Úloha 1. Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{R\}, \quad ar(R) = 2 \\ \mathsf{Func} &= \emptyset \\ \mathsf{Kons} &= \emptyset \end{aligned}$$

Mějme tři sentence

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \forall x R(x,x) \\ \varphi_2 &= \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \\ \varphi_3 &= \forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z)) \end{aligned}$$

Sestrojte tři interpretace, ve kterých jsou vždy pravdivé právě dvě ze tří výše uvedených sentencí. Až se vám to podaří, pokuste se najít *nejmenší* takové interpretace (to jest, interpretace s universem, které má nejmenší možný počet prvků).

Úloha 2. Rozlište sentencemi matematické struktury $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$ a $(\mathbb{Q}, <)$. Používáme jazyk predikátové logiky s jediným (binárním) predikátovým symbolem $<$, který zapisujeme infixně a v daných matematických strukturách ho interpretujeme jako skutečnou ostrou nerovnost.

Co znamená *rozlišit* dvě interpretace nějakého jazyka predikátové logiky? To znamená najít sentenci, která je pravdivá v jedné intepretaci, ale nepravdivá v druhé intepretaci (či naopak).

Úloha 3. Mějme matematickou strukturu $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, tedy přirozená čísla s operacemi sčítání a násobení. Uvažujme příslušný jazyk predikátové logiky (obsahující dva binární funkční symboly, dejme tomu $+$ a $\cdot$) a interpretujme tento jazyk v dané matematické struktuře. Sestrojte formule s následujícím významem:

1. Formule φ, kde $\mathsf{free}(\varphi) = \{x\}$ a
$$[\![\varphi]\!]_{(x)} = \{0\}.$$
2. Formule ψ, kde $\mathsf{free}(\psi) = \{x\}$ a
$$[\![\psi]\!]_{(x)} = \{1\}.$$
3. Formule α, kde $\mathsf{free}(\alpha) = \{y, z\}$ a
$$[\![\alpha]\!]_{(y,z)} = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid n \text{ je následníkem } m\}.$$
4. Formule β, kde $\mathsf{free}(\beta) = \{y, z\}$ a
$$[\![\beta]\!]_{(y,z)} = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}.$$

Úloha 4. Nalezněte sentenci, která charakterisuje

1. všechny jednoprvkové interpretace,
2. všechny dvouprvkové interpretace,
3. nulaprvkovou intepretaci.

Co znamená, že sentence φ *charakterisuje* všechny jednoprvkové interpretace? To znamená, že je φ pravdivá právě pro ty interpretace $\mathcal{I}$, jejichž universum má přesně jeden prvek.

Obecněji: Co znamená, že sentence φ *charakterisuje* třídu interpretací C? To znamená, že je φ pravdivá právě pro ty interpretace $\mathcal{I}$, které leží v C.