

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 1

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 2

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 4

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 5

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 6

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 7

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 8

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 9

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 10

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 11

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 12

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 13

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 14

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 15

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 16

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 17

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 18

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 19

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 20

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 21

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 22

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 23

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 24

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 25

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 26

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 27

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 28

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 29

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 30

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 31

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 32

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 33

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 34

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 35

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 36

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 37

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 38

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 39

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 40

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 41

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 42

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 43

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.

LGR — minimum — 26. května 2025 — vaše ID je 44

Jméno a příjmení:

Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení. Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

1	2	3	4	5	Součet

Úloha 1 (2 body) Toto je úloha z výrokové logiky. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Formule $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$ je tautologie.
2. Formule $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee (a \wedge \neg a)$ je kontradikce.
3. Formule $((a \Rightarrow \perp) \wedge b) \Rightarrow \neg b$ je splnitelná.
4. Platí sémantický důsledek $\{(a \wedge \perp), b\} \models \neg b$.
5. Množina formulí $\{a, b, a \vee \neg b, b \vee \neg a\}$ je splnitelná.

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \text{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \text{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{2, 5, 10\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \mid |m - n| < 3\} \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ &\quad (m, n) \mapsto m + n \\ \llbracket a \rrbracket &= 3\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
2. $\forall x \exists y R(x, y)$.
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$.
4. $\forall x \forall y (R(x, g(x, y)) \Rightarrow R(y, g(x, y)))$.
5. $\exists y \forall x (R(x, y) \Rightarrow R(y, a))$.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$

$$\text{Func} = \{\},$$

$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists y \forall x \forall z ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$ pravdivá?

1. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$.
3. $U = \mathbb{N}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m + 1 = n\}$.
5. $U = \mathbb{Z}$, $\llbracket S \rrbracket = \{(m, n) \mid m \cdot n = 0\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 14 vrcholů a 16 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G je souvislý.
4. G je eulerovský.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i (orientovaný) cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.