

Jméno a příjmení:**Podpis:**

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.

Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek. Všechny formule jsou sentencemi.

$$\begin{aligned}
 &\forall x(L(m, x) \Rightarrow F(x)), \\
 &\forall x((S(x) \wedge \neg P(x)) \Rightarrow \neg B(x)), \\
 &\quad S(j), \\
 &\forall x((S(x) \wedge \neg T(x)) \Rightarrow \neg P(x)), \\
 &\quad \forall x(\neg B(x) \Rightarrow \neg F(x)) \\
 &\qquad \vdash \neg T(j) \Rightarrow \neg L(m, j)
 \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$\begin{aligned}
 S = \{ &\forall x \neg R(x, x), \\
 &\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z)), \\
 &\quad \exists x (\exists y R(x, y) \wedge \exists z R(z, x)), \\
 &\forall x (\exists y R(x, y) \Rightarrow \exists y \exists z (y \neq z \wedge R(x, y) \wedge R(x, z))), \\
 &\forall x (\exists y R(y, x) \Rightarrow \exists y \exists z (y \neq z \wedge R(y, x) \wedge R(z, x))) \}.
 \end{aligned}$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Na opačné straně pokračují další úlohy.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) Jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky je dán následovně:

$\text{Pred} = \{\text{parentof}, \text{man}, \text{woman}\}$, $\text{ar}(\text{parentof}) = 2$, $\text{ar}(\text{man}) = \text{ar}(\text{woman}) = 1$,

$\text{Func} = \emptyset$,

$\text{Kons} = \emptyset$.

Sestrojte formuli φ jazyka $\mathcal{L}$, pro kterou platí $\text{free}(\varphi) = \{x, y\}$ a která formalisuje výrok „ x je babičkou y “. Sestrojte formuli ψ jazyka $\mathcal{L}$, pro kterou platí $\text{free}(\psi) = \{x\}$ a která formalisuje výrok „ x má bratra“.

(Formule $\text{parentof}(x, z)$ např. formalisuje výrok „ x je rodičem z “.)

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Nalezněte minimální kostru v neorientovaném ohodnoceném grafu s pěti vrcholy, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, kde následující matice udává ceny hran. Jaká je cena minimální kostry?

$$\begin{pmatrix} - & 5 & 9 & 2 & 3 \\ 5 & - & 10 & 7 & 9 \\ 9 & 10 & - & 6 & 10 \\ 2 & 7 & 6 & - & 4 \\ 3 & 9 & 10 & 4 & - \end{pmatrix}$$

Použijte nějaký algoritmus z přednášky, samotný obrázek nestačí. (Výše uvedená matice např. udává, že cena hrany $\{v_2, v_4\}$ je 7.)

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Je dána posloupnost čísel $p = (5, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2)$.

1. Sestrojte souvislý neorientovaný graf G (bez paralelních hran a smyček), jehož skóre je posloupnost p . Skóre grafu je posloupnost stupňů jeho vrcholů, seřazená sestupně.
2. Jaký je minimální počet hran, který je třeba do grafu G přidat, aby se stal eulrovským? Jak by vypadalo skóre výsledného grafu? (Graf je *eulrovský*, pokud lze nakreslit jedním uzavřeným tahem.)

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Jsou dány dvě kupky sirek (Kupka 1 a Kupka 2), Kupka 1 obsahuje 5 sirek, Kupka 2 obsahuje 4 sirky. Dva hráči (Hráč 1 a Hráč 2) hrají hru s následujícími pravidly:

1. Hráči se střídají na tahu, začíná Hráč 1.
2. Hráč na tahu si vybere jednu z kupek (obsahující $n > 0$ sirek) a odebere z ní x sirek ($1 \leq x \leq n$).
3. Vyhrává hráč, který je na tahu a obě kupky sirek jsou prázdné (obsahují 0 sirek).

Který z hráčů má výherní strategii? (Popište graf odpovídající stavovému prostoru hry ze zadání. Popište jádro tohoto grafu a vysvětlete jeho herně-teoretický význam.)