

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $((a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow c)) \vee (c \Rightarrow a)$ je tautologie.
2. Formule $((a \Rightarrow \neg b) \wedge (b \vee c)) \wedge (c \Rightarrow \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \wedge b) \wedge c) \wedge (c \Rightarrow (\neg a \vee \neg b))$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{a \wedge b, b \Rightarrow \neg c, c \Rightarrow \neg a\} \models c \Rightarrow \neg c$.
5. Množina formulí $\{a \vee b, \neg b \vee \neg c, c \vee \neg d, d\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{R\}, ar(R) = 3,$$

$$\text{Func} = \{f\}, ar(f) = 1,$$

$$\text{Kons} = \emptyset.$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně:

$$U = \mathbb{N}$$

$$\llbracket R \rrbracket = \{(m, n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m + n \leq p\}$$

$$\llbracket f \rrbracket : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto n + 1$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x \exists y R(x, y, f(x))$.
2. $\exists x \forall z \exists y R(x, y, z)$.
3. $\forall x \forall y \forall z (R(x, y, z) \Rightarrow R(f(x), f(y), f(z)))$.
4. $\forall z \forall x \exists y R(x, y, z)$.
5. $\exists y \forall x R(x, y, f(x))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists yR(x, y))$ pravdivá?

1. $U = \{1, 2\}$, $\llbracket P \rrbracket = \{2\}$, $\llbracket R \rrbracket = \{(1, 2), (2, 2)\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket P \rrbracket = \emptyset$, $\llbracket R \rrbracket = U \times U$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket P \rrbracket = \mathbb{N}$, $\llbracket R \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m > n\}$.
4. $U = \mathbb{Q}$, $\llbracket P \rrbracket = \{-1, 0, 1\}$, $\llbracket R \rrbracket = \{(0, q) \mid q \in \mathbb{Q}\}$.
5. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket P \rrbracket = \{2, 3\}$, $\llbracket R \rrbracket = \{(m, n) \in U \times U \mid m \leq n\}$.

Úloha 4 (2 body) Neorientovaný graf G je dán šestiprvkovou množinou vrcholů $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a množinou hran, která je popsána následujícím seznamem:

hrana	$\{1, 3\}$	$\{1, 5\}$	$\{2, 4\}$	$\{2, 6\}$	$\{3, 5\}$	$\{3, 6\}$	$\{4, 6\}$
-------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------

Rozhodněte, která tvrzení o grafu G platí:

1. G má kostru.
2. G lze nakreslit jedním otevřeným tahem.
3. G je bipartitní.
4. G má barevnost 4.
5. G obsahuje kružnici o čtyřech vrcholech.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení o *neorientovaných* grafech jsou pravdivá:

1. Každý graf, který má barevnost 7, má alespoň 7 hran.
2. Existuje graf, který má přesně jednu kostru.
3. Každý souvislý graf, který obsahuje alespoň jednu kružnici, má více hran než vrcholů.
4. Každý bipartitní graf je souvislý.
5. Každý graf obsahuje nějakou kliku.