

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee \neg a) \wedge (\neg b \vee (b \wedge \neg b))$ je tautologie.
2. Formule $(a \wedge \neg a) \vee (\neg b \wedge (b \vee \neg b))$ je kontradikce.
3. Formule $(a \wedge b) \Rightarrow \neg(a \wedge b)$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{a \Rightarrow b, b \Rightarrow a\} \models a \wedge b$.
5. Množina formulí $\{\perp \Rightarrow a, a \Rightarrow \perp, \neg a, b \Rightarrow a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m + n < 10\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m \cdot n \\ \llbracket a \rrbracket &= 5\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\forall x((\exists yS(x, y)) \Rightarrow \forall z(S(z, x) \Rightarrow \exists yS(z, y)))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Q}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 10 vrcholů a obsahuje kružnici délky 8. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost minimálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 9.
3. Pokud G obsahuje více než 12 hran, pak je souvislý.
4. G není eulerovský.
5. G obsahuje maximálně tři komponenty souvislosti.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Existuje silně souvislý orientovaný graf, který neobsahuje cykly.
2. Existuje silně souvislý orientovaný graf, který není (slabě) souvislý.
3. Každý (slabě) souvislý acyklický graf je stromem.
4. Každý silně souvislý orientovaný graf lze topologicky očíslovat.
5. Každý orientovaný graf, který lze topologicky očíslovat, je silně souvislý.