Úlohy matematické praxe

Úloha 1. Uvažujte jazyk predikátové logiky s dvěma unárními funkčními symboly: f a g. Formalisujte tvrzení „f je prostá funkce“, poté formalisujte důsledek „složení dvou prostých funkcí f a g je prostá funkce“, a dokažte ho.

Úloha 2. Uvažujte jazyk predikátové logiky s dvěma unárními funkčními symboly: f a g. Formalisujte tvrzení „f je surjektivní funkce“, poté formalisujte důsledek „složení dvou surjektivních funkcí f a g je surjektivní funkce“, a dokažte ho.

Úloha 3. Formalisujte následující tvrzení:

Průnikem dvou symetrických relací je relace symetrická.

Dokažte toto tvrzení.

Úloha 4. Formalisujte následující tvrzení:

Složení dvou reflexivních relací je relace reflexivní.

Dokažte toto tvrzení.

Úlohy ze starých zkoušek

Úloha 5. Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x \forall y((\exists z M(y,z)) \Rightarrow M(x,y)),\ \ \exists x \exists y M(x,y) \vdash \forall x \forall y M(x,y)$$

(*Každý miluje milovníka. Někdo někoho miluje. Proto všichni všechny milují.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 6. Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\exists x(R(x,x) \wedge \forall y Q(x,y)),\ \neg\exists x((\exists y R(x,y)) \wedge Q(x,x))\}$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 7. Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x(\exists y(M(x,y) \vee M(y,x)) \Rightarrow M(x,x)), \exists x \exists y M(x,y) \vdash \exists x M(x,x)$$

(*Každý, kdo miluje či je milován, miluje sám sebe. Někdo někoho miluje. Tedy někdo miluje sám sebe.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 8. Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x \forall y((P(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \neg Q(y)) \vdash \forall z \neg(P(z) \wedge Q(z))$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 9. Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$M = \{\forall x S(x,x),\ (\forall x \exists y S(y,x)) \Rightarrow (\exists y \forall x \neg S(x,y))\}$$

Pokud je množina M splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z M spor.

Úloha 10. Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x(K(x) \Rightarrow Z(x)) \vdash \forall x(\exists y(K(y) \wedge O(x,y)) \Rightarrow \exists y(Z(y) \wedge O(x,y)))$$

(*Koně jsou zvířata. Proto ocas koně je ocasem zvířete.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 11. Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y(R(x,y) \wedge P(y)),\ \exists z P(z),\ \forall x(P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(y,x))\}$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 12. Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\exists x \exists y R(x,y),\ \exists x \forall y(x = y) \vdash \forall x \forall y R(x,y)$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 13. Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} \forall x(B(x) \Rightarrow (\exists y M(x,y) \Rightarrow \exists y M(y,x))), \\ \forall x(\exists y M(y,x) \Rightarrow M(x,x)), \\ \neg\exists x M(x,x) \\ \vdash \forall x(B(x) \Rightarrow \forall y \neg M(x,y)) \end{aligned}$$

(*Všichni blonďatí milovníci jsou milováni. Všichni, kdo jsou milováni, milují sami sebe. Nikdo nemiluje sám sebe. Proto blonďatí nikoho nemilují.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 14. Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x((\exists y M(x,y)) \Rightarrow \exists y(M(x,y) \wedge \forall z M(y,z))),\ \ \exists x \exists y M(x,y) \vdash \exists x \forall y M(x,y)$$

(*Každý, kdo někoho miluje, miluje někoho, kdo miluje všechny. Někdo někoho miluje. Proto někdo miluje všechny.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 15. Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\exists x \exists y R(x,y),\ \exists x \forall y(x = y),\ \exists x \exists y \neg R(x,y)\}$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 16. Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y)) \vdash \exists x P(x) \wedge \forall y \forall z((P(y) \wedge P(z)) \Rightarrow y = z)$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Hádankové úlohy

Úloha 17. Jazyk $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pred} &= \{Pes, Vyje, Ma, Kocka, Mys, PSS\},\\
&\quad ar(Pes, Vyje, Kocka, Mys, PSS) = 1\\
&\quad ar(Ma) = 2\\
\mathsf{Func} &= \emptyset,\\
\mathsf{Kons} &= \{jan\}
\end{aligned}$$

- Formalisujte v jazyce $\mathcal{L}$ predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka:

  φ_1: Všichni psi vyjí.

  φ_2: Kdokoli, kdo má kočku, nemá žádnou myš.

  φ_3: Kdo má problémy se spaním, nemá nic, co vyje.

  φ_4: Jan má kočku nebo psa.

  φ_5: Pokud má Jan problémy se spaním, nemá žádné myši.

- Přirozenou dedukcí rozhodněte, zda platí logický důsledek

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \vdash \varphi_5.$$

Úloha 18. Formalisujte ve vhodně zvoleném jazyce $\mathcal{L}$ predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka, a výsledné formule označte $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, jak je naznačeno vždy nalevo od zadané věty:

φ_1 Každý člověk má právo sníst cokoli, co je hloupější než některý vepř.

φ_2 Pašík je vepř chytřejší než jakékoli nemluvně (tj. než všechna nemluvňata).

φ_3 Každý člověk má právo sníst jakékoli nemluvně.

Dokažte, že z formulí φ_1, φ_2 logicky plyne formule φ_3.

Úloha 19. Formalisujte ve vhodně zvoleném jazyce $\mathcal{L}$ predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka, a výsledné formule označte $\varphi_1, \ldots, \varphi_7$, jak je naznačeno vždy nalevo od zadané věty:

φ_1: Každý, kdo kupuje kila mrkve, vlastní králíka nebo obchod.

φ_2: Každý pes honí nějakého králíka.

φ_3: Marie kupuje kila mrkve.

φ_4: Každý, kdo vlastní králíka, nenávidí cokoli, co honí nějakého králíka.

φ_5: Jan vlastní psa.

φ_6: Jakmile někdo nenávidí něco, co vlastní někdo další, bude s ním odmítat chodit. (Pro každého x, který nenávidí y, které je vlastněno nějakým z, platí, že x bude odmítat chodit se z.)

φ_7: Pokud Marie nevlastní obchod, bude odmítat chodit s Janem.

Predikát „kupovat kila mrkve“ můžete deklarovat jako unární. Dokažte, že z formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$ logicky plyne formule φ_7.

Úloha 20. Formalisujte ve vhodně zvoleném jazyce $\mathcal{L}$ predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka, a výsledné formule označte $\varphi_1, \ldots, \varphi_7$, jak je naznačeno vždy nalevo od zadané věty:

φ_1: Každý, kdo vynikne na zkoušce, poctivě studuje, je génius nebo má štěstí.

φ_2: Každý, kdo dostane A, vynikne na zkoušce.

φ_3: Žádný student OI nemá štěstí.

φ_4: Každý, kdo pije pivo, nestuduje.

φ_5: Pokud každý student OI dostane A, pak je každý student OI, který pije pivo, génius.

Dokažte, že z formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ logicky plyne formule φ_5.

Úloha 21. Přirozenou dedukcí ukažte, že platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} \forall x(S(x) \Rightarrow \forall y(K(y) \Rightarrow V(x,y))), \\ \exists x(K(x) \wedge \forall y(O(y) \Rightarrow V(x,y))), \\ \forall x \forall y \forall z((V(x,y) \wedge V(y,z)) \Rightarrow V(x,z)) \\ \vdash \forall x(S(x) \Rightarrow \forall y(O(y) \Rightarrow V(x,y))). \end{aligned}$$

(*Každý slon váží více než jakýkoli kůň. Nějaký kůň váží více než jakýkoli osel. Vážit více je transitivní vztah. Proto každý slon váží více než jakýkoli osel.*)

Můžete předpokládat, že pracujeme s jazykem predikátové logiky, ve kterém jsou všechny výše napsané řetězce sentencemi.