

Část první

Jazyk predikátové logiky \mathcal{L} je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{R\}, & ar(R) &= 2 \\ \text{Func} &= \{f, g\}, & ar(f) &= 1, ar(g) = 2 \\ \text{Kons} &= \{a\}\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka \mathcal{L} je dána následovně:

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m + n \leq 15\} \\ \llbracket f \rrbracket &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ & n \mapsto n + 2 \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \\ & (m, n) \mapsto m \cdot n \\ \llbracket a \rrbracket &= 5\end{aligned}$$

Úloha 1, rozmezí hodnocení: $\langle -5, 5 \rangle$ Formule φ je definována jako $\forall x \exists y R(x, y)$. Ověřte pravdivost sentence φ , tedy rozhodněte, zda $I \models \varphi$.

Řešení. Neformální úvaha: Formule $\forall x \exists y R(x, y)$ v naší interpretaci znamená tvrzení

„Pro každé přirozené číslo existuje takové přirozené číslo, že jejich součet je menší či roven patnácti.“

Vidíme, že toto tvrzení neplatí:

1. Tvrzení, o jehož pravdivosti rozhodují, je obecné: „Pro každé ...“. Abych takové tvrzení vyvrátil, musím vybrat přirozené číslo n , pro které není pravda tvrzení

„Existuje takové přirozené číslo m , pro které platí $n + m \leq 15$ “.

2. Zvolme si $n = 16$. Chceme ukázat, že neplatí tvrzení

„Existuje takové přirozené číslo m , pro které platí $16 + m \leq 15$ “.

3. Jednoduchá úvaha z aritmetiky přirozených čísel ozřejmí, že toto tvrzení je skutečně nepravdivé.

Tvrším tedy, že $I \not\models \varphi$.

Kdyby

$$I \models \forall x \exists y R(x, y),$$

tak by (například) pro kontext proměnných $\rho = \varepsilon[x := 16]$, tedy kontext

$$\rho : x \mapsto 16$$

mělo platit

$$I \models_{\rho} \exists y R(x, y).$$

To znamená, že by měl existovat update kontextu ρ v proměnné y o nějakou hodnotu d takový, aby platilo

$$I \models_{\rho[y:=d]} R(x, y).$$

Tedy, pro nějaké $d \in \mathbb{N}$ by mělo platit

$$16 + d \leq 15.$$

To ale neplatí. Ukázali jsme, že skutečně $I \not\models \varphi$.

Úloha 2, rozmezí hodnocení: $\langle -5, 5 \rangle$ Necht' seznam deklarovaných proměnných je $D = (x)$ a formuli ψ definujme jako $R(g(x, x), f(f(a)))$. Spočtete význam formule ψ , tedy nalezněte $\llbracket \psi \rrbracket_D$.

Řešení. Myšlenka řešení: Zajímá mě, pro která přirozená čísla platí, že je součet jejich druhé mocniny s číslem $5 + 2 + 2$ menší nebo roven číslu 15.

„Výpočet“: Význam formule ψ je následující:

$$\begin{aligned} \llbracket \psi \rrbracket_D &= \{ \rho(x) \mid \rho : \{x\} \rightarrow \mathbb{N}, I \models_{\rho} \psi \} \\ &= \{ n \in \mathbb{N} \mid n \cdot n + ((5 + 2) + 2) \leq 15 \} \\ &= \{ n \in \mathbb{N} \mid n^2 + 9 \leq 15 \} \\ &= \{ n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 6 \} \\ &= \{ 0, 1, 2 \} \subseteq \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Část druhá

Úloha 3, rozmezí hodnocení: $\langle 0, 5 \rangle$ Nalezněte alespoň tříprvkový model množiny sentencí

$$\{ \forall x \neg (f(x) = x), \forall x R(x, f(x)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow \neg R(y, x)), \exists y \top \}.$$

U každé sentence pečlivě popište, proč je ve vaší interpretaci pravdivá.

Řešení. Zkonstruujeme interpretaci I . Uvažujme tříprvkové universum

$$U = \{a, b, c\},$$

necht'

$$\llbracket R \rrbracket = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$$

a necht'

$$\begin{aligned} \llbracket f \rrbracket : U &\rightarrow U \\ a &\mapsto b \\ b &\mapsto c \\ c &\mapsto a. \end{aligned}$$

Pak zjevně $\llbracket f \rrbracket(a) \neq a$, $\llbracket f \rrbracket(b) \neq b$ a $\llbracket f \rrbracket(c) \neq c$, tedy $I \models \forall x \neg(f(x) = x)$. Také platí $(a, \llbracket f \rrbracket(a)) \in \llbracket R \rrbracket$, $(b, \llbracket f \rrbracket(b)) \in \llbracket R \rrbracket$ a $(c, \llbracket f \rrbracket(c)) \in \llbracket R \rrbracket$, a proto $I \models \forall x R(x, f(x))$. Formule $\forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow \neg R(y, x))$ je v I pravdivá, neboť $(a, b) \in \llbracket R \rrbracket$, ale $(b, a) \notin \llbracket R \rrbracket$, $(b, c) \in \llbracket R \rrbracket$, ale $(c, b) \notin \llbracket R \rrbracket$, a $(c, a) \in \llbracket R \rrbracket$, ale $(a, c) \notin \llbracket R \rrbracket$.

Úloha 4, rozmezí hodnocení: $\langle 0, 5 \rangle$ Přírozenou dedukcí dokažte následující:

$$\forall x(P(x) \Rightarrow S(x)), \forall x(Q(x) \Rightarrow S(x)) \vdash (\exists y(P(y) \vee Q(y))) \Rightarrow (\exists z S(z))$$