhodný) Jev – výsledek náhodného pokusu

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů . Jak je velká?

- A 3^2
- B 2^3
- C $2 \cdot 3$
- D ∞

(Náhodné) Jevy :

- ▶ A - 3× panna (hlava), $P(A) = ?$
- ▶ B - 3× stejný symbol, $P(B) = ?$
- ▶ C - alespoň jeden orel (tail), $P(C) = ? \dots$

18 / 39

Notes

Pro výpočet velikosti prostoru všech elementárních jevů někdy poslouží vhodný model. Tady např. to může být n –bitové binární číslo.

Vyjděme z množiny elementárních jevů - $HHH, HHT, \dots, TTT$.

Je pravděpodobnost některého elementárního jevu větší nebo menší než u ostatních? Je to tak vždy?

Jak definovat jevy A , B , C ? Nešlo by jev C definovat snáze, pomocí množinových operací a jiných elementárních jevů?

Jaká je jejich pravděpodobnost? Jak by se dala spočítat $P(C)$ pomocí již známých pstí?

Náhodná proměnná/veličina

Pracovat s náhodnými jevy je těžkopádné ...

Pokus: 3 hody mincí. Elementární jevy $s \in \mathcal{S}$. Jevy $A_i \subseteq \mathcal{S}$:

- ▶ A_1 : tři hlavy – $X(s) = 3$
- ▶ A_2 : alespoň jedna hlava – $X(s) \geq 1$
- ▶ A_3 : tři stejné symboly – $X(s) \in \{3, 0\}$
- ▶ ...

Můžeme definovat každý jev jako množinu (leckdy dost obsáhlou) elementárních jevů s .

Nebo si zavedeme náhodnou proměnnou/veličinu X :

$$X(s) = \text{počet hlav v } s$$

Náhodná *proměnná* je ve skutečnosti *funkce*!

Notes

Lze uvažovat např. i o hodu 3 kostkami. Kolik existuje různých výsledků experimentu?

Jak je asi složité pracovat s jevy zahrnujícími stovky elementárních jevů?

Vidíme, že náhodná proměnná je ve skutečnosti funkce! To je určitě jeden ze zdrojů zmatení.

Náhodná proměnná/veličina

Pracovat s náhodnými jevy je těžkopádné ...

Pokus: 3 hody mincí. Elementární jevy $s \in \mathcal{S}$. Jevy $A_i \subseteq \mathcal{S}$:

- ▶ A_1 : tři hlavy – $X(s) = 3$
- ▶ A_2 : alespoň jedna hlava – $X(s) \geq 1$
- ▶ A_3 : tři stejné symboly – $X(s) \in \{3, 0\}$
- ▶ ...

Můžeme definovat každý jev jako množinu (leckdy dost obsáhlou) elementárních jevů s .

Nebo si zavedeme náhodnou proměnnou/veličinu X :

$$X(s) = \text{počet hlav v } s$$

Náhodná *proměnná* je ve skutečnosti *funkce*!

Notes

Lze uvažovat např. i o hodu 3 kostkami. Kolik existuje různých výsledků experimentu?

Jak je asi složité pracovat s jevy zahrnujícími stovky elementárních jevů?

Vidíme, že náhodná proměnná je ve skutečnosti funkce! To je určitě jeden ze zdrojů zmatení.

Náhodná proměnná/veličina

Pracovat s náhodnými jevy je těžkopádné ...

Pokus: 3 hody mincí. Elementární jevy $s \in \mathcal{S}$. Jevy $A_i \subseteq \mathcal{S}$:

- ▶ A_1 : tři hlavy – $X(s) = 3$
- ▶ A_2 : alespoň jedna hlava – $X(s) \geq 1$
- ▶ A_3 : tři stejné symboly – $X(s) \in \{3, 0\}$
- ▶ ...

Můžeme definovat každý jev jako množinu (leckdy dost obsáhlou) elementárních jevů s .

Nebo si zavedeme **náhodnou proměnnou/veličinu** X :

$$X(s) = \text{počet hlav v } s$$

Náhodná proměnná je ve skutečnosti funkce!

Notes

Lze uvažovat např. i o hodu 3 kostkami. Kolik existuje různých výsledků experimentu?

Jak je asi složité pracovat s jevy zahrnujícími stovky elementárních jevů?

Vidíme, že náhodná proměnná je ve skutečnosti funkce! To je určitě jeden ze zdrojů zmatení.

Náhodná proměnná/veličina

Pracovat s náhodnými jevy je těžkopádné ...

Pokus: 3 hody mincí. Elementární jevy $s \in \mathcal{S}$. Jevy $A_i \subseteq \mathcal{S}$:

- ▶ A_1 : tři hlavy – $X(s) = 3$
- ▶ A_2 : alespoň jedna hlava – $X(s) \geq 1$
- ▶ A_3 : tři stejné symboly – $X(s) \in \{3, 0\}$
- ▶ ...

Můžeme definovat každý jev jako množinu (leckdy dost obsáhlou) elementárních jevů s .

Nebo si zavedeme **náhodnou proměnnou/veličinu** X :

$$X(s) = \text{počet hlav v } s$$

Náhodná proměnná je ve skutečnosti funkce!

Notes

Lze uvažovat např. i o hodu 3 kostkami. Kolik existuje různých výsledků experimentu?

Jak je asi složité pracovat s jevy zahrnujícími stovky elementárních jevů?

Vidíme, že náhodná proměnná je ve skutečnosti funkce! To je určitě jeden ze zdrojů zmatení.

Náhodná proměnná/veličina

Pracovat s náhodnými jevy je těžkopádné ...

Pokus: 3 hody mincí. Elementární jevy $s \in \mathcal{S}$. Jevy $A_i \subseteq \mathcal{S}$:

- ▶ A_1 : tři hlavy – $X(s) = 3$
- ▶ A_2 : alespoň jedna hlava – $X(s) \geq 1$
- ▶ A_3 : tři stejné symboly – $X(s) \in \{3, 0\}$
- ▶ ...

Můžeme definovat každý jev jako množinu (leckdy dost obsáhlou) elementárních jevů s .

Nebo si zavedeme náhodnou proměnnou/veličinu X :

$$X(s) = \text{počet hlav v } s$$

Náhodná *proměnná* je ve skutečnosti *funkce*!

Notes

Lze uvažovat např. i o hodu 3 kostkami. Kolik existuje různých výsledků experimentu?

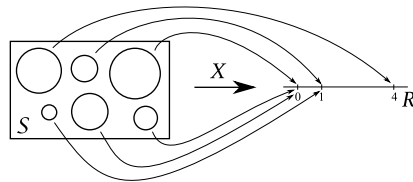
Jak je asi složité pracovat s jevy zahrnujícími stovky elementárních jevů?

Vidíme, že náhodná proměnná je ve skutečnosti funkce! To je určitě jeden ze zdrojů zmatení.

Náhodná veličina

Náhodná proměnná/veličina na

pravděpodobnostním prostoru $(\mathcal{S}, P)$ je **funkce** X zobrazující elementární jevy $s \in \mathcal{S}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$, tj. $X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$.



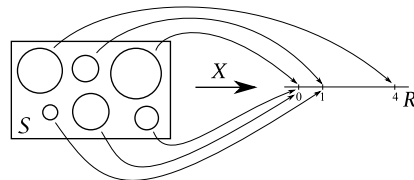
“Náhodná veličina je *číselná charakteristika* nějakého aspektu experimentu.”

- ▶ N.v. X přiřazuje číselnou hodnotu $X(s)$ každému možnému výsledku $s \in \mathcal{S}$.
- ▶ Samo zobrazení je *deterministické*; náhodnost pochází z výsledků náhodného pokusu (pravděpodobnosti jednotlivých výsledků jsou určeny pravděpodobnostní funkcí P).
- ▶ Před provedením experimentu neznáme ani jeho výsledek s , ani hodnotu n.v. $X(s)$. Ale můžeme spočítat pravděpodobnosti, že X nabyde určité hodnoty, nebo že její hodnota bude v určitém intervalu.
- ▶ Po provedení experimentu získáme výsledek s a realizaci n.v. $X(s)$.

Náhodná veličina

Náhodná proměnná/veličina na

pravděpodobnostním prostoru $(\mathcal{S}, P)$ je funkce X zobrazující elementární jevy $s \in \mathcal{S}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$, tj. $X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$.



“Náhodná veličina je číselná charakteristika nějakého aspektu experimentu.”

- ▶ N.v. X přiřazuje číselnou hodnotu $X(s)$ každému možnému výsledku $s \in \mathcal{S}$.
- ▶ Samo zobrazení je *deterministické*; náhodnost pochází z výsledků náhodného pokusu (pravděpodobnosti jednotlivých výsledků jsou určeny pravděpodobnostní funkcí P).
- ▶ Před provedením experimentu neznáme ani jeho výsledek s , ani hodnotu n.v. $X(s)$. Ale můžeme spočítat pravděpodobnosti, že X nabyde určité hodnoty, nebo že její hodnota bude v určitém intervalu.
- ▶ Po provedení experimentu získáme výsledek s a realizaci n.v. $X(s)$.

Příklady náhodných veličin

- ▶ Doba jízdy z domova do školy.
- ▶ Čekací doba na autobus.
- ▶ Počet zákazníků v obchodě daný den.
- ▶ Srážkový úhrn.
- ▶ Počet chyb v programu.
- ▶ ...

Příklady náhodných veličin

- ▶ Doba jízdy z domova do školy.
- ▶ Čekací doba na autobus.
- ▶ Počet zákazníků v obchodě daný den.
- ▶ Srážkový úhrn.
- ▶ Počet chyb v programu.
- ▶ ...

Náhodné jevy vs hodnoty náhodné proměnné

X je náhodná veličina, tj. $X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$.

- ▶ $X = x$ označuje jev $\{s \in \mathcal{S} : X(s) = x\}$, tj. množinu všech výsledků s , pro které $X(s) = x$.
- ▶ $X \in \langle a, b \rangle$ označuje jev $\{s \in \mathcal{S} : a \leq X(s) < b\}$, tj. množinu všech výsledků s , pro které $a \leq X(s) < b$.

Diskrétní náhodná veličina

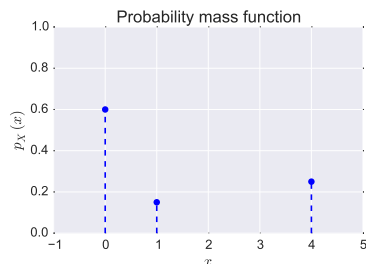
Náhodná veličina X je **diskrétní**, pokud hodnoty $X(s)$ přes všechny $s \in \mathcal{S}$ tvoří buď

- ▶ konečnou množinu hodnot $a_1, a_2, \dots, a_n$, nebo
- ▶ nekonečnou, ale spočetnou množinu $a_1, a_2, \dots$

Podpora (Support) n.v. X : $\mathcal{S}_X = \{x \in \mathbb{R} : P(X = x) > 0\} = \{a_1, a_2, \dots\}$

Pravděpodobnostní funkce (rozdělení pravděpodobnosti)
diskrétní n.v. X je funkce p_X definovaná jako

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{s \in \mathcal{S} : X(s) = x\}).$$



Notes

Nakreslete si jak to vypadá pro experiment hodu třemi mincemi a $X(s) = \text{počet hlav}$.

Diskrétní náhodná veličina

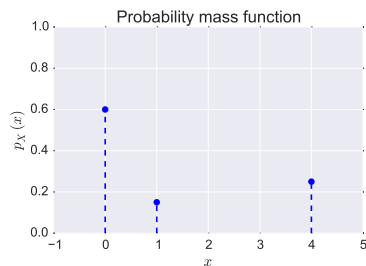
Náhodná veličina X je **diskrétní**, pokud hodnoty $X(s)$ přes všechny $s \in \mathcal{S}$ tvoří buď

- ▶ konečnou množinu hodnot $a_1, a_2, \dots, a_n$, nebo
- ▶ nekonečnou, ale spočetnou množinu $a_1, a_2, \dots$

Podpora (Support) n.v. X : $\mathcal{S}_X = \{x \in \mathbb{R} : P(X = x) > 0\} = \{a_1, a_2, \dots\}$

Pravděpodobnostní funkce (rozdělení pravděpodobnosti)
diskrétní n.v. X je funkce p_X definovaná jako

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{s \in \mathcal{S} : X(s) = x\}).$$



Notes

Nakreslete si jak to vypadá pro experiment hodu třemi mincemi a $X(s) = \text{počet hlav}$.

Diskrétní náhodná veličina

Náhodná veličina X je **diskrétní**, pokud hodnoty $X(s)$ přes všechny $s \in \mathcal{S}$ tvoří buď

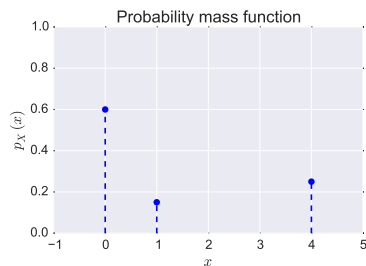
- ▶ konečnou množinu hodnot $a_1, a_2, \dots, a_n$, nebo
- ▶ nekonečnou, ale spočetnou množinu $a_1, a_2, \dots$

Podpora (Support) n.v. X : $\mathcal{S}_X = \{x \in \mathbb{R} : P(X = x) > 0\} = \{a_1, a_2, \dots\}$

Pravděpodobnostní funkce (rozdělení pravděpodobnosti)

diskrétní n.v. X je funkce p_X definovaná jako

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{s \in \mathcal{S} : X(s) = x\}).$$



Notes

Nakreslete si jak to vypadá pro experiment hodu třemi mincemi a $X(s) = \text{počet hlav}$.

Střední (očekávaná - Expected) hodnota n.v.

Před začátkem experimentu, kolik **očekávám** , že padne hlav?

Střední hodnota diskrétní n.v. X se označuje jako EX a je definována jako

$$EX = \sum_{t \in \mathbb{R}} t \cdot p_X(t) = \sum_{t \in \mathcal{S}_X} t \cdot p_X(t).$$

Pro stejné pravděpodobné výsledky $s \in \mathcal{S}$ platí také $EX = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{s \in \mathcal{S}} X(s).$

Vlastnosti EX :

- ▶ $Er = r$, $E(EX) = EX$
- ▶ $E(X + Y) = EX + EY$, $E(X + r) = EX + r$, $E(X - Y) = EX - EY$
- ▶ $E(rX + sY) = rEX + sEY$
- ▶ Pro *nezávislé* n.v.: $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$.

Notes

Očekávaná hodnota náhodné veličiny je často tím hlavním co nás zajímá. Můžeme hodnotu chápat jako vážený průměr, váha je dána pravděpodobností výskytu

Střední (očekávaná - Expected) hodnota n.v.

Před začátkem experimentu, kolik **očekávám**, že padne hlav?

Střední hodnota diskrétní n.v. X se označuje jako EX a je definována jako

$$EX = \sum_{t \in \mathbb{R}} t \cdot p_X(t) = \sum_{t \in \mathcal{S}_X} t \cdot p_X(t).$$

Pro stejné pravděpodobné výsledky $s \in \mathcal{S}$ platí také $EX = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{s \in \mathcal{S}} X(s)$.

Vlastnosti EX :

- ▶ $Er = r$, $E(EX) = EX$
- ▶ $E(X + Y) = EX + EY$, $E(X + r) = EX + r$, $E(X - Y) = EX - EY$
- ▶ $E(rX + sY) = rEX + sEY$
- ▶ Pro *nezávislé* n.v.: $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$.

24 / 39

Notes

Očekávaná hodnota náhodné veličiny je často tím hlavním co nás zajímá. Můžeme hodnotu chápat jako vážený průměr, váha je dána pravděpodobností výskytu

Střední (očekávaná - Expected) hodnota n.v.

Před začátkem experimentu, kolik **očekávám**, že padne hlav?

Střední hodnota diskrétní n.v. X se označuje jako EX a je definována jako

$$EX = \sum_{t \in \mathbb{R}} t \cdot p_X(t) = \sum_{t \in \mathcal{S}_X} t \cdot p_X(t).$$

Pro stejně pravděpodobné výsledky $s \in \mathcal{S}$ platí také $EX = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{s \in \mathcal{S}} X(s).$

Vlastnosti EX :

- ▶ $Er = r, E(EX) = EX$
- ▶ $E(X + Y) = EX + EY, E(X + r) = EX + r, E(X - Y) = EX - EY$
- ▶ $E(rX + sY) = rEX + sEY$
- ▶ Pro *nezávislé* n.v.: $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY.$

24 / 39

Notes

Očekávaná hodnota náhodné veličiny je často tím hlavním co nás zajímá. Můžeme hodnotu chápat jako vážený průměr, váha je dána pravděpodobností výskytu

Střední (očekávaná - Expected) hodnota n.v.

Před začátkem experimentu, kolik očekávám, že padne hlav?

Střední hodnota diskrétní n.v. X se označuje jako EX a je definována jako

$$EX = \sum_{t \in \mathbb{R}} t \cdot p_X(t) = \sum_{t \in \mathcal{S}_X} t \cdot p_X(t).$$

Pro stejně pravděpodobné výsledky $s \in \mathcal{S}$ platí také $EX = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{s \in \mathcal{S}} X(s).$

Vlastnosti EX :

- ▶ $Er = r, E(EX) = EX$
- ▶ $E(X + Y) = EX + EY, E(X + r) = EX + r, E(X - Y) = EX - EY$
- ▶ $E(rX + sY) = rEX + sEY$
- ▶ Pro *nezávislé* n.v.: $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY.$

24 / 39

Notes

Očekávaná hodnota náhodné veličiny je často tím hlavním co nás zajímá. Můžeme hodnotu chápat jako vážený průměr, váha je dána pravděpodobností výskytu

Někdy nejsou elemenární jevy stejně pravděpodobné ...



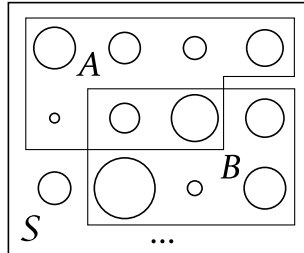
$$\mathcal{S} = \{A, B, C, D, \dots, Z\}$$

S naivní (frekvencistickou) definicí si nevystačíme.

¹https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Scrabble_game_in_progress.jpg

Axiomatická definice pravděpodobnosti (Kolmogorov)

- ▶ Množina elementárních jevů S může být i nekonečná.
- ▶ Elementární jevy nemusejí být stejně pravděpodobné.
- ▶ „Axiomatická“:
 1. sestav omezení, která musí pravděpodobnostní funkce dodržet
 2. najdi funkci, která jim vyhovuje



Notes

From discrete to continuous, From Pebble world representation to Venn Diagrams.

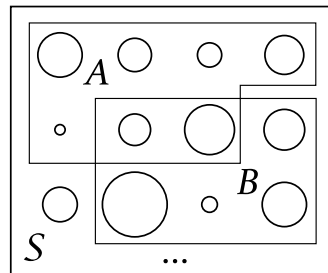
Definice pravděpodobnosti

- ▶ **Pravděpodobnostní funkce** P přiřazuje reálné číslo mezi 0 a 1 každému jevu $A \subseteq \mathcal{S}$.
- ▶ P musí vyhovovat následujícím axiomům:

1. $P(\emptyset) = 0$, $P(\mathcal{S}) = 1$
2. Pro jakékoli vzájemně se vylučující jevy $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

(n může být nekonečné)



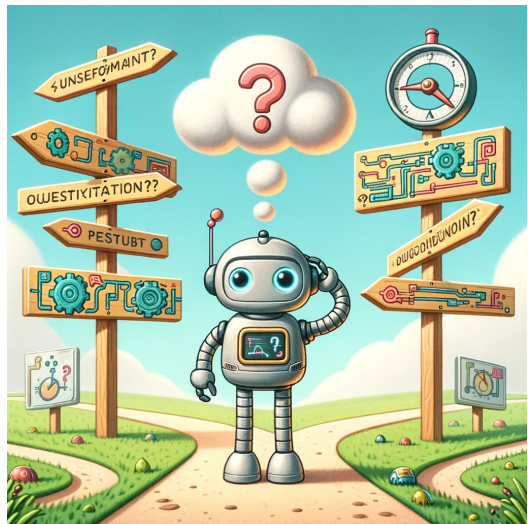
Axiomatická definice celkem logická, (mnohem) více se dozvíte ve specializovaném předmětu Pravděpodobnosti a statistika.

Literatura, další zdroje

Klasické české čtení [2], na domácí stránce <https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/> mnoho dalších zajímavých studijních materiálů.

- [1] Joseph K. Blitzstein and Jessica Hwang.
Introduction to Probability.
CRC Press, 2nd edition, 2019.
<http://probabilitybook.net/>.
- [2] Mirko Navara.
Pravděpodobnost a matematická statistika.
ČVUT v Praze, Praha, 2007.
<https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/>.
- [3] N. Silver.
Signál a šum.
Paseka, 2014.

Zbytek prezentace použijte dle potřeby ...



Jevy a jejich kombinace

Důležité jevy:

- ▶ Jistý jev : $\mathcal{S}$, 1
- ▶ Nemožný jev : $\emptyset$, 0

Kombinace jevů:

- ▶ Konjunkce (A a B): $A \cap B$
- ▶ Disjunkce (A nebo B): $A \cup B$
- ▶ Jev opačný k A: $A^c = \mathcal{S} \setminus A$
- ▶ $A \Rightarrow B$: $A \subseteq B$
- ▶ Jevy neslučitelné : $A_1, \dots, A_n : \bigcap_{i \leq n} A_i = \emptyset$
- ▶ Jevy po dvou neslučitelné = vzájemně se vylučující :
 $A_1, \dots, A_n : \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$

30 / 39

Notes

Je to velmi podobné jako výroková logika: „Při hodu kostkou hodím číslo 5 nebo 6“, „Nehodím liché číslo, ani číslo 6.“

Výrokovou logiku lze k popisu jevů použít místo množin, je to ekvivalentní popis. Je dobré ale obojí nemixovat.

Jevy a jejich kombinace

Důležité jevy:

- ▶ **Jistý jev** : $\mathcal{S}, 1$
- ▶ **Nemožný jev** : $\emptyset, 0$

Kombinace jevů:

- ▶ **Konjunkce** (A a B): $A \cap B$
- ▶ **Disjunkce** (A nebo B): $A \cup B$
- ▶ **Jev opačný k** A : $A^c = \mathcal{S} \setminus A$
- ▶ $A \Rightarrow B$: $A \subseteq B$
- ▶ **Jevy neslučitelné** : $A_1, \dots, A_n : \bigcap_{i \leq n} A_i = \emptyset$
- ▶ **Jevy po dvou neslučitelné = vzájemně se vylučující** :
 $A_1, \dots, A_n : \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$

30 / 39

Notes

Je to velmi podobné jako výroková logika: „Při hodu kostkou hodím číslo 5 nebo 6“, „Nehodím liché číslo, ani číslo 6.“

Výrokovou logiku lze k popisu jevů použít místo množin, je to ekvivalentní popis. Je dobré ale obojí nemixovat.

Úplný systém jevů

Úplný systém jevů je každá množina jevů $B_1, \dots, B_n$, které se vzájemně vylučují a současně

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = \mathcal{S}.$$

- ▶ Množina elementárních jevů $\mathcal{S}$ je z definice úplný systém jevů.
- ▶ Jevy $\{C, C^c\}$ tvoří úplný systém jevů: $C \cap C^c = \emptyset$ and $C \cup C^c = \mathcal{S}$.

Proč je úplný systém jevů důležitý koncept?

Notes

Proč je úplný systém jevů důležitý koncept?

Protože víme, že výsledkem experimentu je právě jeden z jevů v úplném systému. Proč?

Úplný systém jevů

Úplný systém jevů je každá množina jevů $B_1, \dots, B_n$, které se vzájemně vylučují a současně

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = \mathcal{S}.$$

- ▶ Množina elementárních jevů $\mathcal{S}$ je z definice úplný systém jevů.
- ▶ Jevy $\{C, C^c\}$ tvoří úplný systém jevů: $C \cap C^c = \emptyset$ and $C \cup C^c = \mathcal{S}$.

Proč je úplný systém jevů důležitý koncept?

Notes

Proč je úplný systém jevů důležitý koncept?

Protože víme, že výsledkem experimentu je právě jeden z jevů v úplném systému. Proč?

Frekventistická :

- ▶ Relativní četnost jevu po mnoha opakováních náhodného pokusu.

Bayesovská :

- ▶ Stupeň důvěry v to, že jev nastane.
- ▶ Umožňuje nám přiřadit pravděpodobnosti k výrokům typu “kandidát A vyhraje volby” nebo “podezřelý X je vinen”, ačkoli nemůžeme opakovat stejné volby nebo stejný zločin stále dokola.

Vlastnosti pravděpodobnostní funkce

Pro jakoukoli platnou pravděpodobnostní funkci musí platit:

- ▶ $P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$ (z definice)
- ▶ $P(\emptyset) = 0$; $P(\mathcal{S}) = 1$ (axiomy)
- ▶ $P(A^c) = 1 - P(A)$
- ▶ Pokud $A \subseteq B$, pak $P(A) \leq P(B)$
- ▶ Pokud $A \subseteq B$, pak $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
- ▶ Pokud $A \cap B = \emptyset$, pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (*aditivita*)
- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Notes

Důkazy ponecháme specializovanějšímu předmětu. Intuitivní náhled se snadno získá kreslením různých variant oblázkových světů, či Vennových diagramů.

Příklad 3: Pravděpodobnost částí

Vybereme-li z populace náhodně jednoho člověka, pak pro něj platí:

- ▶ Trpí nemocí X a je mladší 18 let s pravděpodobností 0.01.
- ▶ Trpí nemocí X a je mu/jí mezi 18 a 65 lety s pravděpodobností 0.05.
- ▶ Trpí nemocí X a je starší 65 let s pravděpodobností 0.09.

Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný člověk má nemoc X?

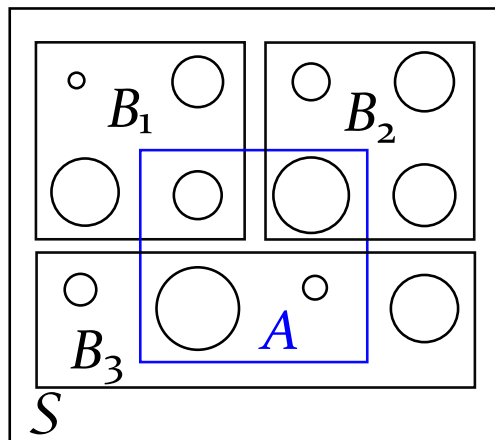
Vlastnosti pravděpodobnostní funkce (pokr.)

Pokud je $\{B_1, \dots, B_n\}$ úplný systém jevů, pak
pro jakýkoli jev $A \subseteq \mathcal{S}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) .$$

Konkrétně, pro úplný systém jevů $\{C, C^c\}$

$$P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap C^c) .$$



Nezávislé jevy

Vzpomínáte na čerpadla u elektrárny? Chtěli bychom, aby byla nezávislá!

Jevy A a B jsou nezávislé právě tehdy, když

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Jsou-li A a B nezávislé, pak

- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$,
- ▶ a páry A, B^c a A^c, B a A^c, B^c jsou také nezávislé.

Notes

U čerpadel bychom například chtěli, aby byla připojena k různým zdrojům elektriny. Ideálně třeba i různým zdrojem energie.

Nezávislé jevy

Vzpomínáte na čerpadla u elektrárny? Chtěli bychom, aby byla nezávislá!

Jevy A a B jsou **nezávislé** právě tehdy, když

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Jsou-li A a B nezávislé, pak

- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$,
- ▶ a páry A, B^c a A^c, B a A^c, B^c jsou také nezávislé.

Notes

U čerpadel bychom například chtěli, aby byla připojena k různým zdrojům elektriny. Ideálně třeba i různým zdrojem energie.

Nezávislé jevy

Vzpomínáte na čerpadla u elektrárny? Chtěli bychom, aby byla nezávislá!

Jevy A a B jsou **nezávislé** právě tehdy, když

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Jsou-li A a B nezávislé, pak

- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$,
- ▶ a páry A, B^c a A^c, B a A^c, B^c jsou také nezávislé.

Notes

U čerpadel bychom například chtěli, aby byla připojena k různým zdrojům elektriny. Ideálně třeba i různým zdrojem energie.

Nezávislost jevů: hod dvěma mincemi

- ▶ A - na první minci padla hlava
- ▶ B - na druhé minci padla hlava
- ▶ C - na mincích padly různé symboly

Které skupiny jevů jsou nezávislé?

- A žádná skupina jevů
- B dvojice (A, B) , (B, C) , (A, C)
- C dvojice (A, B) , (B, C) , (A, C) i trojice (A, B, C)
- D pouze trojice (A, B, C)

37 / 39

Notes

Každá dvojice jevů z A, B, C je nezávislá. Ale trojice (A, B, C) nezávislá není.

Mohou být dvojice (A, A) a (A, A^c) nezávislé?

Kdy pro (A, A) platí, že $P(A \cap A) = P(A)P(A) = P(A)$?

Kdy pro (A, A^c) platí, že $P(A \cap A^c) = P(A)P(A^c) = P(A)(1 - P(A))$?

Nezávislost jevů: hod dvěma mincemi

- ▶ A - na první minci padla hlava
- ▶ B - na druhé minci padla hlava
- ▶ C - na mincích padly různé symboly

Které skupiny jevů jsou nezávislé?

- A žádná skupina jevů
- B dvojice (A, B) , (B, C) , (A, C)
- C dvojice (A, B) , (B, C) , (A, C) i trojice (A, B, C)
- D pouze trojice (A, B, C)

Notes

Každá dvojice jevů z A, B, C je nezávislá. Ale trojice (A, B, C) nezávislá není.

Mohou být dvojice (A, A) a (A, A^c) nezávislé?

Kdy pro (A, A) platí, že $P(A \cap A) = P(A)P(A) = P(A)$?

Kdy pro (A, A^c) platí, že $P(A \cap A^c) = P(A)P(A^c) = P(A)(1 - P(A))$?

- ▶ $P(S|B) = 1$, $P(\emptyset|B) = 0$.
- ▶ $P(A|A) = 1$, $P(A^c|A) = 0$.
- ▶ Pokud $B \subseteq A$, pak $P(A|B) = 1$.
- ▶ Pokud $P(A \cap B) = 0$, pak $P(A|B) = 0$.
- ▶ Pokud $A_1, \dots, A_n$ jsou vzájemně se vylučující jevy, pak $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i|B)$.
- ▶ Jevy A, B jsou nezávislé právě tehdy, když $P(A|B) = P(A)$ (pokud je $P(A|B)$ definována).

Věta o úplné pravděpodobnosti

Nechť $B_1, \dots, B_n$ je úplný systém jevů vzhledem k $\mathcal{S}$ (tj., B_i jsou vzájemně neslučitelné a jejich sjednocením je $\mathcal{S}$) s $P(B_i) > 0$ pro všechna i .

Pak

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

