

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek. Všechny formule jsou sentencemi.

$$\begin{aligned} & \forall x(S(x) \Rightarrow \forall y(K(y) \Rightarrow V(x, y))), \\ & \exists x(K(x) \wedge \forall y(O(y) \Rightarrow V(x, y))), \\ & \forall x \forall y \forall z((V(x, y) \wedge V(y, z)) \Rightarrow V(x, z)) \\ & \vdash \forall x(S(x) \Rightarrow \forall y(O(y) \Rightarrow V(x, y))). \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{(\exists x \forall y (P(y, x) \wedge P(y, a))) \Rightarrow (\exists x Q(x, a)), \forall x \neg Q(x, x), \forall x \forall y P(x, y)\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) Přirozenou dedukcí ve výrokové logice dokažte následující tvrzení. *(Pokud používáte zákon vyloučeného třetího (LEM), dokažte ho použitím základních pravidel také.)*

$$\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Dokažte, že pro každý neorientovaný graf G platí: pokud je G eulerovský, pak je souvislý a každý jeho vrchol má sudý stupeň.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Dokažte následující tvrzení. Pokud je G graf bez kružnic a přidáním libovolné hrany ke G nějaká kružnice vznikne, pak je G strom.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) O neorientovaném grafu G víme, že ať z něj odstraníme jakýkoli vrchol v (a hrany incidentní s v), barevnost tohoto nového grafu je o 1 menší než barevnost grafu G . Rozhodněte, zda je G nutně souvislý.