Sémantika predikátové logiky
pokračování

Příklad jazyka a interpretace

Jazyk $\mathcal{L}$

- Pred $= \{S, M\}$, $\mathrm{ar}(S) = 1$, $\mathrm{ar}(M) = 2$
- Func $= \{f\}$, $\mathrm{ar}(f) = 2$
- Kons $= \{a\}$

Interpretace $\mathcal{I}$

$$
\begin{aligned}
U &= \mathbb{N} \\
[\![S]\!] &= \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \\
[\![M]\!] &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\} \\
[\![f]\!] &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
&\quad (m, n) \mapsto m + n \\
[\![a]\!] &= 1
\end{aligned}
$$

Připomenutí sémantiky

Interpretace $\mathcal{I}$:

$$U = \mathbb{N}$$
$$[\![S]\!] = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$
$$[\![M]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\}$$
$$[\![f]\!] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$(m, n) \mapsto m + n$$
$$[\![a]\!] = 1$$

Mějme čtyři kontexty:

$$\rho : x \mapsto 2,\ y \mapsto 4$$
$$\sigma : y \mapsto 4$$
$$\tau : x \mapsto 1$$
$$\varepsilon :$$

Vyhodnoťme:

1. $[\![f(f(y, a), x)]\!]_\rho$
2. $\mathcal{I} \models_\varepsilon S(a)$
3. $\mathcal{I} \models_\tau S(a)$
4. $\mathcal{I} \models_\rho f(a, a) = x$
5. $\mathcal{I} \models_\rho S(y) \Rightarrow S(f(a, y))$
6. $\mathcal{I} \models_\sigma \forall x M(x, f(a, y))$
7. $\mathcal{I} \models_\tau S(x) \vee \exists x M(a, x)$
8. $\mathcal{I} \models_\varepsilon \exists x S(x)$

Význam sentencí

Pravdivost sentence

Sentence φ je pravdivá v interpretaci $\mathcal{I} = \langle U, [\![-]\!] \rangle$, jestliže je pravdivá v prázdném kontextu proměnných

$$\varepsilon : \emptyset \to U.$$

Ověřme:

1. $\mathcal{I} \models \forall x \exists y M(x, y)$
2. $\mathcal{I} \models \exists y \forall x M(x, y)$

Model sentence

Interpretace $\mathcal{I} = \langle U, [\![-]\!] \rangle$, ve které je sentence φ pravdivá, se nazývá model sentence φ.

Význam formulí s volnými proměnnými

Seznam deklarovaných proměnných

Seznam $D = (x_1, \ldots, x_n)$ je seznam deklarovaných proměnných, pokud $x_1, \ldots x_n \in \mathrm{Var}$ a proměnné se v D neopakují.

Význam formule v interpretaci

Ať $D = (x_1, \ldots, x_n)$ je seznam deklarovaných proměnných, $\mathcal{I}$ interpretace jazyka $\mathcal{L}$, φ formule z $\mathcal{L}$, pro kterou $\mathrm{free}(\varphi) \subseteq D$.
Význam φ v $\mathcal{I}$ je množina

$$[\![\varphi]\!]_D = \{(\rho(x_1), \ldots, \rho(x_2)) \in U^n \mid \rho : D \to U,\ \mathcal{I} \models_\rho \varphi\}.$$

Vyhodnoťme v naší intepretaci $\mathcal{I}$:

1. $[\![M(x, y)]\!]_D$ pro $D = (x, y)$.
2. $[\![M(x, x)]\!]_D$ pro $D = (x)$.
3. $[\![\exists y(x = f(y, y))]\!]_D$ pro $D = (x)$.

Sémantické vlastnosti sentencí

Splnitelná sentence, tautologie, kontradikce

- Sentence φ je splnitelná, pokud má nějaký model.
- Sentence φ je tautologie, pokude je každá interpretace jejím modelem.
- Sentence φ je kontradikce, pokud nemá model.

Příklady:

1. $\forall x M(x, f(a, x))$
2. $\forall x (S(x) \vee \neg S(x))$

Sémantické vlastnosti sentencí

Sémantická ekvivalence sentencí

Sentence φ a ψ jsou sémanticky ekvivalentní, značeno

$$\varphi \models\!\!\!\!\dashv \psi,$$

jestliže mají stejné modely. To jest: pro každou intepretaci $\mathcal{I}$ platí $\mathcal{I} \models \varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \models \psi$.

Rozhodněme o sémantické ekvivalenci sentencí:

1. $\varphi = \exists y \forall x M(x, y), \quad \psi = \forall x \exists y M(x, y)$
2. $\varphi = \forall x (S(x) \wedge S(x)), \quad \psi = \forall x S(x)$

Splnitelnost množiny formulí

(Ne)splnitelná množina

Množina sentencí S je splnitelná, pokud existuje interpretace $\mathcal{I}$, která je modelem všech sentencí $\varphi \in S$ (tj., jestliže má model).
Množina S je nesplnitelná, jestliže nemá model.

Příklady:

1. $S = \emptyset$
2. $T = \{\exists x S(x), \exists x \neg S(x)\}$
3. $K = \{\exists x \neg S(x), \forall x S(x)\}$

Sémantický důsledek

Sémantický důsledek (pro sentence)

Mějme množinu sentencí S a sentenci φ. Sentence φ je sémantickým důsledkem množiny S, značeno

$$S \models \varphi,$$

pokud je každý model množiny S také modelem φ.

Příklad:

1. Platí $\exists y \forall x M(x, y) \models \forall x \exists y M(x, y)$?
2. Platí $\forall x \exists y M(x, y) \models \exists y \forall x M(x, y)$?

Sémantický důsledek

V následující definici pracujeme s množinou formulí S, formulí φ a seznamem deklarovaných proměnných D. Předpokládáme, že platí $\mathrm{free}(\varphi) \subseteq D$ a že pro všechny $\psi \in S$ platí $\mathrm{free}(\psi) \subseteq D$.

Sémantický důsledek (pro obecné formule)

Formule φ je sémantickým důsledkem množiny S (pro deklaraci D), značeno

$$S \vDash_D \varphi,$$

pokud pro všechny intepretace $\mathcal{I}$ a kontexty proměnných $\rho : D \to U$ platí:

Pokud pro všechny $\psi \in S$ platí $\mathcal{I} \models_\rho \psi$, pak $\mathcal{I} \models_\rho \varphi$.

Prostudujme, zda platí následující:

1. $P(x), \forall y(P(y) \Rightarrow Q(y)) \models_{(x)} Q(x)$
2. $P(x), \forall y(Q(y) \Rightarrow P(y)) \models_{(x)} Q(x)$.

Sémantická ekvivalence

Sémantickou ekvivalenci formulí jsme definovali pouze pro sentence.

Sémantická ekvivalence pro obecné formule

Nechť pro formule φ a ψ platí free(φ) $\subseteq D$, free(ψ) $\subseteq D$, kde D je seznam deklarovaných proměnných.
Formule φ a ψ jsou sémanticky ekvivalentní (pro deklaraci D), značeno

$$\varphi \;\; \models\!\!\dashv_{D} \psi,$$

pokud platí $\varphi \models_D \psi$ a $\psi \models_D$.

Příklad: $\neg\exists y M(x,y) \models_{(x)} \forall y \neg M(x,y)$

Negační normální forma

Důležité příklady sémanticky ekvivalentních formulí:

$$\neg\forall x\varphi \;\models\!\dashv\; \exists x\neg\varphi$$
$$\neg\exists x\varphi \;\models\!\dashv\; \forall x\neg\varphi$$

Kvantifikátory $\forall$ a $\exists$ jsou vzájemně definovatelné:

$$\exists x\varphi \;\models\!\dashv\; \neg\forall x\neg\varphi$$
$$\forall x\varphi \;\models\!\dashv\; \neg\exists x\neg\varphi$$

Porovnejte tvrzení:
„Ne všichni vlastnost φ nemají." vs. „Někdo vlastnost φ má."
„Není nikoho, kdo by vlastnost φ neměl." vs. „Někdo vlastnost φ má."

Negační normální forma

Připomenutí: literál je atomická formule nebo její negace.

Negační normální forma

Formule v negační normální formě specifikujeme následující BNF:

$$N ::= L \mid \top \mid \bot \mid N \wedge N \mid N \vee N \mid N \Rightarrow N \mid N \Leftrightarrow N \mid \forall x N \mid \exists N$$

(kde L je literál).

Algoritmus NNF pro sestrojení negační normální formy pro formule výrokové logiky rozšiřujeme následovně:

$$\begin{aligned}
NNF(\forall x \psi) &= \forall x NNF(\psi) \\
NNF(\exists x \psi) &= \exists x NNF(\psi) \\
NNF(\neg \forall x \psi) &= \exists x NNF(\neg \psi) \\
NNF(\neg \exists x \psi) &= \forall x NNF(\neg \psi)
\end{aligned}$$

Negační normální forma

Příklady převodu do negační normální formy

Spočtěte následující:

$$
\begin{aligned}
NNF(\neg\forall x(P(x) \Rightarrow K(x)))\\
NNF(\neg\forall x\exists y R(y,x))\\
NNF(\neg\exists x\exists y R(x,y))\\
NNF(\neg(\mathrm{parentof}(x,y) \wedge \mathrm{woman}(x)))
\end{aligned}
$$