

Sémantika predikátové logiky

Sémantika predikátové logiky

Interpretace predikátové logiky s predikátovými symboly Pred, konstantními symboly Kons a funkčními symboly Func je dvojice $\langle U, \llbracket - \rrbracket \rangle$, kde

- ▶ U je množina nazývaná **universum**;
- ▶ $\llbracket - \rrbracket$ je přiřazení, které
 1. každému $P \in \text{Pred}$ arity $n > 0$ přiřazuje podmnožinu U^n a každému $P \in \text{Pred}$ arity 0 přiřazuje 0 nebo 1, značíme $\llbracket P \rrbracket$
 2. každému konstantnímu symbolu $a \in \text{Kons}$ přiřazuje prvek z U , značíme jej $\llbracket a \rrbracket$,
 3. každému funkčnímu symbolu $f \in \text{Func}$ arity n přiřazuje zobrazení množiny U^n do U , značíme $\llbracket f \rrbracket$.

Sémantika predikátové logiky

Kontext proměnných

Dána interpretace $\langle U, \llbracket - \rrbracket \rangle$. **Kontext proměnných** je parciální zobrazení

$$\rho : \text{Var} \rightarrow U.$$

Definiční obor kontextu ρ (množinu **proměnných v kontextu**) značíme D .

Kontext ρ ztotožňujeme s (totálním) zobrazením $\rho : D \rightarrow U$.

Sémantika predikátové logiky

Interpretace termů při daném kontextu proměnných

Pro danou $\langle U, \llbracket - \rrbracket \rangle$ a $\rho : D \rightarrow U$ interpretujeme termy v proměnných D následovně:

- ▶ Je-li term proměnná x , pak jeho hodnota je $\llbracket x \rrbracket_\rho = \rho(x)$.
- ▶ Je-li term $a \in \text{Kons}$, pak jeho hodnota je $\llbracket a \rrbracket_\rho = \llbracket a \rrbracket$.
- ▶ Je-li $f(t_1, \dots, t_n)$ term, pak jeho hodnota je

$$\llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_\rho = \llbracket f \rrbracket(\llbracket t_1 \rrbracket_\rho, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_\rho).$$

Sémantika predikátové logiky

Pravdivost formule v dané interpretaci a kontextu.

Nechť $P \in \text{Pred}$ je kladné arity, t_1, \dots, t_n jsou termy v proměnných D . Atomickou formuli

$$\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$$

nazveme **pravdivou** v interpretaci $\langle U, \llbracket - \rrbracket \rangle$ a kontextu $\rho : D \rightarrow U$ v případě, kdy

$$(\llbracket t_1 \rrbracket_\rho, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_\rho) \in \llbracket P \rrbracket.$$

Je-li $P \in \text{Pred}$, arity 0, pak je P **pravdivá**, pokud $\llbracket P \rrbracket = 1$.

Atomická formule $t_1 = t_2$ je v $\langle U, \llbracket - \rrbracket \rangle$ a ρ **pravdivá**, pokud

$$\llbracket t_1 \rrbracket_\rho = \llbracket t_2 \rrbracket_\rho.$$

Sémantika predikátové logiky

Pravdivost formule v dané interpretaci a kontextu.

Jsou-li φ a ψ formule, jejichž pravdivost v interpretaci $\langle U, \llbracket - \rrbracket \rangle$ a kontextu ρ již známe, pak (v kontextu ρ)

- ▶ \perp je nepravdivá, \top je pravdivá.
- ▶ $\neg\varphi$ je pravdivá právě tehdy, když φ není pravdivá.
- ▶ $\varphi \wedge \psi$ je pravdivá právě tehdy, když φ i ψ jsou pravdivé.
- ▶ $\varphi \vee \psi$ je nepravdivá právě tehdy, když φ i ψ jsou nepravdivé.
- ▶ $\varphi \Rightarrow \psi$ je nepravdivá právě tehdy, když φ je pravdivá a ψ je nepravdivá.
- ▶ $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je pravdivá právě tehdy, když buď obě formule φ a ψ jsou pravdivé, nebo obě formule φ a ψ jsou nepravdivé.

Sémantika predikátové logiky

Update kontextu proměnných

Je-li ρ kontext proměnných, $x \in \text{Var}$ a $d \in U$, pak kontext

$$\rho[x := d] : \text{Var} \rightarrow U$$

$$y \mapsto \rho(y) \quad (\text{pro } y \neq x, \text{ pokud definováno})$$

$$x \mapsto d$$

nazýváme **update kontextu ρ o hodnotu d v x .**

Sémantika predikátové logiky

Pravdivost formule v dané interpretaci a kontextu.

Je-li φ formule a x proměnná, pak

- ▶ $\forall x \varphi$ je pravdivá právě tehdy, když formule φ je pravdivá v **každém** kontextu $\rho[x := d]$, kde d je prvek U .
- ▶ $\exists x \varphi$ je pravdivá právě tehdy, když formule φ je pravdivá v **alespoň jednom** kontextu $\rho[x := d]$, kde d je prvek U .

Sémantika predikátové logiky

Pravdivostní hodnota sentence.

Sentence φ je **pravdivá v interpretaci** $\langle U, \llbracket - \rrbracket \rangle$, jestliže je pravdivá v **prázdném** kontextu proměnných

$$\rho : \emptyset \rightarrow U.$$

Model sentence.

Interpretace $\langle U, \llbracket - \rrbracket \rangle$, ve které je sentence φ pravdivá, se nazývá **model sentence** φ .