Úlohy matematické praxe

Úloha 1. Uvažujte jazyk predikátové logiky s dvěma unárními funkčními symboly: f a g. Formalisujte tvrzení „f je prostá funkce“, poté formalisujte důsledek „složení dvou prostých funkcí f a g je prostá funkce“, a dokažte ho.

Řešení Nejprve sestrojme sentenci formalisující tvrzení „f je prostá“:

$$\forall x \forall y((f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)).$$

Analogicky lze formalisovat i tvrzení „g je prostá“. Formalisaci tvrzení „složení prostých je prostá“ provedeme následovně:

$$\begin{aligned} &\forall x \forall y((f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)),\\ &\forall x \forall y((g(x) = g(y)) \Rightarrow (x = y))\\ \vdash\ &\forall x \forall y((g(f(x)) = g(f(y))) \Rightarrow (x = y)). \end{aligned}$$

Dokažme nyní, že tento logický důsledek platí.

1.	$\forall x \forall y((f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y))$	P
2.	$\forall x \forall y((g(x) = g(y)) \Rightarrow (x = y))$	P
3.	x_0	D
4.	y_0	D
5.	$g(f(x_0)) = g(f(y_0))$	P
6.	$\forall y((g(f(x_0)) = g(y)) \Rightarrow (f(x_0) = y))$	e$\forall x$, 2
7.	$(g(f(x_0)) = g(f(y_0))) \Rightarrow (f(x_0) = f(y_0))$	e$\forall y$, 6
8.	$f(x_0) = f(y_0)$	e$\Rightarrow$, 5, 7
9.	$\forall y((f(x_0) = f(y)) \Rightarrow (x_0 = y))$	e$\forall x$, 1
10.	$(f(x_0) = f(y_0)) \Rightarrow (x_0 = y_0)$	e$\forall y$, 9
11.	$x_0 = y_0$	e$\Rightarrow$, 8, 10
12.	$(g(f(x_0)) = g(f(y_0))) \Rightarrow (x_0 = y_0)$	i$\Rightarrow$, 5–11
13.	$\forall y((g(f(x_0)) = g(f(y))) \Rightarrow (x_0 = y))$	i$\forall y$, 4–12
14.	$\forall x \forall y((g(f(x)) = g(f(y))) \Rightarrow (x = y))$	i$\forall x$, 3–13

Porovnejte nyní tento formální důkaz s klasickým matematickým důkazem téhož faktu.

1. Uvažujme dvě funkce $f : U \to U$ a $g : U \to U$. (Odpovídá jazyku predikátové logiky se dvěma unárními funkčními symboly.)
2. Nechť jsou obě funkce prosté. (Odpovídá prvním dvěma řádkům formálního důkazu.)
3. Chceme ukázat, že složení $g \cdot f$ těchto funckí je znovu funkcí prostou. (Odpovídá poslednímu řádku formálního důkazu, tedy závěru.)
4. Mějme tedy libovolné dva prvky $u, v \in U$. (Odpovídá deklaraci proměnných na řádcích 3 a 4. My si bereme „libovolné" prvky z množiny U.)
5. Nechť $g(f(u)) = g(f(v))$. Chceme dokázat, že pak $u = v$. (To odpovídá přidanému předpokladu $g(f(x_0)) = g(f(y_0))$ na řádku 5. Naším cílem je s tímto přidaným předpokladem dokázat $x_0 = y_0$, řádek 11.)
6. Jelikož $g(x) = g(y)$ implikuje $x = y$ pro všechna x a y, je tomu tak i v případě prvků $f(u)$ a $f(v)$. Z $g(f(u)) = g(f(v))$ tedy můžeme vyvodit rovnost $f(u) = f(v)$ díky prostotě funkce g. (Odpovídá řádkům 6 až 8 formálního důkazu.)
7. Funkce f je však též prostá, a tedy z faktu $f(u) = f(v)$ můžeme vyvodit $u = v$. (To odpovídá řádkům 9 až 11 formálního důkazu.)
8. Jelikož byly prvky u a v brány z U „libovolně", tvrzení platí obecně, což jsme měli dokázat. (Odpovídá zobecnění, zavedení obecných kvantifikátorů na řádcích 13 a 14.)

Povšimněte si, že naše varianta tvrzení o skládání prostých funkcích není zcela obecná: obě funkce mají „domén" i „kodomén" totožný, a to vždy U. Obecněji můžeme skládat funkce $f : A \to B$, $g : B \to C$, a i v této obecnosti platí, že složení prostých je prostá.

Dále si všimněte klasických matematických slovních spojení „mějme", „nechť" – odpovídají deklaracím a zavádění předpokladů. Zobecnění je prováděno divnou formulací o tom, že prvky $u, v \in U$ byly voleny „libovolně". Přesněji řečeno jsme v našem (neformálním) důkazu vytvořili argumentační *schéma*, které je aplikovatelné na všechny dvojice prvků z množiny U, a tedy tvoří obecný důkaz.

Úloha 2. Uvažujte jazyk predikátové logiky s dvěma unárními funkčními symboly: f a g. Formalisujte tvrzení „f je surjektivní funkce", poté formalisujte důsledek „složení dvou surjektivních funkcí f a g je surjektivní funkce", a dokažte ho.

Řešení Nejprve sestrojme sentenci formalisující tvrzení „f je surjektivní":

$$\forall y \exists x (y = f(x)).$$

Analogicky lze formalisovat i tvrzení „g je surjektivní". Formalisaci tvrzení „složení surjektivních funkcí je surjektivní funkce" provedeme následovně:

$$\begin{aligned} &\forall y \exists x (y = f(x)),\\ &\forall y \exists x (y = g(x))\\ \vdash\ &\forall y \exists x (y = g(f(x))). \end{aligned}$$

Dokažme nyní, že tento logický důsledek platí.

1.	$\forall y \exists x (y = f(x))$	P
2.	$\forall y \exists x (y = g(x))$	P
3.	y_0	D
4.	$\exists x (y_0 = g(x))$	e$\forall y$, 2
5.	$z_0 : y_0 = g(z_0)$	W
6.	$\exists x (z_0 = f(x))$	e$\forall x$, 1
7.	$x_0 : z_0 = f(x_0)$	W
8.	$y_0 = g(f(x_0))$	e=, 5, 7
9.	$\exists x (y_0 = g(f(x)))$	i$\exists x$, 8
10.	$\exists x (y_0 = g(f(x)))$	e$\exists x$, 6, 7–9
11.	$\exists x (y_0 = g(f(x)))$	e$\exists x$, 4, 5–10
12.	$\forall y \exists x (y = g(f(x)))$	i$\forall y$, 3–11

Zkuste si napsat klasický matematický důkaz našeho tvrzení. Použijte formální důkaz jako inspiraci. Vidíte, jakým způsobem jednotlivé části formálního důkazu odpovídají důkazu neformálnímu?

Úloha 3. Formalisujte následující tvrzení:

Průnikem dvou symetrických relací je relace symetrická.

Dokažte toto tvrzení.

Řešení Jednou z možností je zavést si jazyk predikátové logiky se třemi binárními predikátovými symboly.

$$\mathsf{Pred} = \{R, S, P\}, \quad \mathsf{ar}(R) = \mathsf{ar}(S) = \mathsf{ar}(P) = 2.$$

Symboly R a S budeme popisovat zadané relace, symbol P použijeme pro označení průniku R a S. K tomu je třeba ještě přidat axiom

$$\forall x \forall y (P(x,y) \Leftrightarrow (R(x,y) \wedge S(x,y))).$$

Ten přesně odpovídá tvrzení, že $[\![P]\!]$ je průnikem $[\![R]\!]$ a $[\![S]\!]$. Symetrii např. pro R popíšeme axiomem

$$\forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x)).$$

Celé tvrzení ze zadání lze tedy formalisovat ve tvaru úsudku

$$\begin{aligned} \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x)), \\ \forall x \forall y (S(x,y) \Rightarrow S(y,x)), \\ \forall x \forall y (P(x,y) \Leftrightarrow (R(x,y) \wedge S(x,y))) \\ \vdash \forall x \forall y (P(x,y) \Rightarrow P(y,x)). \end{aligned}$$

Dokažme.

1.	$\forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$	P
2.	$\forall x \forall y (S(x,y) \Rightarrow S(y,x))$	P
3.	$\forall x \forall y (P(x,y) \Leftrightarrow (R(x,y) \wedge S(x,y)))$	P
4.	x_0	D
5.	y_0	
6.	$P(x_0, y_0)$	P
7.	$\forall y (P(x_0,y) \Leftrightarrow (R(x_0,y) \wedge S(x_0,y)))$	e$\forall x$, 3
8.	$P(x_0,y_0) \Leftrightarrow (R(x_0,y_0) \wedge S(x_0,y_0))$	e$\forall y$, 7
9.	$R(x_0,y_0) \wedge S(x_0,y_0)$	e$\Leftrightarrow_1$, 6, 8
10.	$R(x_0,y_0)$	e$\wedge_1$, 9
11.	$S(x_0,y_0)$	e$\wedge_2$, 9
12.	$\forall y (R(x_0,y) \Rightarrow R(y,x_0))$	e$\forall x$, 1
13.	$R(x_0,y_0) \Rightarrow R(y_0,x_0)$	e$\forall y$, 12
14.	$R(y_0,x_0)$	e$\Rightarrow$, 10, 13
15.	$\forall y (S(x_0,y) \Rightarrow S(y,x_0))$	e$\forall x$, 2
16.	$S(x_0,y_0) \Rightarrow S(y_0,x_0)$	e$\forall y$, 15
17.	$S(y_0,x_0)$	e$\Rightarrow$, 11, 16
18.	$R(y_0,x_0) \wedge S(y_0,x_0)$	i$\wedge$, 14, 17
19.	$\forall y (P(y_0,y) \Leftrightarrow (R(y_0,y) \wedge S(y_0,y)))$	e$\forall x$, 3
20.	$P(y_0,x_0) \Leftrightarrow (R(y_0,x_0) \wedge S(y_0,x_0))$	e$\forall y$, 19
21.	$P(y_0,x_0)$	e$\Leftrightarrow_2$, 20, 18
22.	$P(x_0,y_0) \Rightarrow P(y_0,x_0)$	i$\Rightarrow$, 6–21
23.	$\forall y (P(x_0,y) \Rightarrow P(y,x_0))$	i$\forall y$, 5–22
24.	$\forall x \forall y (P(x,y) \Rightarrow P(y,x))$	i$\forall x$, 4–23

Možná máte pocit, že důkaz je snadný, jen neohrabaný a zdlouhavý. Možná přemýšlíte o způsobech, jak by šlo náš důkazový systém vylepšit, aby se daly některé „důkazové obraty“, trvající nyní několik kroků, zkrátit na jeden krok. Pokud vaše úvahy vedou tímto směrem, je to silný ukazatel, že jste nejspíše s přirozenou dedukcí již zcela sžiti. Oč krásnější by byl například život, kdybychom v jednom kroku mohli z předpokladů

$$\forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x)), \quad R(x_0, y_0)$$

okamžitě vyvodit

$$R(y_0, x_0).$$

Mít pravidla tohoto typu, být schopni zavádět více proměnných najednou, atd., náš předcházející důkaz by šlo rozumně zkrátit na následující (názvy pro nás neexistujících pravidel jsem si vymyslel):

1.	$\forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$	P
2.	$\forall x \forall y (S(x,y) \Rightarrow S(y,x))$	P
3.	$\forall x \forall y (P(x,y) \Leftrightarrow (R(x,y) \wedge S(x,y)))$	P
4.	x_0, y_0	D
5.	$P(x_0, y_0)$	P
6.	$R(x_0, y_0) \wedge S(x_0, y_0)$	apply 3 $\rightarrow$ using 5
7.	$R(y_0, x_0)$	apply 1 using (e$\wedge_1$, 6)
8.	$S(y_0, x_0)$	apply 2 using (e$\wedge_2$, 6)
9.	$R(y_0, x_0) \wedge S(y_0, x_0)$	i$\wedge$, 7, 8
10.	$P(y_0, x_0)$	apply 3 $\leftarrow$ using 9
11.	$P(x_0, y_0) \Rightarrow P(y_0, x_0)$	i$\Rightarrow$, 5–10
12.	$\forall x \forall y (P(x,y) \Rightarrow P(y,x))$	i$\forall(y,x)$, 4–11

Takový „důkaz“ je čitelnější. Zavedení a důkaz korektnosti pravidel, která v něm neformálně užíváme, je však nad rámec tohoto předmětu. Při práci s důkazovými asistenty (jako je například Coq či Lean) jsou však takováto (a mnohá silnější) usnadnění práce zcela samozřejmá.

Úloha 4. Formalisujte následující tvrzení:

Složení dvou reflexivních relací je relace reflexivní.

Dokažte toto tvrzení.

Řešení Zatímco popis složení dvou funkcí byl v predikátové logice snadný, operaci složení dvou relací musíme formalisovat výrazně složitěji. Zaveďme jazyk predikátové logiky se třemi binárními predikátovými symboly.

$$\mathsf{Pred} = \{R, S, C\}, \quad \mathsf{ar}(R) = \mathsf{ar}(S) = \mathsf{ar}(C) = 2.$$

Symboly R a S budeme popisovat zadané relace, symbol C použijeme pro označení složení relací R a S. K tomu je třeba ještě přidat axiom

$$\forall x \forall y (C(x,y) \Leftrightarrow \exists z (R(x,z) \wedge S(z,y))).$$

Ten přesně odpovídá tvrzení, že $[\![C]\!]$ je složením $[\![R]\!]$ a $[\![S]\!]$. Reflexivitu např. pro R popíšeme axiomem

$$\forall x R(x,x).$$

Celé tvrzení ze zadání lze tedy formalisovat ve tvaru úsudku

$$\begin{aligned} \forall x R(x,x), \\ \forall x S(x,x), \\ \forall x \forall y (C(x,y) \Leftrightarrow \exists z (R(x,z) \wedge S(z,y))) \\ \vdash \forall x C(x,x). \end{aligned}$$

Korektnost tohoto úsudku dokážeme.

$$\begin{array}{r|l|l|}
\multicolumn{1}{r}{1.} & \multicolumn{1}{l}{\forall x R(x,x)} & \multicolumn{1}{l}{\text{P}} \\
\multicolumn{1}{r}{2.} & \multicolumn{1}{l}{\forall x S(x,x)} & \multicolumn{1}{l}{\text{P}} \\
\multicolumn{1}{r}{3.} & \multicolumn{1}{l}{\forall x \forall y (C(x,y) \Leftrightarrow \exists z (R(x,z) \wedge S(z,y)))} & \multicolumn{1}{l}{\text{P}} \\
\cline{2-3}
4. & x_0 & \text{D} \\
5. & R(x_0,x_0) & \text{e}\forall x,\ 1 \\
6. & S(x_0,x_0) & \text{e}\forall x,\ 2 \\
7. & R(x_0,x_0) \wedge S(x_0,x_0) & \text{i}\wedge,\ 5,\ 6 \\
8. & \exists z (R(x_0,z) \wedge S(z,x_0)) & \text{i}\exists z,\ 7 \\
9. & \forall y (C(x_0,y) \Leftrightarrow \exists z (R(x_0,z) \wedge S(z,y))) & \text{e}\forall x,\ 3 \\
10. & C(x_0,x_0) \Leftrightarrow \exists z (R(x_0,z) \wedge S(z,x_0)) & \text{e}\forall y,\ 9 \\
11. & C(x_0,x_0) & \text{e}\Leftrightarrow_2,\ 10,\ 8 \\
\cline{2-3}
\multicolumn{1}{r}{12.} & \multicolumn{1}{l}{\forall x C(x,x)} & \multicolumn{1}{l}{\text{i}\forall x,\ 4\text{–}11}
\end{array}$$

Načrtněme pro porovnání i neformální důkaz:

Nechť R a S jsou reflexivní binární relace na množině U. Chceme ukázat, že jejich složení $R \cdot S$ je taktéž reflexivní relace. Musíme tedy ověřit, že pro každé $u \in U$ platí $u(R \cdot S)u$. Zvolme tedy libovolné $u \in U$ a ověřme, že $u(R \cdot S)u$ skutečně platí: stačí ověřit, že pro nějaké $v \in U$ platí uRv a vSu. Takové v ale jistě najdeme: zvolme naše $u \in U$. Stačí jen ověřit, že platí uRu a uSu. To ale víme, jelikož R i S jsou reflexivní. Dokázali jsme tedy, že složení R a S je také reflexivní.

Pečlivě porovnejte neformální důkaz výše s formálním důkazem.

Úlohy ze starých zkoušek

Úloha 5. Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x \forall y((\exists z M(y,z)) \Rightarrow M(x,y)),\ \ \exists x \exists y M(x,y) \vdash \forall x \forall y M(x,y)$$

(*Každý miluje milovníka. Někdo někoho miluje. Proto všichni všechny milují.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x \forall y((\exists z M(y,z)) \Rightarrow M(x,y))$	P
2.	$\exists x \exists y M(x,y)$	P
3.	y_0	D
4.	$\forall y((\exists z M(y,z)) \Rightarrow M(y_0,y))$	e$\forall x$, 1
5.	$a_0 : \exists y M(a_0,y)$	W
6.	$(\exists z M(a_0,z)) \Rightarrow M(y_0,a_0)$	e$\forall y$, 4
7.	$b_0 : M(a_0,b_0)$	W
8.	$\exists z M(a_0,z)$	i$\exists z$, 7
9.	$M(y_0,a_0)$	e$\Rightarrow$, 8, 6
10.	$M(y_0,a_0)$	e$\exists y$, 5, 7–9
11.	$\exists z M(y_0,z)$	i$\exists z$, 10
12.	$\exists z M(y_0,z)$	e$\exists x$, 2, 5–11
13.	$\forall y \exists z M(y,z)$	i$\forall y$, 3–12
14.	x_0	D
15.	y_0	D
16.	$\forall y((\exists z M(y,z)) \Rightarrow M(x_0,y))$	e$\forall x$, 1
17.	$(\exists z M(y_0,z)) \Rightarrow M(x_0,y_0)$	e$\forall y$, 16
18.	$\exists z M(y_0,z)$	e$\forall y$, 13
19.	$M(x_0,y_0)$	e$\Rightarrow$, 18, 17
20.	$\forall y M(x_0,y)$	i$\forall y$, 15–19
21.	$\forall x \forall y M(x,y)$	i$\forall x$, 14–20

Úloha 6. Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\exists x(R(x,x) \land \forall y Q(x,y)),\ \neg\exists x((\exists y R(x,y)) \land Q(x,x))\}$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Řešení Množina S není splnitelná. Předvedeme odvození sporu přirozenou dedukcí.

1.	$\exists x(R(x,x) \land \forall y Q(x,y))$	P
2.	$\neg\exists x((\exists y R(x,y)) \land Q(x,x))$	P
3.	$x_0 : R(x_0,x_0) \land \forall y Q(x_0,y)$	W
4.	$R(x_0,x_0)$	e$\land_1$, 3
5.	$\exists y R(x_0,y)$	i$\exists y$, 5
6.	$\forall y Q(x_0,y)$	e$\land_2$, 3
7.	$Q(x_0,x_0)$	e$\forall y$, 6
8.	$\exists y R(x_0,y) \land Q(x_0,x_0)$	i$\land$, 5, 7
9.	$\exists x(\exists y R(x,y) \land Q(x,x))$	i$\exists x$, 8
10.	$\perp$	e$\neg$, 9, 2
11.	$\perp$	e$\exists x$, 1, 3–10

Úloha 7. Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x(\exists y(M(x,y) \lor M(y,x)) \Rightarrow M(x,x)), \exists x\exists y M(x,y) \vdash \exists x M(x,x)$$

(*Každý, kdo miluje či je milován, miluje sám sebe. Někdo někoho miluje. Tedy někdo miluje sám sebe.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x(\exists y(M(x,y) \vee M(y,x)) \Rightarrow M(x,x))$	P
2.	$\exists x \exists y M(x,y)$	P
3.	$x_0 : \exists y M(x_0, y)$	W
4.	$y_0 : M(x_0, y_0)$	W
5.	$M(x_0, y_0) \vee M(y_0, x_0)$	i$\vee_1$, 4
6.	$\exists y(M(x_0, y) \vee M(y, x_0))$	i$\exists y$, 5
7.	$\exists y(M(x_0, y) \vee M(y, x_0))$	e$\exists y$, 3, 4–6
8.	$\exists y(M(x_0, y) \vee M(y, x_0)) \Rightarrow M(x_0, x_0)$	e$\forall x$, 1
9.	$M(x_0, x_0)$	e$\Rightarrow$, 7, 8
10.	$\exists x M(x,x)$	i$\forall x$, 9
11.	$\exists x M(x,x)$	e$\exists x$, 2, 3–10

Úloha 8. Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x \forall y((P(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \neg Q(y)) \vdash \forall z \neg(P(z) \wedge Q(z))$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x \forall y((P(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \neg Q(y))$	P
2.	z_0	D
3.	$P(z_0) \wedge Q(z_0)$	P
4.	$\forall y((P(z_0) \wedge (z_0 = y)) \Rightarrow \neg Q(y))$	e$\forall x$, 1
5.	$(P(z_0) \wedge (z_0 = z_0)) \Rightarrow \neg Q(z_0)$	e$\forall y$, 4
6.	$P(z_0)$	e$\wedge_1$, 3
7.	$z_0 = z_0$	i$=$
8.	$P(z_0) \wedge (z_0 = z_0)$	i$\wedge$, 6, 7
9.	$\neg Q(z_0)$	e$\Rightarrow$, 8, 5
10.	$Q(z_0)$	e$\wedge_2$, 3
11.	$\perp$	e$\neg$, 10, 9
12.	$\neg(P(z_0) \wedge Q(z_0))$	i$\neg$, 3–11
13.	$\forall z \neg(P(z) \wedge Q(z))$	i$\forall z$, 2–12

Úloha 9. Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$M = \{\forall x S(x,x),\ (\forall x \exists y S(y,x)) \Rightarrow (\exists y \forall x \neg S(x,y))\}$$

Pokud je množina M splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z M spor.

Řešení Množina M není splnitelná. Předvedeme odvození sporu přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x S(x,x)$	P
2.	$(\forall x \exists y S(y,x)) \Rightarrow (\exists y \forall x \neg S(x,y))$	P
3.	x_0	D
4.	$S(x_0,x_0)$	e$\forall x$, 1
5.	$\exists y S(y,x_0)$	i$\exists y$, 4
6.	$\forall x \exists y S(y,x)$	i$\forall x$, 3–5
7.	$\exists y \forall x \neg S(x,y)$	e$\Rightarrow$, 6, 2
8.	$y_0 : \forall x \neg S(x,y_0)$	W
9.	$\neg S(y_0,y_0)$	e$\forall x$, 8
10.	$S(y_0,y_0)$	e$\forall x$, 1
11.	$\perp$	e$\neg$, 10, 9
12.	$\perp$	e$\exists y$, 7, 8–11

Úloha 10. Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x(K(x) \Rightarrow Z(x)) \vdash \forall x(\exists y(K(y) \wedge O(x,y)) \Rightarrow \exists y(Z(y) \wedge O(x,y)))$$

(*Koně jsou zvířata. Proto ocas koně je ocasem zvířete.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x(K(x) \Rightarrow Z(x))$	P
2.	x_0	D
3.	$\exists y(K(y) \wedge O(x_0, y))$	P
4.	$y_0 : K(y_0) \wedge O(x_0, y_0)$	W
5.	$K(y_0)$	e$\wedge_1$, 4
6.	$K(y_0) \Rightarrow Z(y_0)$	e$\forall x$, 1
7.	$Z(y_0)$	e$\Rightarrow$, 5, 6
8.	$O(x_0, y_0)$	e$\wedge_2$, 4
9.	$Z(y_0) \wedge O(x_0, y_0)$	i$\wedge$, 7, 8
10.	$\exists y(Z(y) \wedge O(x_0, y))$	i$\exists y$, 9
11.	$\exists y(Z(y) \wedge O(x_0, y))$	e$\exists y$, 3, 4–10
12.	$\exists y(K(y) \wedge O(x_0, y)) \Rightarrow \exists y(Z(y) \wedge O(x_0, y))$	i$\Rightarrow$, 3–11
13.	$\forall x(\exists y(K(y) \wedge O(x, y)) \Rightarrow \exists y(Z(y) \wedge O(x, y)))$	i$\forall x$, 2–12

Úloha 11. Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y(R(x, y) \wedge P(y)),\ \exists z P(z),\ \forall x(P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(y, x))\}$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Řešení Množina S není splnitelná. Předvedeme odvození sporu přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x \exists y(R(x,y) \wedge P(y))$	P
2.	$\exists z P(z)$	P
3.	$\forall x(P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(y,x))$	P
4.	$z_0 : P(z_0)$	W
5.	$\exists y(R(z_0,y) \wedge P(y))$	e$\forall x$, 1
6.	$y_0 : R(z_0,y_0) \wedge P(y_0)$	W
7.	$P(y_0)$	e$\wedge_2$, 6
8.	$P(y_0) \Rightarrow \forall y \neg R(y,y_0)$	e$\forall x$, 3
9.	$\forall y \neg R(y,y_0)$	e$\Rightarrow$, 7, 8
10.	$R(z_0,y_0)$	e$\wedge_1$, 6
11.	$\neg R(z_0,y_0)$	e$\forall y$, 9
12.	$\perp$	e$\neg$, 10, 11
13.	$\perp$	e$\exists y$, 5, 6–12
14.	$\perp$	e$\exists z$, 2, 4–13

Úloha 12. Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\exists x \exists y R(x,y),\ \exists x \forall y(x = y) \vdash \forall x \forall y R(x,y)$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$\exists x \exists y R(x,y)$	P
2.	$\exists x \forall y (x = y)$	P
3.	x_0	D
4.	y_0	D
5.	$x_1 : \exists y R(x_1, y)$	W
6.	$y_1 : R(x_1, y_1)$	W
7.	$u : \forall y (u = y)$	W
8.	$u = x_1$	e$\forall y$, 7
9.	$x_1 = u$	sym= , 8
10.	$u = x_0$	e$\forall y$, 7
11.	$R(u, y_1)$	e=, 9, 6
12.	$R(x_0, y_1)$	e=, 10, 11
13.	$u = y_1$	e$\forall y$, 7
14.	$y_1 = u$	sym=, 13
15.	$u = y_0$	e$\forall y$, 7
16.	$R(x_0, u)$	e=, 14, 12
17.	$R(x_0, y_0)$	e=, 15, 16
18.	$R(x_0, y_0)$	e$\exists x$, 2, 7–17
19.	$R(x_0, y_0)$	e$\exists y$, 5, 6–18
20.	$R(x_0, y_0)$	e$\exists x$, 1, 5–19
21.	$\forall y R(x_0, y)$	i$\forall y$, 4–19
22.	$\forall x \forall y R(x,y)$	i$\forall x$, 3–21

Úloha 13. Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned}\forall x (B(x) \Rightarrow (\exists y M(x,y) \Rightarrow \exists y M(y,x))),\\ \forall x (\exists y M(y,x) \Rightarrow M(x,x)),\\ \neg \exists x M(x,x)\\ \vdash \forall x (B(x) \Rightarrow \forall y \neg M(x,y))\end{aligned}$$

(*Všichni blonďatí milovníci jsou milováni. Všichni, kdo jsou milováni, milují sami sebe. Nikdo nemiluje sám sebe. Proto blonďatí nikoho nemilují.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x(B(x) \Rightarrow (\exists y M(x,y) \Rightarrow \exists y M(y,x)))$	P
2.	$\forall x(\exists y M(y,x) \Rightarrow M(x,x))$	P
3.	$\neg\exists x M(x,x)$	P
4.	x_0	D
5.	$B(x_0)$	P
6.	$B(x_0) \Rightarrow (\exists y M(x_0,y) \Rightarrow \exists y M(y,x_0))$	e$\forall x$, 1
7.	$\exists y M(x_0,y) \Rightarrow \exists y M(y,x_0)$	e$\Rightarrow$, 5, 6
8.	y_0	D
9.	$M(x_0,y_0)$	P
10.	$\exists y M(x_0,y)$	i$\exists y$, 9
11.	$\exists y M(y,x_0)$	e$\Rightarrow$, 9, 7
12.	$\exists y M(y,x_0) \Rightarrow M(x_0,x_0)$	e$\forall x$, 2
13.	$M(x_0,x_0)$	e$\Rightarrow$, 11, 12
14.	$\exists x M(x,x)$	i$\exists x$, 13
15.	$\perp$	e$\neg$, 14, 3
16.	$\neg M(x_0,y_0)$	i$\neg$, 9–15
17.	$\forall y\neg M(x_0,y)$	i$\forall y$, 8–16
18.	$B(x_0) \Rightarrow \forall y\neg M(x_0,y)$	i$\Rightarrow$, 5–17
19.	$\forall x(B(x) \Rightarrow \forall y\neg M(x,y))$	i$\forall x$, 4–18

Úloha 14. Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x((\exists y M(x,y)) \Rightarrow \exists y(M(x,y) \wedge \forall z M(y,z))),\ \ \exists x\exists y M(x,y) \vdash \exists x\forall y M(x,y)$$

(*Každý, kdo někoho miluje, miluje někoho, kdo miluje všechny. Někdo někoho miluje. Proto někdo miluje všechny.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x((\exists y M(x,y)) \Rightarrow \exists y(M(x,y) \wedge \forall z M(y,z)))$	P
2.	$\exists x \exists y M(x,y)$	P
3.	$a : \exists y M(a,y)$	W
4.	$(\exists y M(a,y)) \Rightarrow \exists y(M(a,y) \wedge \forall z M(y,z))$	e$\forall x$, 3
5.	$\exists y(M(a,y) \wedge \forall z M(y,z))$	e$\Rightarrow$, 3, 4
6.	$b : M(a,b) \wedge \forall z M(b,z)$	W
7.	$\forall z M(b,z)$	e$\wedge_2$, 5
8.	y_0	D
9.	$M(b,y_0)$	e$\forall z$, 7
10.	$\forall y M(b,y)$	i$\forall y$, 8–9
11.	$\exists x \forall y M(x,y)$	i$\exists x$, 10
12.	$\exists x \forall y M(x,y)$	e$\exists y$, 5, 6–11
13.	$\exists x \forall y M(x,y)$	e$\exists x$, 2, 3–12

Úloha 15. Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\exists x \exists y R(x,y),\ \exists x \forall y (x = y),\ \exists x \exists y \neg R(x,y)\}$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Řešení Množina S je nesplnitelná. Předvedeme odvození sporu logickou dedukcí.

1.	$\exists x \exists y R(x,y)$	P
2.	$\exists x \forall y (x = y)$	P
3.	$\exists x \exists y \neg R(x,y)$	P
4.	$a : \forall y (a = y)$	W
5.	$b : \exists y R(b,y)$	W
6.	$c : R(b,c)$	W
7.	$a = b$	e$\forall y$, 4
8.	$b = a$	sym=, 7
9.	$a = c$	e$\forall y$, 4
10.	$c = a$	sym=, 9
11.	$R(a,c)$	e=, 8, 6
12.	$R(a,a)$	e=, 10, 11
13.	$R(a,a)$	e$\exists y$, 5, 6–12
14.	$R(a,a)$	e$\exists x$, 1, 5–13
15.	$b : \exists y \neg R(b,y)$	W
16.	$c : \neg R(b,c)$	W
17.	$a = b$	e$\forall y$, 4
18.	$b = a$	sym=, 17
19.	$a = c$	e$\forall y$, 4
20.	$c = a$	sym=, 19
21.	$\neg R(a,c)$	e=, 18, 16
22.	$\neg R(a,a)$	e=, 20, 21
23.	$\neg R(a,a)$	e$\exists y$, 15, 16–22
24.	$\neg R(a,a)$	e$\exists x$, 3, 15–23
25.	$\perp$	e$\neg$, 14, 24
26.	$\perp$	e$\exists x$, 2, 4–25

Úloha 16. Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y)) \vdash \exists x P(x) \wedge \forall y \forall z ((P(y) \wedge P(z)) \Rightarrow y = z)$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y))$	P
2.	$x_0 : P(x_0) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x_0 = y)$	W
3.	$P(x_0)$	e$\wedge_1$, 2
4.	$\exists x P(x)$	i$\exists x$, 2
5.	$\forall y(P(y) \Rightarrow x_0 = y)$	e$\wedge_2$, 2
6.	y_0	D
7.	z_0	D
8.	$P(y_0) \wedge P(z_0)$	P
9.	$P(y_0)$	e$\wedge_1$, 8
10.	$P(z_0)$	e$\wedge_2$, 8
11.	$P(y_0) \Rightarrow x_0 = y_0$	e$\forall y$, 2
12.	$P(z_0) \Rightarrow x_0 = z_0$	e$\forall y$, 2
13.	$x_0 = y_0$	e$\Rightarrow$, 9, 11
14.	$x_0 = z_0$	e$\Rightarrow$, 10, 12
15.	$y_0 = z_0$	e$=$, 13, 14
16.	$(P(y_0) \wedge P(z_0)) \Rightarrow y_0 = z_0$	i$\Rightarrow$, 8–15
17.	$\forall z(P(y_0) \wedge P(z)) \Rightarrow y_0 = z$	i$\forall z$, 7–16
18.	$\forall y \forall z(P(y) \wedge P(z)) \Rightarrow y = z$	i$\forall y$, 6–17
19.	$\exists x P(x) \wedge \forall y \forall z(P(y) \wedge P(z)) \Rightarrow y = z$	i$\wedge$, 4, 18
20.	$\exists x P(x) \wedge \forall y \forall z((P(y) \wedge P(z)) \Rightarrow y = z)$	e$\exists x$, 1, 2–19

Hádankové úlohy

Úloha 17. Jazyk $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Pred} &= \{Pes, Vyje, Ma, Kocka, Mys, PSS\},\\
&\quad ar(Pes, Vyje, Kocka, Mys, PSS) = 1\\
&\quad ar(Ma) = 2\\
\mathsf{Func} &= \emptyset,\\
\mathsf{Kons} &= \{jan\}
\end{aligned}
$$

- Formalisujte v jazyce $\mathcal{L}$ predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka:

  φ_1: Všichni psi vyjí.

  φ_2: Kdokoli, kdo má kočku, nemá žádnou myš.

  φ_3: Kdo má problémy se spaním, nemá nic, co vyje.

  φ_4: Jan má kočku nebo psa.

  φ_5: Pokud má Jan problémy se spaním, nemá žádné myši.

- Přirozenou dedukcí rozhodněte, zda platí logický důsledek

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \vdash \varphi_5.$$

Řešení Předvedeme jednu možnou formalisaci daných vět.

φ_1: $\forall x(Pes(x) \Rightarrow Vyje(x))$

φ_2: $\forall x\,(\exists y\,(Kocka(y) \wedge Ma(x,y)) \Rightarrow \neg\exists z\,(Mys(z) \wedge Ma(x,z)))$

φ_3: $\forall x\,(PSS(x) \Rightarrow \neg\exists y\,(Vyje(y) \wedge Ma(x,y)))$

φ_4: $\exists x\,(Ma(jan,x) \wedge (Kocka(x) \vee Pes(x)))$

φ_5: $PSS(jan) \Rightarrow \neg\exists x\,(Ma(jan,x) \wedge Mys(x))$

Úloha 18. Formalisujte ve vhodně zvoleném jazyce $\mathcal{L}$ predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka, a výsledné formule označte $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, jak je naznačeno vždy nalevo od zadané věty:

φ_1 Každý člověk má právo sníst cokoli, co je hloupější než některý vepř.

φ_2 Pašík je vepř chytřejší než jakékoli nemluvně (tj. než všechna nemluvňata).

φ_3 Každý člověk má právo sníst jakékoli nemluvně.

Dokažte, že z formulí φ_1, φ_2 logicky plyne formule φ_3.

Řešení Náš jazyk $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pred} &= \{Clovek, Vepr, Nemluvne, MPS, Hloupejsi\},\\
&\quad ar(Clovek, Vepr, Nemluvne) = 1\\
&\quad ar(MPS, Hloupejsi) = 2\\
\mathsf{Func} &= \emptyset,\\
\mathsf{Kons} &= \{pasik\}
\end{aligned}$$

Předvedeme jednu možnou formalisaci daných vět.

φ_1: $\forall x\,(Clovek(x) \Rightarrow \forall y\,((\exists z(Vepr(z) \wedge Hloupejsi(y,z))) \Rightarrow MPS(x,y)))$

φ_2: $Vepr(pasik) \wedge \forall x(Nemluvne(x) \Rightarrow Hloupejsi(x, pasik))$

φ_3: $\forall x(Clovek(x) \Rightarrow \forall y(Nemluvne(y) \Rightarrow MPS(x,y)))$

Úloha 19. Formalisujte ve vhodně zvoleném jazyce $\mathcal{L}$ predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka, a výsledné formule označte $\varphi_1, \ldots, \varphi_7$, jak je naznačeno vždy nalevo od zadané věty:

φ_1: Každý, kdo kupuje kila mrkve, vlastní králíka nebo obchod.

φ_2: Každý pes honí nějakého králíka.

φ_3: Marie kupuje kila mrkve.

φ_4: Každý, kdo vlastní králíka, nenávidí cokoli, co honí nějakého králíka.

φ_5: Jan vlastní psa.

φ_6: Jakmile někdo nenávidí něco, co vlastní někdo další, bude s ním odmítat chodit. (Pro každého x, který nenávidí y, které je vlastněno nějakým z, platí, že x bude odmítat chodit se z.)

φ_7: Pokud Marie nevlastní obchod, bude odmítat chodit s Janem.

Predikát „kupovat kila mrkve“ můžete deklarovat jako unární. Dokažte, že z formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$ logicky plyne formule φ_7.

Řešení Náš jazyk $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Pred} = \{Kralik, Pes, Obchod, KKM, Vlastni, Nenavidi, Honi, OdmitaChoditS\},\\
&\qquad ar(Kralik, Pes, Obchod, KKM) = 1\\
&\qquad ar(KKM, Vlastni, Nenavidi, Honi, OdmitaChoditS) = 2\\
&\mathsf{Func} = \emptyset,\\
&\mathsf{Kons} = \{jan, marie\}
\end{aligned}$$

Předvedeme jednu možnou formalisaci daných vět.

φ_1: $\forall x(KKM(x) \Rightarrow \exists y((Kralik(y) \vee Obchod(y)) \wedge Vlastni(x,y)))$

φ_2: $\forall x(Pes(x) \Rightarrow \exists y(Kralik(y) \wedge Honi(x,y)))$

φ_3: $KKM(marie)$

φ_4: $\forall x(\exists y(Kralik(y) \wedge Vlastni(x,y)) \Rightarrow \forall z(\exists k(Kralik(k) \wedge Honi(z,k)) \Rightarrow Nenavidi(x,z)))$

φ_5: $\exists x(Pes(x) \wedge Vlastni(jan,x))$

φ_6: $\forall x \forall y \forall z((Nenavidi(x,y) \wedge Vlastni(z,y)) \Rightarrow OdmitaChoditS(x,z))$

φ_7: $(\neg\exists x(Obchod(x) \wedge Vlastni(marie,x))) \Rightarrow OdmitaChoditS(marie,jan)$

Úloha 20. Formalisujte ve vhodně zvoleném jazyce $\mathcal{L}$ predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka, a výsledné formule označte $\varphi_1, \ldots, \varphi_7$, jak je naznačeno vždy nalevo od zadané věty:

φ_1: Každý, kdo vynikne na zkoušce, poctivě studuje, je génius nebo má štěstí.

φ_2: Každý, kdo dostane A, vynikne na zkoušce.

φ_3: Žádný student OI nemá štěstí.

φ_4: Každý, kdo pije pivo, nestuduje.

φ_5: Pokud každý student OI dostane A, pak je každý student OI, který pije pivo, génius.

Dokažte, že z formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ logicky plyne formule φ_5.

Řešení Náš jazyk $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pred} &= \{VNZ, PS, Genius, MS, DA, OI, PP\},\\
&\quad ar(VNZ, PS, Genius, MS, DA, OI, PP) = 1\\
\mathsf{Func} &= \emptyset,\\
\mathsf{Kons} &= \emptyset
\end{aligned}$$

Předvedeme jednu možnou formalisaci daných vět.

φ_1: $\forall x(VNZ(x) \Rightarrow ((PS(x) \vee Genius(x)) \vee MS(x)))$

φ_2: $\forall x(DA(x) \Rightarrow VNZ(x))$

φ_3: $\neg\exists x(OI(x) \wedge MS(x))$

φ_4: $\forall x(PP(x) \Rightarrow \neg PS(x))$

φ_5: $(\forall x(OI(x) \Rightarrow DA(x))) \Rightarrow (\forall x((OI(x) \wedge PP(x)) \Rightarrow Genius(x)))$

Úloha 21. Přirozenou dedukcí ukažte, že platí následující důsledek.

$$\begin{aligned}\forall x(S(x) \Rightarrow \forall y(K(y) \Rightarrow V(x,y))),\\ \exists x(K(x) \wedge \forall y(O(y) \Rightarrow V(x,y))),\\ \forall x\forall y\forall z((V(x,y) \wedge V(y,z)) \Rightarrow V(x,z))\\ \vdash \forall x(S(x) \Rightarrow \forall y(O(y) \Rightarrow V(x,y))).\end{aligned}$$

(*Každý slon váží více než jakýkoli kůň. Nějaký kůň váží více než jakýkoli osel. Vážit více je transitivní vztah. Proto každý slon váží více než jakýkoli osel.*)

Můžete předpokládat, že pracujeme s jazykem predikátové logiky, ve kterém jsou všechny výše napsané řetězce sentencemi.