

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \\ \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	6	MIN	SEM	Celkově	Známka

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} & \forall x((B(x) \vee G(x)) \Rightarrow C(x)), \\ & \forall x(C(x) \Rightarrow ((D(x) \vee T(x)) \vee L(x))), \\ & \neg \exists x(B(x) \wedge D(x)), \\ & \forall x((C(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \neg L(x)), \\ & \vdash (\neg \exists x(C(x) \wedge T(x))) \Rightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg H(x))) \end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (P(y) \wedge R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(y)), \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(x, y)), \exists x P(x), \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) (Výroková logika.) Nechť $At = \{a, b\}$ je množina atomických formulí. Dále je dána množina formulí $M = \{a \Rightarrow b, a \vee b\}$. Rozhodněte, zda pro každou formuli $\varphi \in Fm(A)$ platí, že

$$\text{buď } M \models \varphi, \text{ nebo } M \models \neg \varphi.$$

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Kružnice délky 3 se nazývá *trojúhelník*.

1. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 3$, který neobsahuje trojúhelník.
2. Sestrojte graf G s barevností $\chi(G) = 4$, který neobsahuje trojúhelník.
3. Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ existuje graf o n vrcholech obsahující alespoň $n + 3$ hran, který neobsahuje trojúhelník.

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů) Tato úloha se týká neorientovaných grafů bez paralelních hran a bez smyček. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s n vrcholy a $n - 1$ hranami platí, že neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.