

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b)) \Rightarrow \top$ je tautologie.
2. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge \neg a) \vee (b \wedge \perp)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow b) \wedge a) \vee (\neg a \wedge b)$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{a \wedge b, b \Rightarrow \neg c, c \Rightarrow \neg a\} \models \perp$.
5. Množina formulí $\{a \Rightarrow b, b \Rightarrow c, c \Rightarrow d, d \Rightarrow \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{R\}, ar(R) = 3,$$

$$\text{Func} = \{f\}, ar(f) = 1,$$

$$\text{Kons} = \emptyset.$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně:

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{Z} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n, o) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m + n = o\} \\ \llbracket f \rrbracket &: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto 2 \cdot n \end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall z \forall x \exists y R(x, y, z)$.
2. $\forall x \forall y \forall z (R(x, y, z) \Rightarrow R(f(x), f(y), f(z)))$.
3. $\exists x \forall z \exists y R(x, y, z)$.
4. $\forall x \exists y R(x, y, f(x))$.
5. $\exists y \forall x R(x, y, f(x))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{\}, \\ \text{Kons} &= \{\}.\end{aligned}$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists x(P(x) \wedge \forall y R(x, y))$ pravdivá?

1. $U = \{1, 2\}$, $\llbracket P \rrbracket = \{2\}$, $\llbracket R \rrbracket = \{(1, 2), (2, 2)\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket P \rrbracket = \emptyset$, $\llbracket R \rrbracket = U \times U$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket P \rrbracket = \mathbb{N}$, $\llbracket R \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\}$.
4. $U = \mathbb{Q}$, $\llbracket P \rrbracket = \{-1, 0, 1\}$, $\llbracket R \rrbracket = \{(0, q) \mid q \in \mathbb{Q}\}$.
5. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket P \rrbracket = \{2, 3\}$, $\llbracket R \rrbracket = \{(m, n) \in U \times U \mid m \leq n\}$.

Úloha 4 (2 body) O neorientovaném grafu G bez smyček a bez paralelních hran jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm nutně platí?

1. G není souvislý.
2. G je graf bez kružnic s přesně dvěma komponentami souvislosti.
3. G obsahuje alespoň jednu kružnici.
4. G má barevnost maximálně 5.
5. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.

Úloha 5 (2 body) Je dán orientovaný graf H , o kterém víte jen to, že je acyklický (neobsahuje cykly) a že má 7 vrcholů. Která z následujících tvrzení o něm nutně platí také?

1. H není silně souvislý.
2. H má alespoň 6 hran.
3. H je (brán jako neorientovaný graf) souvislý.
4. H obsahuje nějaký vrchol v , pro který platí $d_{out}(v) = 0$.
5. H obsahuje nějaký vrchol u , pro který platí $d_{in}(u) > 0$.