Přirozená dedukce v predikátové logice

Syntax predikátové logiky – pokračování

Substituce

Nechť φ je formule, x proměnná a t term.
Formule $\varphi[t/x]$ vzniká nahrazením všech volných výskytů proměnné x ve formuli φ termem t.
Operace $[t/x]$ se nazývá substituce termu t za proměnnou x.

Příklady

1. $P(x)[f(a)/x]$
2. $R(x,y)[f(y)/x]$
3. $(P(y) \vee \forall y P(y))[a/y]$

Výstražný příklad

Definice substituce nám umožňuje provést i „nevhodnou“ substituci $(\exists y R(x,y))[y/x]$ s výsledkem $\exists y R(y,y)$.

Substituce je „nevhodná“ tím, že jejím použitím vznikly nové vázané výskyty proměnných.

Syntax predikátové logiky – pokračování

Term volný pro proměnnou

Term t je volný pro proměnnou x ve formuli φ, pokud se žádný výskyt proměnné $y \in \mathrm{free}(t)$ nestane vázaným výskytem ve formuli $\varphi[t/x]$.

Legální substituce

Substituce $\varphi[t/x]$ je legální, pokud je t volný pro x ve φ.

Příklady (ne)legálních substitucí

Nechť $\varphi = \forall y R(x, y)$. Rozhodněme o legalitě substitucí

1. $\varphi[f(z)/x]$
2. $\varphi[f(z)/y]$
3. $\varphi[f(y)/x]$

Syntax predikátové logiky – pokračování

Deklarované proměnné

Nechť D je seznam deklarovaných proměnných. Term t či formule φ je term či formule v (deklarovaných) proměnných D, pokud platí $\mathrm{free}(t) \subseteq D$ či $\mathrm{free}(\varphi) \subseteq D$.

Zvyklost

Substituce $\varphi[t/x]$ je povolena v proměnných D, pokud je φ formule v proměnných D, t term v proměnných D, a substituce $\varphi[t/x]$ je legální.

Příklady (ne)povolených substitucí

Ať $a \in \mathrm{Kons}$, $x, y, z \in \mathrm{Var}$, $P \in \mathrm{Pred}$, $\mathrm{ar}(P) = 1$.

1. $P(x)[y/x]$ pro $D = (x)$
2. $P(x)[y/x]$ pro $D = (y)$
3. $P(x)[a/x]$ pro $D = (x)$
4. $P(x)[y/x]$ pro $D = (x, y)$

Přirozená dedukce v predikátové logice

I pro predikátovou logiku zavedeme důkazový systém.

Logický důsledek

Nechť S je množina formulí a φ formule, všechny formule v deklarovaných proměnných D. Vztah logického důsledku značíme

$$S \vdash_D \varphi$$

(φ je logickým důsledkem S), tento vztah platí, pokud existuje důkaz φ z předpokladů S.

Pokud pracujeme pouze se sentencemi, lze index D vynechat.

Přirozená dedukce v predikátové logice

- Přirozená dedukce pro predikátovou logiku je rozšířením přirozené dedukce pro výrokovou logiku.
- Jsou přidána pravidla pro práci s kvantifikátory a rovností.
- Zavádět lze pouze předpoklady v deklarovaných proměnných.
- Lze používat pouze substituce povolené v deklarovaných proměnných.

Přirozená dedukce v predikátové logice

	Zavedení kvantifikátoru	Eliminace kvantifikátoru
$\forall x$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} x_0 \qquad\qquad \\ \vdots \\ \varphi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x \varphi}\ \mathrm{i}\forall x$	$\dfrac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]}\ \mathrm{e}\forall x$
$\exists x$	$\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi}\ \mathrm{i}\exists x$	$\dfrac{\exists x \varphi \qquad \boxed{\begin{array}{cc} x_0 : & \varphi[x_0/x] \\ & \vdots \\ & \chi \end{array}}}{\chi}\ \mathrm{e}\exists x$

Přirozená dedukce v predikátové logice

Nechť $C, S, <, R, P, Q \in \mathrm{Pred}$ (vhodných arit), nechť $x, y, z \in \mathrm{Var}$ a $s \in \mathrm{Kons}$.

Příklady (ne)důkazů

1. $\forall x(C(x) \Rightarrow S(x)), C(s) \vdash S(s)$
2. $\forall x(C(x) \Rightarrow S(x)), C(s) \vdash \exists y S(y)$
3. $\forall x \exists y(x < y) \vdash \exists y(y < y)$
4. $R(s,s) \vdash \exists x R(x,x)$
5. $R(s,s) \vdash \exists x R(s,x)$
6. $R(s,s) \vdash \exists x R(x,s)$
7. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x)$
8. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), \exists y P(y) \vdash \exists z Q(z)$
9. $\forall x P(x) \vdash \exists x P(x)$

Přirozená dedukce v predikátové logice

	Zavedení	Eliminace
Pravidlo pro rovnost	$\dfrac{}{t = t}$ i=	$\dfrac{t_1 = t_2 \qquad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]}$ e=

Následující dvě odvozená pravidla můžete v důkazech používat jako základní.

	Symetrie	Transitivita
Pravidlo pro rovnost	$\dfrac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}$ sym=	$\dfrac{t_1 = t_2 \qquad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}$ trans=

Příklad důkazu

Dokažme

$$\forall x S(2 \cdot x), \forall x \forall y\, (x \cdot y = y \cdot x) \vdash \forall z S(z \cdot 2).$$