Predikátová logika

7. dubna 2025

Tento text slouží jako kompilace příprav k přednáškám z predikátové logiky předmětu Logika a grafy. Omluvte prosím mírnou nevyváženost textu: průběžným doplňováním podrobností mohou některé sekce působit celkem plně, zatímco některé sekce jsou zatím stále pouhé *lecture notes* k přednáškám.

- V sekci 1 zavedeme syntax predikátové logiky.
- Sémantiku predikátové logiky zavádíme v sekci 2.
- Sekce 3 popisuje důkazový systém *přirozené dedukce* v predikátové logice.

1 Syntax predikátové logiky

Po celou dobu budeme pracovat s množinou

$$\mathsf{Var}$$

proměnných, po které požadujeme, aby byla spočetná (tedy aby existovala bijekce $b : \mathsf{Var} \to \mathbb{N}$). Přesný obsah množiny Var pro nás není příliš podstatný, vždy ale předpokládáme, že v množině Var jsou alespoň symboly

$$x, y, z, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

které můžeme používat bez dalších komentářů. Pouze v případě nejasností, např. používání zvláštních či nestandardních symbolů, explicitně zmiňujeme, že je námi daný symbol chápán jako proměnná.

Definice 1.1. Zadat *jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky* znamená specifikovat tři (vzájemně disjunktní) množiny symbolů:

1. Množinu
$$\mathsf{Pred}$$
predikátových symbolů spolu se specifikací arity každého predikátového symbolu:
$$\mathsf{ar} : \mathsf{Pred} \to \mathbb{N}$$

2. Množinu
$$\mathsf{Func}$$
funkčních symbolů spolu se specifikací arity každého funkčního symbolu:
$$\mathsf{ar} : \mathsf{Func} \to \mathbb{N}_{>0}$$

3. Množinu
$$\mathsf{Kons}$$
konstantních symbolů.

Poznámka 1.2 (Arity)**.**

1. Konstantním symbolům nepřiřazujeme aritu. Při jejich *interpretaci* (viz sekci 2) jimi budeme odkazovat na konkrétní objekty.

2. Funkčním symbolům přiřazujeme *kladnou* aritu. Unární (1-ární) funkční symboly budou interpretovány jako *funkce jednoho argumentu*. Binární (2-ární) funkční symboly budou interpretovány jako funkce dvou argumentů.

   Někteří logici dovolují specifikovat i funkční symboly nulární (0-ární). Takové funkční symboly by byly interpretovány jako funkce o nula argumentech. V důsledku se takové funkce chovají jako konstanty. Naším přístupem je formálně zakázat 0-ární funkční symboly, a místo toho pracovat s konstantními symboly.

3. Predikátové symboly nám budou umožňovat popis *vlastností* (matematických) objektů (pomocí unárních predikátových symbolů) a *vztahů* mezi nimi (pomocí binárních, ternárních, ..., predikátových symbolů). Umožňujeme specifikaci nulárních predikátových symbolů. Tyto symboly budou interpretovány podobným způsobem jako *atomické formule* ve výrokové logice.

Definice 1.3. Množina termů jazyka $\mathcal{L}$ je zadána následující BNF:
$$t ::= x \mid c \mid f(t_1, \ldots, t_n),$$
kde x označuje proměnnou, c konstantní symbol a f n-ární funkční symbol. Tuto množinu značíme $\mathsf{Term}(\mathcal{L})$.

Definice 1.4. Množina atomických formulí jazyka $\mathcal{L}$ je zadána následující BNF:

$$A ::= P(t_1, \ldots, t_n) \mid t_1 = t_2,$$

kde P označuje n-ární predikátový symbol a $t_1, \ldots, t_n$ označuje termy.

Definice 1.5. Množina formulí jazyka $\mathcal{L}$ je zadána následující BNF:

$$F ::= \bot \mid \top \mid A \mid (\neg F) \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \mid (F \Rightarrow F) \mid (F \Leftrightarrow F) \mid (\forall x F) \mid (\exists x F),$$

kde A označuje atomickou formuli a x označuje proměnnou.

Příklad 1.6. Uveďme příklad jazyka predikátové logiky. Jazyk $\mathcal{L}$ zadáme volbou predikátových, funkčních a konstantních symbolů, a u predikátových a funkčních symbolů specifikujeme jejich arity. Nechť

1. $\mathsf{Pred} = \{S, P, M\}$, $\mathsf{ar}(S) = \mathsf{ar}(P) = 1$, $\mathsf{ar}(M) = 2$.
2. $\mathsf{Func} = \{m\}$, $\mathsf{ar}(f) = 1$.
3. $\mathsf{Kons} = \{p, j\}$.

Uveďme příklady termů z tohoto jazyka ($x, y, z \in \mathsf{Var}$):

1. x je term, neboť je to proměnná.
2. $m(y)$ je term, neboť y je proměnná (tedy term), a m je unární funkční symbol.
3. $m(m(p))$ je term, neboť p je konstantní symbol (a tedy term), a m je unární funkční symbol.
4. Řetězec $xm(($ není term.

Uveďme příklady atomických formulí jazyka $\mathcal{L}$:

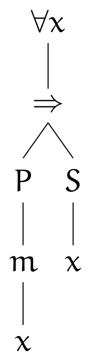
1. $M(z, y)$ je atomická formule.
2. $M(x, m(x))$ je atomická formule.
3. $P(m(m, (p)))$ je atomická formule.

Uveďme příklady (složitějších) formulí jazyka $\mathcal{L}$:

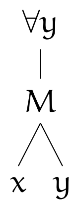
1. $\forall x S(x)$.
2. $\forall x (P(m(x)) \Rightarrow S(x))$.
3. $\forall y M(x, y)$.

4. $\forall x \exists y (m(x) = y)$.

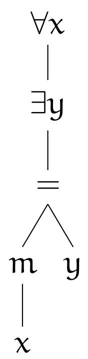
Poznámka 1.7 (Syntaktické stromy, podformule)**.** Formule $\forall x (P(m(x)) \Rightarrow S(x))$ má syntaktický strom



Formule $\forall y M(x, y)$ má syntaktický strom



Formule $\forall x \exists y (m(x) = y)$ má syntaktický strom



Formule $\forall x \exists y (m(x) = y)$ má následující podformule:

1. $\forall x \exists y (m(x) = y)$.

2. $\exists y (m(x) = y)$.

3. $m(x) = y$.

Řetězce $m(x)$, y a x *nejsou* podformule této formule, neboť to jsou samy o sobě *termy*, nikoli formule.

Definice 1.8. Množina volných proměnných v termu t, značeno $\mathsf{free}(t)$, je definována rekursivně:

1. $\mathsf{free}(x) = \{x\}$ pro každou proměnnou x.
2. $\mathsf{free}(a) = \emptyset$ pro každý konstantní symbol a.
3. $\mathsf{free}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \mathsf{free}(t_1) \cup \cdots \cup \mathsf{free}(t_n)$ pro každý n-ární funkční symbol f a termy $t_1, \ldots, t_n$.

Množina volných proměnných v atomické formuli φ, značeno $\mathsf{free}(\varphi)$, je definována následovně:

1. $\mathsf{free}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \mathsf{free}(t_1) \cup \cdots \cup \mathsf{free}(t_n)$ pro každý n-ární predikátový symbol P a termy $t_1, \ldots, t_n$.
2. $\mathsf{free}(t_1 = t_2) = \mathsf{free}(t_1) \cup \mathsf{free}(t_2)$ pro každou dvojici termů t_1, t_2.

Množina volných proměnných ve formuli φ, značeno $\mathsf{free}(\varphi)$, je definována následovně:

1. $\mathsf{free}(\bot) = \mathsf{free}(\top) = \emptyset$.
2. Pro každou atomickou formuli φ je $\mathsf{free}(\varphi)$ definováno výše.
3. $\mathsf{free}(\neg\varphi) = \mathsf{free}(\varphi)$.
4. $\mathsf{free}(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{free}(\varphi) \cup \mathsf{free}(\psi)$.
5. $\mathsf{free}(\varphi \vee \psi) = \mathsf{free}(\varphi) \cup \mathsf{free}(\psi)$.
6. $\mathsf{free}(\varphi \Rightarrow \psi) = \mathsf{free}(\varphi) \cup \mathsf{free}(\psi)$.
7. $\mathsf{free}(\varphi \Leftrightarrow \psi) = \mathsf{free}(\varphi) \cup \mathsf{free}(\psi)$.
8. $\mathsf{free}(\forall x\, \varphi) = \mathsf{free}(\varphi) \setminus \{x\}$.
9. $\mathsf{free}(\exists x\, \varphi) = \mathsf{free}(\varphi) \setminus \{x\}$.

Definice 1.9. Množina vázaných proměnných v termu t, značeno $\mathsf{bound}(t)$, je definována vždy jako prázdná množina. Množina vázaných proměnných v atomické formuli φ, značeno $\mathsf{bound}(\varphi)$, je definována vždy jako prázdná množina. Množina vázaných proměnných ve formuli φ, značeno $\mathsf{bound}(\varphi)$, je definována následovně:

1. $\mathsf{bound}(\bot) = \mathsf{bound}(\top) = \emptyset$.

2. Pro každou atomickou formuli φ je $\mathsf{bound}(\varphi)$ definováno výše.
3. $\mathsf{bound}(\neg\varphi) = \mathsf{bound}(\varphi)$.
4. $\mathsf{bound}(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{bound}(\varphi) \cup \mathsf{bound}(\psi)$.
5. $\mathsf{bound}(\varphi \vee \psi) = \mathsf{bound}(\varphi) \cup \mathsf{bound}(\psi)$.
6. $\mathsf{bound}(\varphi \Rightarrow \psi) = \mathsf{bound}(\varphi) \cup \mathsf{bound}(\psi)$.
7. $\mathsf{bound}(\varphi \Leftrightarrow \psi) = \mathsf{bound}(\varphi) \cup \mathsf{bound}(\psi)$.
8. $\mathsf{bound}(\forall x\, \varphi) = \mathsf{bound}(\varphi) \cup \{x\}$.
9. $\mathsf{bound}(\exists x\, \varphi) = \mathsf{bound}(\varphi) \cup \{x\}$.

Poznámka 1.10. Často budeme potřebovat hovořit o konkrétním *výskytu* dané proměnné ve formuli.

1. Ve formuli $\varphi = \forall x(P(m(x)) \Rightarrow S(x))$ se proměnná x *vyskytuje* dvakrát: jednou v podformuli $P(m(x))$ a jednou v podformuli $S(x)$. V samotném kvantifikátoru $\forall x$ nebereme znak x jako výskyt proměnné x. Oba výskyty proměnné x ve φ jsou vázané. Platí $\mathsf{free}(\varphi) = \emptyset$ a $\mathsf{bound}(\varphi) = \{x\}$.

2. Ve formuli $\psi = \forall y M(x, y)$ se proměnná x vyskytuje jednou, a to volně: při průchodu syntaktického stromu směrem od x ke kořeni „nenarazíme" na žádný kvantifikátor, který by x vázal. Proměnná y se vyskytuje jednou, a to vázaně: v syntaktickém stromu formule ψ se y vyskytuje pod obecným kvantifikátorem $\forall y$, který proměnnou y váže. Platí $\mathsf{free}(\psi) = \{x\}$ a $\mathsf{bound}(\psi) = \{y\}$.

3. Uvažujme formuli $\chi = P(y) \wedge \forall y M(y, y)$. V této formuli se proměnná y vyskytuje třikrát, z toho jednou volně a dvakrát vázaně. Platí $\mathsf{free}(\chi) = \mathsf{bound}(\chi) = \{y\}$.

Definice 1.11 (Sentence)**.** Formuli φ, pro kterou platí $\mathsf{free}(\varphi) = \emptyset$, nazýváme *sentence*.

2 Sémantika predikátové logiky

Definice 2.1. Ať $\mathcal{L}$ je jazyk predikátové logiky. Interpretace $\mathcal{I}$ jazyka $\mathcal{L}$ sestává z

1. množiny U (takzvaného *universa*),
2. přiřazení $[\![-]\!]$, které

(a) symbolu $P \in \mathsf{Pred}$ arity $\mathrm{ar}(P) = n \geqslant 1$ přiřadí množinu

$$[\![P]\!] \subseteq U^n,$$

symbolu $P \in \mathsf{Pred}$ arity $\mathrm{ar}(P) = 0$ přiřadí pravdivostní hodnotu 0 nebo 1,

(b) symbolu $a \in \mathsf{Kons}$ přiřadí prvek

$$[\![a]\!] \in U,$$

(c) symbolu $f \in \mathsf{Func}$ arity $\mathrm{ar}(f) = n$ přiřadí zobrazení

$$[\![f]\!] : U^n \to U.$$

Poznámka 2.2. Povšimněme si, že „hodnoty proměnných" nejsou součástí interpretace. Práci s proměnnými osvětlíme níže: abychom mohli správně definovat sémantiku kvantifikátorů, musíme s proměnnými zacházet opatrněji.

Příklad 2.3. Jazyk $\mathcal{L}$ vyberme volbou symbolů

1. $\mathsf{Pred} = \{S, M\}$, $\mathrm{ar}(S) = 1$, $\mathrm{ar}(M) = 2$.
2. $\mathsf{Func} = \{f\}$, $\mathrm{ar}(f) = 2$.
3. $\mathsf{Kons} = \{a\}$.

Definujme interpretaci $\mathcal{I}$ následovně:

1. Jako universum U zvolme množinu přirozených čísel $\mathbb{N}$ (včetně nuly).
2. Nechť $[\![S]\!] = \{2 \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\}$ a $[\![M]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\}$.
3. Nechť $[\![f]\!] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je sčítání přirozených čísel:
$$[\![f]\!](m, n) = m + n.$$
4. Nechť $[\![a]\!] = 1$.

Definice 2.4. Nechť A a B jsou množiny. Relaci $f \subseteq A \times B$ nazveme *parciálním zobrazením z* A *do* B, pokud splňuje pro všechny trojice prvků $a \in A$, $b_1, b_2 \in B$ následující podmínku:

$$\text{Pokud } (a, b_1) \in f \text{ a } (a, b_2) \in f, \text{ pak } b_1 = b_2.$$

Parciální zobrazení f z A do B značíme

$$f : A \rightharpoonup B.$$

Poznámka 2.5. Co znamená mít parciální zobrazení $f : A \rightharpoonup B$ pochopíme nejlépe, když definici parciálního zobrazení porovnáme s definicí (klasického, normálního, totálního, ...) zobrazení.

Zobrazení $g : A \to B$ je relace $g \subseteq A \times B$ taková, že pro *každé* $a \in A$ existuje *právě jedno* $b \in B$ takové, že $(a, b) \in g$. Fakt, že $(a, b) \in g$, obvykleji značíme zápisem $g(a) = b$. Množinu A chápeme jako množinu všech vstupních hodnot pro zobrazení g, a každému vstupu je přiřazen právě jeden výstup.

U parciálního zobrazení $f : A \rightharpoonup B$ chápeme A taktéž jako množinu všech vstupních hodnot. Nemáme však zajištěno, že je pro každou vstupní hodnotu „definován výsledek $f(a)$“: může existovat $a \in A$ takové, že pro žádné $b \in B$ neplatí $(a, b) \in f$. Stále však máme zajištěno, že jakmile pro nějaké $a \in A$ *existuje* $b \in B$ takové, že $(a, b) \in f$, pak je toto b *jediný prvek* z množiny B, který je s prvkem a ve vztahu f, a tento fakt můžeme značit $f(a) = b$ (stejně jako u zobrazení).

Jako nepřesný slogan můžeme výše uvedené zkrátit: parciální zobrazení je *v podstatě zobrazení*, jen nemusí mít definován výstup pro každý vstup.

Poznámka 2.6. Uvažujme parciální zobrazení

$$f : A \rightharpoonup B.$$

Už víme, že ne každé vstupní hodnotě $a \in A$ musí být přiřazena výstupní hodnota $f(a) \in B$. *Některým* prvkům $a \in A$ však výstupní hodnota přiřazena být může. Označme množinu všech takových prvků jako D:

$$D = \{a \in A \mid \text{existuje } b \in B \text{ takové, že } (a, b) \in f\}.$$

Parciální zobrazení $f : A \rightharpoonup B$ pak můžeme chápat jako (totální) zobrazení

$$f : D \to B$$

definováno stejným „předpisem“: pouze provedeme restrikci množiny A na její podmnožinu D.

Příklad 2.7. Relace $\rho \subseteq \mathsf{Var} \times \mathbb{N}$ popsaná výčtem dvojic

$$\rho = \{(x, 3), (y, 7)\}$$

může být chápána jako parciální zobrazení

$$\begin{aligned} \rho : \mathsf{Var} &\rightharpoonup \mathbb{N} \\ x &\mapsto 3 \\ y &\mapsto 7, \end{aligned}$$

nebo jako (totální) zobrazení

$$\begin{aligned} \rho : \{x, y\} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 3 \\ y &\mapsto 7. \end{aligned}$$

Definice 2.8. Nechť $\mathcal{I} = (U, [\![-]\!])$ je interpretace jazyka $\mathcal{L}$. *Kontext proměnných* (pro interpretaci $\mathcal{I}$) je jakékoli parciální zobrazení

$$\rho : \mathsf{Var} \rightharpoonup U.$$

Prázdný kontext značíme

$$\varepsilon : \mathsf{Var} \rightharpoonup U,$$

a míníme tím kontext, který nepřiřazuje hodnotu žádné proměnné.

Poznámka 2.9. Podle Poznámky 2.6 můžeme též kontext proměnných

$$\rho : \mathsf{Var} \rightharpoonup U$$

chápat jako (totální) zobrazení

$$\rho : D \to U,$$

kde D je množina definovaných vstupů parciálního zobrazení $\rho : \mathsf{Var} \rightharpoonup U$. Viz např. konkrétní Příklad 2.7.

Definice 2.10. Nechť $\mathcal{I} = (U, [\![-]\!])$ je interpretace jazyka $\mathcal{L}$. Je-li dán $\rho : \mathsf{Var} \rightharpoonup U$ kontext proměnných (pro $\mathcal{I}$), proměnná $x \in \mathsf{Var}$ a prvek universa $d \in U$, pak kontext

$$\begin{aligned} \rho[x := d] : \mathsf{Var} &\rightharpoonup U \\ y &\mapsto \rho(y) \quad \text{(pro } y \neq x\text{, pokud definováno)} \\ x &\mapsto d \end{aligned}$$

nazýváme *update kontextu* ρ *o hodnotu* d *v* x.

Definice 2.11. Nechť $\mathcal{I} = (U, [\![-]\!])$ je interpretace jazyka $\mathcal{L}$ a $\rho : D \to U$ kontext proměnných ($D \subseteq \mathsf{Var}$). Pak pro každý term $t \in \mathsf{Term}(\mathcal{L})$, pro který platí $\mathsf{free}(t) \subseteq D$, definujeme jeho *interpretaci v kontextu proměnných* ρ, značeno $[\![t]\!]_\rho$, rekursivně následujícím způsobem:

- $[\![x]\!]_\rho = \rho(x)$ pro každou proměnnou $x \in D$,
- $[\![a]\!]_\rho = [\![a]\!]$ pro každý konstantní symbol a,
- $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]_\rho = [\![f]\!]([\![t_1]\!]_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]_\rho)$ pro n-ární funkční symbol f a termy $t_1, \ldots, t_n$.

Příklad 2.12. Uvažujme interpretaci $\mathcal{I}$ z Příkladu 2.3. Nechť $D = \{x, y\}$ (tedy deklarujme proměnné x a y). Vezměme nyní kontext proměnných

$$\begin{aligned} \rho : D &\to U \\ x &\mapsto 2 \\ y &\mapsto 4. \end{aligned}$$

Pak kontext proměnných $\rho[x := 3]$ je kontext

$$\begin{aligned} \rho[x := 3] : D &\to U \\ x &\mapsto 3 \\ y &\mapsto 4. \end{aligned}$$

Kontext proměnných $\rho[z := 3]$ je

$$\begin{aligned} \rho[z := 3] : D \cup \{z\} &\to U \\ x &\mapsto 2 \\ y &\mapsto 4 \\ z &\mapsto 3. \end{aligned}$$

Ukažme několik příkladů interpretace termů:

- $[\![x]\!]_\rho = 2$.
- $[\![f(a, y)]\!]_\rho = [\![f]\!]([\![a]\!], [\![y]\!]_\rho) = 1 + 4 = 5$.
- $[\![f(a, z)]\!]_\rho$ *nedává smysl*, neboť $z \notin D$.
- $[\![f(a, z)]\!]_{\rho[z:=3]} = 1 + 3 = 4$.

Poznámka 2.13. Z předchozího příkladu by mělo být patrné, že interpretace termu je jeho *evaluace* (neboli vyhodnocení). Máme-li k disposici kontext proměnných, který udává hodnoty deklarovaných proměnných, pak můžeme každý term, který využívá pouze deklarované proměnné, vyhodnotit tak, že zaměníme proměnné za jejich hodnoty, konstantní symboly za konstanty (tj., jejich interpretace) a funkční symboly za funkce (tj., taktéž jejich interpretace).

Definice 2.14. Nechť $\mathcal{I}$ je interpretace jazyka $\mathcal{L}$ predikátové logiky a nechť $\rho : D \to U$ je kontext proměnných. Fakt, že formule φ (kde $\mathsf{free}(\varphi) \subseteq D$) je v intepretaci $\mathcal{I}$ a kontextu proměnných ρ *pravdivá*, značíme

$$\mathcal{I} \models_\rho \varphi,$$

a tento vztah definujeme následovně:

- $\mathcal{I} \models_\rho P(t_1, \dots, t_n)$ právě tehdy, když $([\![t_1]\!], \dots, [\![t_n]\!]) \in [\![P]\!]$. (Zde $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$, kde P je n-ární predikátový symbol.)
- $\mathcal{I} \models_\rho t_1 = t_2$ právě tehdy, když $[\![t_1]\!] = [\![t_2]\!]$.
- $\mathcal{I} \models_\rho A$ právě tehdy, když $[\![A]\!] = 1$ (pro A nulární predikátový symbol).

Příklad 2.15. Nechť $\mathcal{I}$ je interpretace z Příkladu 2.3 a definujme

$$\begin{aligned} \rho : \{x, y\} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 2 \\ y &\mapsto 4. \end{aligned}$$

1. $\mathcal{I} \models_\rho S(y)$, neboť $[\![y]\!]_\rho \in [\![S]\!]$: číslo 4 je sudé.
2. $\mathcal{I} \models_\rho M(y, f(a, y))$, neboť
$$([\![y]\!]_\rho, [\![f(a, y)]\!]_\rho) \in [\![M]\!]$$
platí: $(4, 1 + 4) \in [\![M]\!]$, protože $4 < 5$.

Definice 2.16 (Rozšíření rekursivní definice sémantiky na formule obsahující logické spojky)**.** Nechť $\mathcal{I}$ je interpretace jazyka $\mathcal{L}$ predikátové logiky a nechť ρ je kontext proměnných. Mějme dvě formule φ, ψ jazyka $\mathcal{L}$, jejichž volné proměnné jsou v definičním oboru kontextu proměnných ρ. Pak rozšiřujeme definici vztahu $\models$ následovně:

- $\mathcal{I} \models_\rho \neg\varphi$ právě tehdy, když neplatí $\mathcal{I} \models_\rho \varphi$ (to jest, když $\mathcal{I} \not\models_\rho \varphi$).
- $\mathcal{I} \models_\rho \varphi \wedge \psi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \models_\rho \varphi$ a $\mathcal{I} \models_\rho \psi$.
- $\mathcal{I} \not\models_\rho \varphi \vee \psi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \not\models_\rho \varphi$ a $\mathcal{I} \not\models_\rho \psi$.
- $\mathcal{I} \not\models_\rho \varphi \Rightarrow \psi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \models_\rho \varphi$ a $\mathcal{I} \not\models_\rho \psi$.
- $\mathcal{I} \models_\rho \varphi \Leftrightarrow \psi$ právě tehdy, když jsou v interpretaci $\mathcal{I}$ a kontextu ρ formule φ a ψ obě pravdivé, nebo obě nepravdivé.

Příklad 2.17. Uvažujme naši interpretaci $\mathcal{I}$ a kontext proměnných

$$\begin{aligned} \rho : \{x, y\} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 2 \\ y &\mapsto 4. \end{aligned}$$

Platí

$$\mathcal{I} \models_\rho S(y) \Rightarrow S(f(a, y))?$$

Ne, protože formule $S(y)$ se vyhodnotí jako pravdivá a formule $S(f(a, y))$ se vyhodnotí jako nepravdivá: číslo 4 je sudé ($[\![y]\!]_\rho = 4$ a $4 \in [\![S]\!]$), číslo 5 sudé není ($[\![f(a, y)]\!]_\rho = 1 + 4 = 5$ a $5 \notin [\![S]\!]$).

Definice 2.18. Nechť $\mathcal{I}$ je interpretace jazyka $\mathcal{L}$ predikátové logiky a nechť $\rho : D \to U$ je kontext proměnných. Mějme formuli φ jazyka $\mathcal{L}$, pro kterou platí $\mathsf{free}(\varphi) \subseteq D$. Pak rozšiřujeme definici vztahu $\models$ následovně:

- $\mathcal{I} \models_\rho \forall x \varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \models_{\rho[x:=d]} \varphi$ pro *každé* $d \in U$.
- $\mathcal{I} \models_\rho \exists x \varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \models_{\rho[x:=d]} \varphi$ pro *alespoň jedno* $d \in U$.

Příklad 2.19. Uvažujme naši interpretaci $\mathcal{I}$ (z Příkladu 2.3) a kontext proměnných

$$\begin{aligned} \sigma : \{y\} &\to \mathbb{N} \\ y &\mapsto 4. \end{aligned}$$

Platí

$$\mathcal{I} \models_\sigma \forall x M(x, f(a, y))?$$

Musíme ověřit, zda

$$\mathcal{I} \models_{\sigma[x:=d]} M(x, f(a, y))$$

pro všechna $d \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{I} \models_{\sigma[x:=0]} M(x, f(a, y))$ platí, neboť $0 < 1 + 4$.
- $\mathcal{I} \models_{\sigma[x:=1]} M(x, f(a, y))$ platí, neboť $1 < 1 + 4$.
- $\dots$
- $\mathcal{I} \models_{\sigma[x:=5]} M(x, f(a, y))$ neplatí, neboť $5 \not< 1 + 4$.

Nalezli jsme update kontextu σ, ve kterém nebyla formule $M(x, f(a, y))$ pravdivá, a tedy v kontextu σ není pravdivá formule $\forall x M(x, f(a, y))$.

Formule $\exists x M(x, f(a, y))$ naopak v interpretaci $\mathcal{I}$ a kontextu proměnných σ pravdivá *je*: výše jsme ověřili, že např. $\mathcal{I} \models_{\sigma[x:=1]} M(x, f(a, y))$ platí.

Nyní uvažujme kontext proměnných

$$\begin{aligned} \tau : \{x\} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 1. \end{aligned}$$

Platí

$$\mathcal{I} \models_\tau S(x) \vee \exists x M(a, x)?$$

Ano. Přestože $\mathcal{I} \not\models_\tau S(x)$ (číslo 1 není sudé), platí $\mathcal{I} \models_\tau \exists x M(a, x)$. Uvažujme update $\tau[x := 2]$. V tomto kontextu proměnných je formule $M(a, x)$ pravdivá:

$$\mathcal{I} \models_{\tau[x:=2]} M(a, x),$$

neboť $1 < 2$. Pozor na častou chybu: mohlo by se zdát, že $\mathcal{I} \not\models_\tau \exists x M(a, x)$, neboť $1 < 1$ (kontext proměnné x je 1), ale existenční kvantifikátor v naší formuli nám umožňuje pokusit se nalézt alespoň jeden update kontextu τ v x takový, aby v něm naše formule po odstranění existenčního kvantifikátoru byla pravdivá.

Definice 2.20. Sentence φ je *pravdivá* v interpretaci $\mathcal{I}$, značíme

$$\mathcal{I} \models \varphi,$$

pokud platí $\mathcal{I} \models_\varepsilon \varphi$, tj., pokud je φ pravdivá v prázdném kontextu proměnných ε (viz Definici 2.8).

Příklad 2.21. Ověřme platnost

$$\mathcal{I} \models \forall x \exists y M(x, y)$$

pro interpretaci $\mathcal{I}$ z Příkladu 2.3. Platí pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{I} \models_{\varepsilon[x:=n]} \exists y M(x, y)?$$

Ano, neboť pro každé dané n můžeme zvolit $m \in \mathbb{N}$ jako $m = n + 1$, pro které platí

$$\mathcal{I} \models_{\varepsilon[x:=n][y:=n+1]} M(x, y).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ totiž platí $n < n + 1$.

Naopak,

$$\mathcal{I} \not\models \exists y \forall x M(x, y),$$

neboť neexistuje takové $m \in \mathbb{N}$ takové, aby platilo

$$\mathcal{I} \models_{\varepsilon[y:=m]} \forall x M(x, y).$$

To by totiž znamenalo, že pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{I} \models_{\varepsilon[y:=m][x:=n]} M(x, y).$$

Uvažujme však $n = m + 1$. Pak zjevně $m + 1 \not< m$.

Poznámka 2.22. Sentence φ je v interpretaci $\mathcal{I}$ buď pravdivá, nebo nepravdivá. To samé se nedá automaticky říci o formuli ψ, která obsahuje volné proměnné. Co když je ψ v nějakém kontextu volných proměnných pravdivá, a v jiném nepravdivá? Jak říci, co je tedy významem formule ψ v interpretaci $\mathcal{I}$, pokud to není přímočaře pravda či nepravda?

Jedním možným řešením je říci (prozatím jsme neformální), že významem ψ jsou ty hodnoty z universa U, které po „dosazení za volné proměnné“ do formule ψ „učiní tuto formuli pravdivou“. Tuto myšlenku nyní popíšeme přesně.

Definice 2.23. Seznam $D = (x_1, \ldots, x_n)$ nazveme *seznamem deklarovaných proměnných*, pokud $x_1, \ldots, x_n \in \mathsf{Var}$ (tj., všechny prvky v seznamu D jsou proměnné), a žádná proměnná se v seznamu D neopakuje vícekrát.

Poznámka 2.24. Proč zavádíme pojem seznamu deklarovaných proměnných? Protože některé formule obsahují volné proměnné. Pokud chceme popsat jejich význam, musíme volným proměnným přiřadit pořadí. Uvažujme například binární predikátový symbol M (a neformálně jako vztahy „mít rád“) – pak významem $M(x, y)$ pro seznam $D = (x, y)$ budou dvojice (a, b), kde „a má rád b“, zatímco významem $M(x, y)$ pro seznam $D = (y, x)$ budou dvojice (a, b), kde „b má rád a“.

Porovnejte s pojmem *uspořádaná báze* z lineární algebry.

Definice 2.25. Nechť $D = (x_1, \ldots, x_n)$ je seznam deklarovaných proměnných, $\mathcal{I}$ interpretace jazyka $\mathcal{L}$ a φ formule (kde $\mathsf{free}(\varphi) \subseteq D$). Pak *význam* φ *v* $\mathcal{I}$ je množina

$$[\![\varphi]\!]_D = \{(\rho(x_1), \ldots, \rho(x_2)) \in U^n \mid \rho : D \to U,\ \mathcal{I} \models_\rho \varphi\}.$$

Příklad 2.26. Uvažujme interpretaci z Příkladu 2.3

1. Nechť $D = (x, y)$. Pak

$$\begin{aligned}[\![M(x,y)]\!]_D &= \{(\rho(x), \rho(y)) \in \mathbb{N}^2 \mid \rho : D \to N,\ \mathcal{I} \models_\rho M(x,y)\} \\ &= \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid (n, m) \in [\![M]\!]\} \\ &= \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n < m\} \\ &= [\![M]\!].\end{aligned}$$

2. Nechť $D = (x)$. Pak

$$\begin{aligned}[\![M(x,x)]\!]_D &= \{(\rho(x)) \in \mathbb{N}^1 \mid \rho : D \to N,\ \mathcal{I} \models_\rho M(x,y)\} \\ &= \{(n) \in \mathbb{N}^1 \mid (n, n) \in [\![M]\!]\} \\ &= \{(n) \in \mathbb{N}^1 \mid n < n\} \\ &= \emptyset.\end{aligned}$$

3. Nechť $D = (x)$. Pak

$$\begin{aligned}[\![\exists y(x = f(y,y))]\!]_D &= \{(\rho(x)) \in \mathbb{N}^1 \mid \rho : D \to N,\ \mathcal{I} \models_\rho \exists y(x = f(y,y))\} \\ &= \{(n) \in \mathbb{N}^1 \mid \text{existuje } m \in \mathbb{N} \text{ takové, že } n = m + m\} \\ &= \{(n) \in \mathbb{N}^1 \mid n \text{ je sudé }\}.\end{aligned}$$

   Často ztotožňujeme $\mathbb{N}^1$ a $\mathbb{N}$. Poté můžeme říci, že

$$[\![\exists y(x = f(y,y))]\!]_D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je sudé }\} = [\![S]\!].$$

Definice 2.27. Sentence φ je *splnitelná*, pokud má nějaký model; je to *tautologie*, pokude je každá interpretace jejím modelem; a je to *kontradikce*, pokud nemá model.

Příklad 2.28. Formule

$$\varphi = \forall x M(x, f(a, x))$$

je sentence splnitelná: stačí vzít naši interpretaci $\mathcal{I}$, ta je modelem sentence φ. Sentence φ ale není tautologie. (Nalezněte dvouprvkovou interpretaci, která to dokazuje!) Naopak sentence

$$\forall x(S(x) \vee \neg S(x))$$

je tautologie. (Ukažte to tak, že pro každou interpretaci našeho jazyka $\mathcal{L}$ dokážete, že je v ní tato sentence pravdivá.)

Definice 2.29. Množina sentencí S je *splnitelná*, pokud existuje interpretace $\mathcal{I}$, která je modelem všech sentencí $\varphi \in S$ (tj., jestliže *má model*). Množina S je *nesplnitelná*, jestliže nemá model.

Příklad 2.30.

1. Prázdná množina $S = \emptyset$ je splnitelná, dokonce je každá interpretace jejím modelem.
2. Množina $T = \{\exists x S(x), \exists x \neg S(x)\}$ je splnitelná. Ukažte to na vhodně zvolené dvouprvkové interpretaci.
3. Množina $K = \{\exists x \neg S(x), \forall x S(x)\}$ je nesplnitelná. (Myšlenka: buď vlastnost S všechny prvky dané interpretace mají, nebo vlastnost S nějaký prvek nemá, nelze splnit oboje zároveň.)

Definice 2.31. Sentence φ je *sémantickým důsledkem množiny sentencí* S, pokud je každý model množiny S také modelem φ.

Značení 2.32. Sémantický důsledek značíme

$$S \models \varphi.$$

Pokud $S = \{\psi\}$ (tedy S je jednoprvková), alternativně můžeme použít značení $\psi \models \varphi$. Pokud je S prázdná, můžeme použít značení $\models \varphi$.

Příklad 2.33. Příkladem sémantického důsledku je

$$\exists y \forall x M(x, y) \models \forall x \exists y M(x, y).$$

(Pečlivě ukažte, že každý model sentence $\exists y \forall x M(x, y)$ je i modelem sentence $\forall x \exists y M(x, y)$.) V obráceném směru ale důsledek neplatí:

$$\forall x \exists y M(x, y) \not\models \exists y \forall x M(x, y).$$

Příkladem interpretace, která tento důsledek vyvrací, je naše interpretace $\mathcal{I}$.

Pozorování 2.34.

1. Sentence φ je tautologie právě tehdy, když $S \models \varphi$ pro každou množinu sentencí S.
2. $\models \varphi$ platí právě tehdy, když je φ tautologie.
3. Množina sentencí S je nesplnitelná právě tehdy, když $S \models \varphi$ pro všechny sentence φ.
4. $S \models \bot$ právě tehdy, když je S nesplnitelná.

Negační normální forma

Připomenutí: *literál* je atomická formule nebo její negace.

Definice 2.35. Formule predikátové logiky, které jsou v *negační normální formě*, specifikujeme pomocí BNF:

$$N ::= L \mid \top \mid \bot \mid N \wedge N \mid N \vee N \mid N \Rightarrow N \mid N \Leftrightarrow N \mid \forall x N \mid \exists x N,$$

kde L označuje literál.

Algoritmus pro sestrojení formule v negační normální formě z výrokové logiky můžeme snadno rozšířit na formule predikátové logiky: stačí ošetřit případy, kdy pracujeme s kvantifikovanou formulí.

- $\mathrm{NNF}(\forall x \psi) = \forall x \mathrm{NNF}(\psi)$.
- $\mathrm{NNF}(\exists x \psi) = \exists x \mathrm{NNF}(\psi)$.
- $\mathrm{NNF}(\neg \forall x \psi) = \exists x \mathrm{NNF}(\neg \psi)$.
- $\mathrm{NNF}(\neg \exists x \psi) = \forall x \mathrm{NNF}(\neg \psi)$.

Příklad 2.36. Uveďme příklady převodu několika formulí do negační normální formy.

1.

$$\begin{aligned} \mathrm{NNF}(\neg \forall x (P(x) \Rightarrow K(x))) &= \exists x \mathrm{NNF}(\neg (P(x) \Rightarrow K(x))) \\ &= \exists x (\mathrm{NNF}(P(x)) \wedge \mathrm{NNF}(\neg K(x))) \\ &= \exists x (P(x) \wedge \neg K(x)). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \mathrm{NNF}(\neg \forall x \exists y R(y,x)) &= \exists x \mathrm{NNF}(\neg \exists y R(y,x)) \\ &= \exists x \forall y \mathrm{NNF}(\neg R(y,x)) \\ &= \exists x \forall y \neg R(y,x). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\mathrm{NNF}(\neg\exists x\exists y R(x,y)) &= \forall x \mathrm{NNF}(\neg\exists y R(x,y))\\ &= \forall x\forall y \mathrm{NNF}(\neg R(x,y))\\ &= \forall x\forall y\neg R(x,y).\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\mathrm{NNF}(\neg(parentof(x,y)\wedge woman(x))) &= \neg \mathrm{NNF}(parentof(x,y)) \vee \mathrm{NNF}(\neg woman(x))\\ &= \neg parentof(x,y)\vee\neg woman(x).\end{aligned}$$

Důsledek a sémantická ekvivalence pro obecné formule

Pojem sémantického důsledku a sémantické ekvivalence jsme definovali pro sentence. Dají se tyto definice „rozumným způsobem" rozšířit i na formule, které obsahují volné proměnné? Uvidíme, že definice rozšířit lze, a že se chovají předvídatelným způsobem.

Definice 2.37. Mějme jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky. Nechť S je množina formulí a φ formule jazyka $\mathcal{L}$, a předpokládejme, že pro nějakou množinu $D \subseteq \mathsf{Var}$ platí $\mathsf{free}(\varphi) \subseteq D$ a $\mathsf{free}(\psi) \subseteq D$ pro všechny $\psi \in S$. Pak řekneme, že φ je *sémantickým důsledkem* S, a značíme

$$S \models_D \varphi,$$

pokud pro všechny interpretace $\mathcal{I}$ a všechny kontexty proměnných $\rho : D \to U$ platí:

Pokud pro všechny $\psi \in S$ platí $\mathcal{I} \models_\rho \psi$, pak $\mathcal{I} \models_\rho \varphi$.

Příklad 2.38. Ukažme, že platí

$$P(x), \forall y(P(y) \Rightarrow Q(y)) \models_{\{x\}} Q(x).$$

Pro prázdnou interpretaci nenalezneme žádný kontext proměnných $\rho : \{x\} \to \emptyset$, není pro ni tedy co ověřovat. Nechť $\mathcal{I}$ je interpretace s neprázdným universem a ρ kontext proměnných definovaný přiřazením $x \mapsto u$. Pak $\mathcal{I} \models_\rho P(x)$ znamená, že $u \in [\![P]\!]$. Platnost $\mathcal{I} \models_\rho \forall y(P(y) \Rightarrow Q(y))$ znamená, že pro každé $v \in U$ platí: pokud $v \in [\![P]\!]$, pak $v \in [\![Q]\!]$. Speciálně pro u tedy můžeme vyvodit, že $u \in [\![Q]\!]$. To ale přesně znamená, že $\mathcal{I} \models_\rho Q(x)$.

Definice 2.39. Mějme jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky a formule φ a ψ tohoto jazyka, kde $\mathsf{free}\varphi \subseteq D$ a $\mathsf{free}\psi \subseteq D$. Řekneme, že jsou tyto formule *sémanticky ekvivalentní*, a značíme

$$\varphi \mathrel{=\!\!\!|\!\!\models}_D \psi,$$

pokud platí

$$\varphi \models_D \psi \text{ a } \psi \models_D \varphi.$$

Příklad 2.40. Nechť $D = \{x\}$. Platí

$$\neg\exists y R(x,y) \mathrel{=\!\!\!|\!\!\models}_D \forall y\neg R(x,y).$$

3 Přirozená dedukce v predikátové logice

Substituce

Definice 3.1 (Substituce)**.** Pro proměnnou x, term t a formuli φ definujeme formuli $\varphi[t/x]$ jako formuli vzniklou z φ nahrazením všech volných výskytů proměnné x ve formuli φ termem t.

Příklad 3.2. Uveďme několik příkladů substituce:

1. $P(x)[f(a)/x] = P(f(a))$.
2. $R(x, y)[f(y)/x] = R(f(y), y)$.
3. $(P(y) \vee \forall y P(y))[a/y] = P(a) \vee \forall y P(y)$.

Poznámka 3.3. V současné chvíli dokonce můžeme provést následující substituci:

$$(\forall y R(x, y))[y/x] = \forall y R(y, y).$$

Tento způsob substituce v budoucnu zakážeme a ukážeme, proč je nevhodný.

Definice 3.4. Term t je *volný pro proměnnou* x *ve formuli* φ, pokud se žádný výskyt proměnné $y \in \mathsf{free}(t)$ nestane vázaným ve $\varphi[t/x]$.

Příklad 3.5. Nechť

$$\varphi = \forall y R(x, y).$$

Pak term $f(z)$ je ve formuli φ volný jak pro proměnnou x, tak pro proměnnou y, a platí

$$\varphi[f(z)/x] = \forall y R(f(z), y),$$
$$\varphi[f(z)/y] = \forall y R(x, y).$$

Term $f(y)$ je ve formuli φ volný pro proměnnou y, ale ne pro proměnnou x. Vidíme, že platí

$$\varphi[f(y)/y] = \forall y R(x, y),$$
$$\varphi[f(y)/x] = \forall y R(f(\underline{y}), y).$$

U problematické substituce jsme podtrhli a označili červeně výskyt proměnné y, který byl v termu $f(y)$ volný, ale v $\varphi[f(y)/x]$ je vázaný.

Zvyklost 1. Ačkoli je substituce definována pro jakoukoli kombinaci termu t, proměnné x a formule φ, jako *legální substituci* budeme považovat pouze takovou substituci $\varphi[t/x]$, kde je term t volný pro proměnnou x ve formuli φ. Jen v takovém případě budeme v dalším textu používat značení $\varphi[t/x]$.

(Říkáme, že provedení substituce ve φ má jako *postranní podmínku* (*side condition*) volnost t pro x.)

Přirozená dedukce

I pro predikátovou logiku zavedeme důkazový systém přirozené dedukce, který vznikne rozšířením důkazového systému pro výrokovou logiku. Stejně jako ve výrokové logice budeme studovat pojem *logického důsledku*: máme-li seznam (či množinu) sentencí S a sentenci φ nějakého zvoleného jazyka $\mathcal{L}$, budeme logický důsledek značit

$$S \vdash \varphi,$$

a řekneme, že tento vztah platí přesně v případě, kdy existuje formální důkaz sentence φ z předpokladů S.

Pravidla pro logické spojky a konstanty zůstávají zachována beze změny z důkazového systému přirozené dedukce pro výrokovou logiku.

Pravidla pro kvantifikátory

Kvantifikátor	Zavedení kvantifikátoru	Eliminace kvantifikátoru
$\forall x$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\vdots \\ \varphi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x \varphi}\ i\forall x$	$\dfrac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]}\ e\forall x$
$\exists x$	$\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi}\ i\exists x$	$\dfrac{\exists x \varphi \qquad \boxed{\begin{array}{ll} x_0 : & \varphi[x_0/x] \\ & \vdots \\ & \chi \end{array}}}{\chi}\ e\exists x$

Předvedeme využití pravidel eliminace obecného kvantifikátoru a zavedení existenčního kvantifikátoru.

Příklad 3.6. Dokažme logický úsudek

$$\forall x(C(x) \Rightarrow S(x)),\ C(s) \vdash S(s).$$

1.	$\forall x(C(x) \Rightarrow S(x))$	P
2.	$C(s)$	P
3.	$C(s) \Rightarrow S(s)$	$e\forall x$, 1
4.	$S(s)$	$e\Rightarrow$, 2, 3

Dokažme logický úsudek

$$\forall x(C(x) \Rightarrow S(x)),\ C(s) \vdash \exists y S(y).$$

1.	$\forall x(C(x) \Rightarrow S(x))$	P
2.	$C(s)$	P
3.	$C(s) \Rightarrow S(s)$	e$\forall x$, 1
4.	$S(s)$	e$\Rightarrow$, 2, 3
5.	$\exists y S(y)$	i$\exists y$, 4

Příklad 3.7. Připomeňme, že u pravidla eliminace obecného kvantifikátoru, tj.,

$$\frac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]}\ \mathrm{e}\forall x$$

je nutné, aby t byl term volný pro proměnnou x ve φ. (Viz Zvyklost 1.)

Předvedeme problém, který může nastat, když na tuto zvyklost zapomeneme. Nechť

$$\varphi = \exists y(x < y).$$

Pak formule $\forall x \varphi$ je formule

$$\forall x \exists y(x < y).$$

Povšimněte si, že tato sentence je pravdivá v matematické struktuře $(\mathbb{N}, <)$. Použitím pravidla e$\forall x$ na sentenci $\forall x \varphi$ s termem $t = y$ bychom získali sentenci

$$\varphi[y/x] = \exists y(y < y),$$

ale tato sentence je ve struktuře $(\mathbb{N}, <)$ *nepravdivá*. Cílem našeho důkazového systému je věrně zachytit pojem důsledku tak, aby souhlasil s pojmem sémantického důsledku, který jsme již zavedli. Pravidlo e$\forall x$ by tedy bez dodržování Zvyklosti 1 bylo *nekorektní*.

Příklad 3.8. Uvažujme formuli

$$\psi = R(x_0, y_0),$$

kde x_0 a y_0 jsou proměnné. Pravidlo i$\exists x$ umožňuje z formule ψ odvodit formule

1. $\exists x R(x, y_0)$,
2. $\exists x R(x_0, x)$.

Pro formuli

$$\chi = R(x_0, x_0)$$

můžeme pomocí pravidla i$\exists x$ odvodit nejen formuli $\exists x R(x, x)$, ale taktéž formule

1. $\exists x R(x, x_0)$,
2. $\exists x R(x_0, x)$.

Nyní předvedeme příklad využití pravidla zavedení obecného kvantifikátoru.

Příklad 3.9. Dokažme logický úsudek

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)),\ \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x).$$

1.	$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$\forall x P(x)$	P
3.	x_0	D
4.	$P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$	e$\forall x$, 1
5.	$P(x_0)$	e$\forall x$, 2
6.	$Q(x_0)$	e$\Rightarrow$, 5, 4
7.	$\forall x Q(x)$	i$\forall x$, 3–6

Nyní předvedeme příklad využití pravidla eliminace existenčního kvantifikátoru.

Příklad 3.10. Dokažme logický úsudek

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)),\ \exists y P(y) \vdash \exists z Q(z).$$

1.	$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$\exists y P(y)$	P
3.	$y_0 : P(y_0)$	W
4.	$P(y_0) \Rightarrow Q(y_0)$	e$\forall x$, 1
5.	$Q(y_0)$	e$\Rightarrow$, 3, 4
6.	$\exists z Q(z)$	i$\exists z$, 5
7.	$\exists z Q(z)$	e$\exists y$, 2, 3–6

Deklarované proměnné

Definice 3.11. Mějme jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky. Nechť $D \subseteq \mathsf{Var}$ je množina *deklarovaných proměnných*. Pak je term $t \in \mathsf{Term}(\mathcal{L})$ *termem v deklarovaných proměnných* D, pokud platí

$$\mathsf{free}(t) \subseteq D.$$

Zvyklost 2. Substituci $\varphi[t/x]$ v důkazu můžeme provést pouze tehdy, pokud je legální, a pokud term t je term v právě deklarovaných proměnných D. Takovýmto substitucím říkáme *povolené* substituce.

Pro zaváděné předpoklady α musí platit $\mathsf{free}(\alpha) \subseteq D$.

Příklad 3.12. Uvažujme jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ zadaný následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned}&\mathsf{Pred} = \{S\}, \mathrm{ar}(S) = 1\\&\mathsf{Func} = \{\cdot\}, \mathrm{ar}(\cdot) = 2, \text{ infixní}\\&\mathsf{Kons} = \{2\}.\end{aligned}$$

Deklarujme proměnné $D = \{x, y\}$.

1. Termy $x, x \cdot y, y \cdot x, x \cdot (x \cdot y), 2 \cdot x, x \cdot (y \cdot 2), \ldots$ jsou termy v deklarovaných proměnných D.

2. Nechť $z \in \mathsf{Var}, z \notin D$. Termy $x \cdot z, 2 \cdot z$, atd., *nejsou* termy v deklarovaných proměnných D (neboť obsahují nedeklarovanou proměnnou z).

Ukažme, že

$$\forall u\, S(2 \cdot u) \vdash_{\{x,y\}} S(2 \cdot x).$$

$$\begin{array}{r|l|ll|l|}
\cline{2-5}
1. & x & & \text{D} & \\
\cline{3-4}
2. & & y & \text{D} & \\
3. & & \forall u S(2 \cdot u) & \text{P} & \\
4. & & S(2 \cdot x) & \text{e}\forall u, 3 & \\
\cline{3-4}
5. & & & & \\
\cline{2-5}
6. & \multicolumn{4}{l}{} \\
\end{array}$$

Obvykle nesmí poslední řádek důkazu (zde řádek s formulí $S(2 \cdot x)$) být uzavřen v žádném boxu. Naše zadání však požaduje dokázat toto tvrzení s deklarovanými proměnnými x a y. To, že tyto proměnné zůstávají deklarované na konci důkazu, tedy v tomto případě není chyba, ale splnění zadání.

Naopak, pokud bychom se pokusili o důkaz

$$\forall u\, S(2 \cdot u) \vdash_{\{x,y\}} S(2 \cdot z)$$

následujícím způsobem:

$$\begin{array}{r|l|ll|l|}
\cline{2-5}
1. & x & & \text{D} & \\
\cline{3-4}
2. & & y & \text{D} & \\
3. & & \forall u S(2 \cdot u) & \text{P} & \\
4. & & S(2 \cdot z) & \text{e}\forall u, 3 & \\
\cline{3-4}
5. & & & & \\
\cline{2-5}
6. & \multicolumn{4}{l}{} \\
\end{array}$$

selže důkaz na tom, že v řádku 4 porušujeme Zvyklost 2: proměnná z není v boxu obsahujícím řádek 4 deklarována.

Zvyklost 2 je pro nás důležitá: jelikož umožňujeme jazyk predikátové logiky (který neobsahuje konstantní symboly) interpretovat i s prázdným universem, používání nedeklarované proměnné by vyústilo v nekorektní důkazy.

Příklad 3.13. Pro logiky, kteří neuvažují interpretace s prázdným universem, platí sémantický důsledek

$$\forall x B(x) \models \exists x B(x).$$

Pro nás tento sémantický důsledek *neplatí*: vezměme interpretaci $\mathcal{I}$ s universem $U = \emptyset$, kde $[\![B]\!] = \emptyset$. Pak $\mathcal{I} \models \forall x B(x)$, avšak $\mathcal{I} \not\models \exists x B(x)$.

Způsob, jakým by logici (porušujíce Zvyklost 2) dokázali

$$\forall x B(x) \vdash \exists x B(x)$$

je následující:

$$\begin{array}{lll} 1. & \forall x B(x) & P \\ 2. & B(y) & e\forall x\,,1 \\ 3. & \exists x B(x) & i\exists x\,,2 \end{array}$$

Kde se však vzala proměnná y? Nikde v důkazu nebyla deklarována, není tedy termem v deklarovaných proměnných a její substituce je pro nás nelegální.

Uvažujme (velmi neformálně), čemu všemu může předchozí (pro nás nekorektní) důkaz odpovídat: když předpokládáme, že jsou všichni jednorožci bílí, znamená to, že existuje bílý jednorožec? To, že jsou všichni jednorožci bílí, je pravda, pokud žádní jednorožci neexistují (jako je tomu například v naší sluneční soustavě). Z faktu, že jsou všichni jednorožci bílí, bychom tedy ale neměli být schopni odvodit, že takový jednorožec existuje.

Náš důkazový systém však není nikterak chudší oproti systémům ostatních logiků: chceme-li za každou cenu postulovat, že *něco* existuje, můžeme například místo $\forall x B(x) \vdash \exists x B(x)$ dokazovat

$$\forall x B(x) \vdash_{\{e\}} \exists x B(x),$$

tedy ukázat, že pokud mají všichni vlastnost B, pak má někdo vlastnost B — *za předpokladu, že něco existuje*! Zde předpoklad existence „alespoň něčeho" postulujeme deklarací proměnné e. Důkaz důsledku $\forall x B(x) \vdash_{\{e\}} \exists x B(x)$ by pak mohl vypadat například takto:

$$\begin{array}{l|ll|} \cline{2-3} 1. & e & D \\ 2. & \forall x B(x) & P \\ 3. & B(y) & e\forall x\,,2 \\ 4. & \exists x B(x) & i\exists x\,,3 \\ \cline{2-3} 5. & & \end{array}$$

Alternativně lze předpoklad existence zavést taktéž zcela explicitně následovně:

$$\exists y \top, \forall x B(x) \vdash \exists x B(x).$$

Důkaz by vypadal takto:

1.	$\exists y \top$	P
2.	$\forall x B(x)$	P
3.	$y_0 : \top$	W
4.	$B(y_0)$	e$\forall x$, 2
5.	$\exists x B(x)$	i$\exists x$, 4
6.	$\exists x B(x)$	e$\exists y$, 1, 3–5

Rovnost

	Zavedení	Eliminace
Pravidlo pro rovnost	$\dfrac{}{t = t}$ i=	$\dfrac{t_1 = t_2 \qquad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]}$ e=

Příklad 3.14. Dokažme

$$\forall x S(2 \cdot x), \forall x \forall y\, (x \cdot y = y \cdot x) \vdash \forall z S(z \cdot 2).$$

1.	$\forall x S(2 \cdot x)$	P
2.	$\forall x \forall y\, (x \cdot y = y \cdot x)$	P
3.	z_0	D
4.	$S(2 \cdot z_0)$	e$\forall x$, 1
5.	$\forall y (2 \cdot y = y \cdot 2)$	e$\forall x$, 2
6.	$2 \cdot z_0 = z \cdot 2$	e$\forall y$, 5
7.	$S(z_0 \cdot 2)$	e=, 6, 4
8.	$\forall z S(z \cdot 2)$	i$\forall z$, 3–7

Odvozená pravidla pro rovnost Následující dvě odvozená pravidla můžete v důkazech používat jako základní.

	Symetrie	Transitivita
Pravidlo pro rovnost	$\dfrac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}$ sym=	$\dfrac{t_1 = t_2 \qquad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}$ trans=

Korektnost a úplnost

Tvrzení 3.15 (Věta o korektnosti a úplnosti)**.** Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk predikátové logiky, S množina sentencí a φ sentence jazyka $\mathcal{L}$. Pak platí

$$S \vdash \varphi \text{ právě tehdy, když } S \models \varphi.$$

Reference

[1] H. B. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*, Elsevier, 2001.

[2] M. Huth a M. Ryan, *Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems*, Cambridge University Press, 2004.

[3] J. Velebil, *Velmi jemný úvod do matematické logiky*, 2007. Dostupné online na https://math.fel.cvut.cz/en/people/velebil/files/y01mlo/logika.pdf.