
B4M39RSO

**Zobrazovací rovnice a formy jejího
vyjádření**

Vlastimil Havran

ČVUT v Praze – CTU Prague

Verze 2018

Osnova

- Od lokálního odrazu světla ke globální zobrazovací rovnici
- Od zobrazovací rovnice k rekurzivnímu sledování paprsku
- Zobrazovací rovnice jako integrál přes směry a přes plochy
- Přímé a nepřímé osvětlení
- Od zobrazovací rovnice k radiozitě
- Zobrazovací rovnice jako integrální operátor

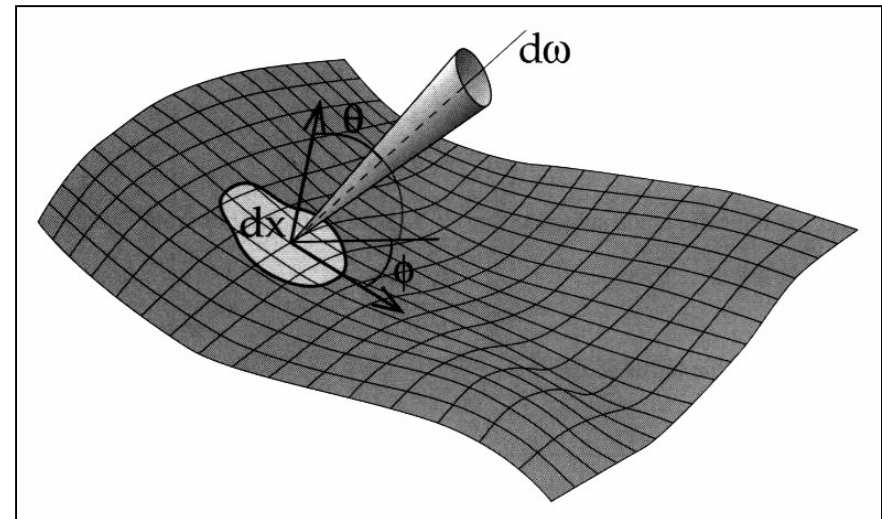
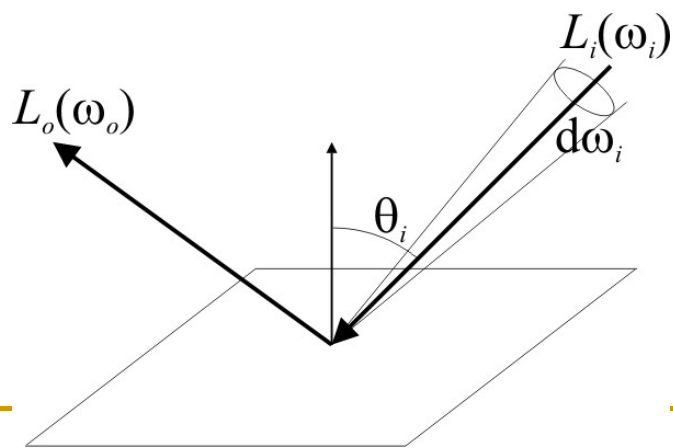
Od lokálního odrazu světla ke globální zobrazovací rovnici

Zopakování: BRDF – Bidirectional Reflectance Distribution Function

Definice BRDF:

$$f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) = \frac{dL_o(\mathbf{x}, \omega_o)}{dE(\mathbf{x}, \omega_i)} = \frac{dL_o(\mathbf{x}, \omega_o)}{L_i(\mathbf{x}, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i}$$

- Jednotka: [sr⁻¹]



Lokální odraz světla – rovnice odrazu

- Rovnice odrazu (“Reflection equation”)
- “Kolik světla je odraženo do směru ω_o , je-li bod \mathbf{x} osvětlen ze všech příchozích směrů ω_i ?”
- Integrál přes všechny příchozí směry
 - hemisféra $H(\mathbf{x})$ – pouze odraz, nebo
 - sféra Ω – lom i odraz (BSDF)

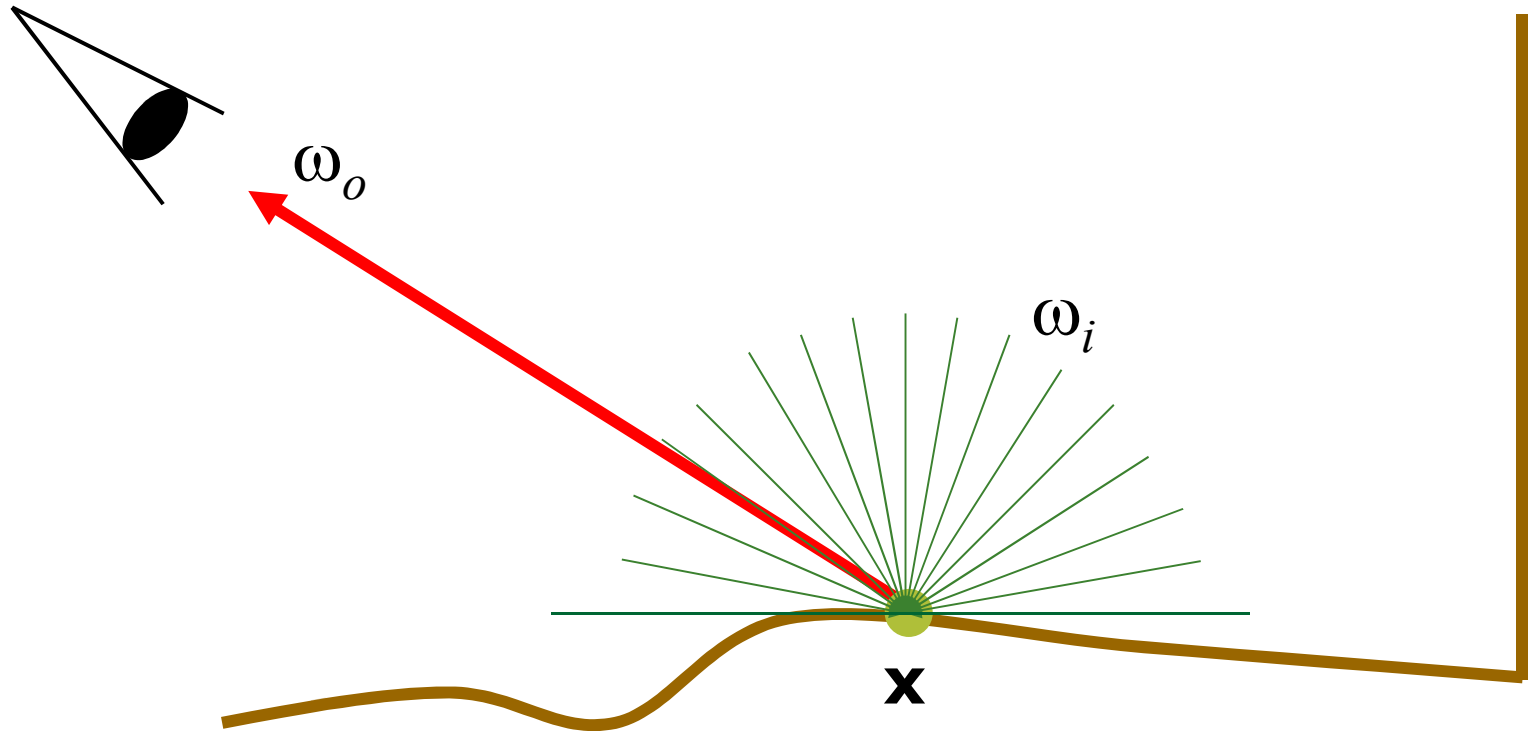
$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

emise

odraz (+ lom)

Lokální odraz světla

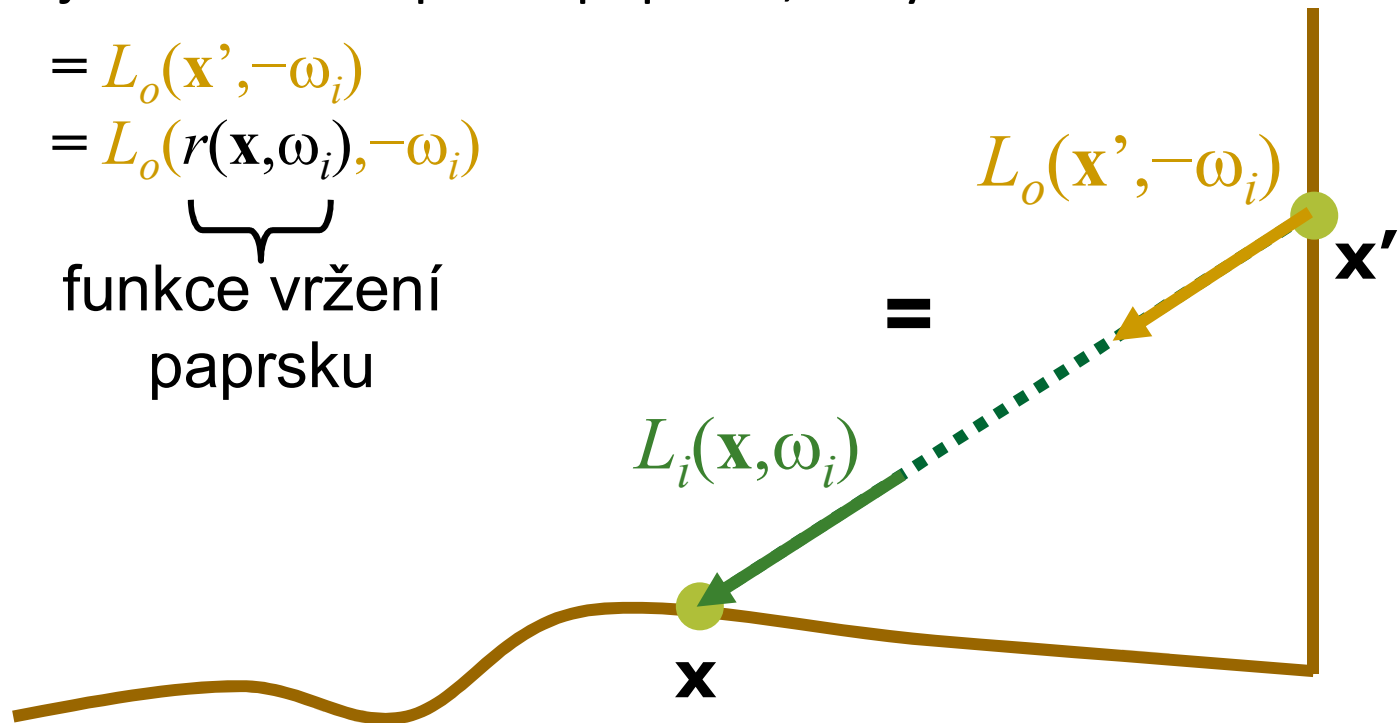
$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$



Transport světla

- **Q:** Jaká je příchozí radiance ze směru ω_i ?
- **A:** Radiance je konstantní podél paprsku, tedy

$$\begin{aligned} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) &= L_o(\mathbf{x}', -\omega_i) \\ &= L_o(\underbrace{r(\mathbf{x}, \omega_i)}_{\text{funkce vržení paprsku}}, -\omega_i) \end{aligned}$$



Od lokálního odrazu ke globálnímu šíření světla

- Funkce vržení paprsku: $r(\mathbf{x}, \omega)$
 - Nejbližší průsečík paprsku z bodu \mathbf{x} ve směru ω
- Dosazení $L_i(\mathbf{x}, \omega_i) = L_o(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i)$ do rovnice odrazu:

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L_o(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

- Příchozí radiance L_i byla vyloučena.
- Odchozí radiance L_o použita jinde ve scéně – další odraz.
- Neznámá radiance L_o je na obou stranách rovnice.

Zobrazovací rovnice –

Rendering equation

- Kajiya, James T., "The rendering equation", SIGGRAPH 1986
- Odstranění indexu „o“ u radiance:

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

- Popis ustáleného stavu = energetické rovnováhy ve scéně.
- Algoritmy globálního osvětlení hledají takové rozložení radiance ve scéně, které odpovídá zobrazovací rovnici.

Výpočet obrázku = výpočet $L(\mathbf{x}, \omega)$ pro místa na površích objektů viditelných přes pixely.

Rozdíl mezi rovnicí odrazu a zobrazovací rovnicí

Podobný tvar – rozdílný význam

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

■ Rovnice odrazu

- popisuje lokální odraz světla v jednom místě
- Integrál, pomocí něhož lze spočítat odchozí radianci z příchozí radianci v daném bodě

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

■ Zobrazovací rovnice

- Podmínka na globální rozložení světla ve scéně
- Integrální rovnice – neznámá L vlevo i vpravo

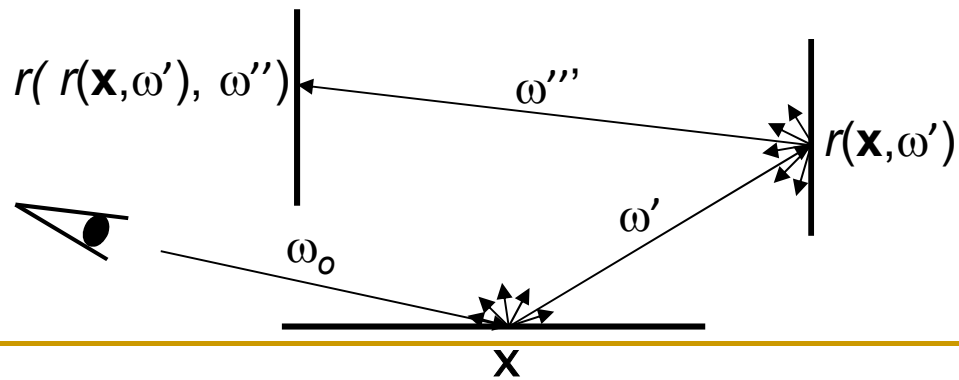
Od zobrazovací rovnice k rekurzivnímu sledování paprsku

Rekurzivní výpočet zobrazovací rovnice

- Úhlová formulace zobrazovací rovnice (ZR):

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

- Pro výpočet $L(\mathbf{x}, \omega_o)$ potřebuji spočítat $L(r(\mathbf{x}, \omega'), -\omega')$ pro všechny směry ω' okolo bodu \mathbf{x}
- Pro výpočet každého $L(r(\mathbf{x}, \omega'), -\omega')$ potřebuji spočítat $L(r(r(\mathbf{x}, \omega'), \omega''), -\omega'')$ pro všechny směry ω'' okolo bodu $r(\mathbf{x}, \omega')$
- Atd... => rekurze



Rekurzivní výpočet zobrazovací rovnice

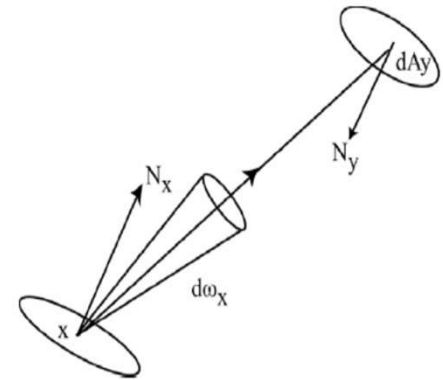
- Rekurzivní výpočet
 - převedení zobrazovací rovnice zpět na postupnou aplikaci rovnice odrazu
- Výpočet integrálu **přes všechny** příchozí směry
 - Monte Carlo metody = výběr náhodných směrů, viz. příští přednáška

Zjednodušení pro zrcadlový odraz – klasický ray tracing

- Pro odhad integrálu $\int_{\Omega} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$ na jedné úrovni rekurze je obecně zapotřebí mnoha vzorků integrandu (tj. mnoha vržených sekundárních paprsků)
- Zrcadlový odraz
 - BRDF f_r je Diracův impuls, tj. je nenulová pouze pro jediný směr
 - Pro odhad integrálu stačí jediný sekundární paprsek v tomto směru
- Podobně pro ideální lom

Zobrazovací rovnice jako integrál přes směry a přes plochy

Zobrazovací rovnice – úhly versus plochy



- Integrál přes směry – původní formulace

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

- Integrál přes plochy scény (substituce $d\omega = dA \frac{\cos \theta}{r^2}$)

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_S L(\mathbf{y}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega_o) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA$$

$\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$...jednotkový vektor ve směru od \mathbf{y} k \mathbf{x}

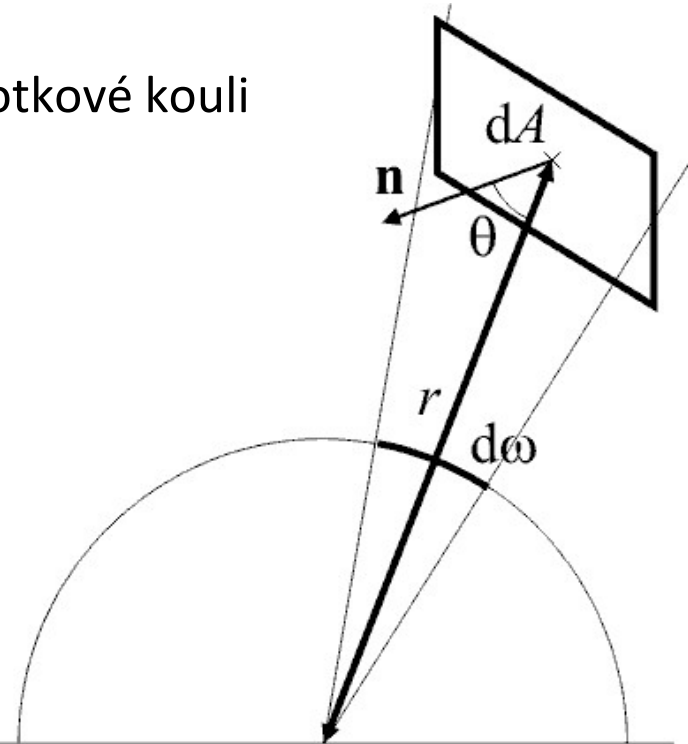
$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\cos \theta_x \cos \theta_y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}$...geometrický člen

$V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$...viditelnost \mathbf{y} z \mathbf{x}
 $1 \Leftrightarrow \mathbf{y}$ viditelné z \mathbf{x}
 0 jinak

Zopakování: Diferenciální prostorový úhel

- „Nekonečně malý“ prostorový úhel okolo směru
- 3D vektor
 - Velikost $d\omega$
 - velikost diferenciální plošky na jednotkové kouli
 - Směr $d\omega$
 - střed projekce diferenciální plošky na jednotkovou kouli
- Prostorový úhel diferenciální plošky

$$d\omega = dA \frac{\cos \theta}{r^2}$$



Integrální formulace zobrazovací rovnice přes úhly

- Sčítání příspěvků světla do bodu ze všech směrů
- Pro každý směr najdu nejbližší plochu
- Implementace ve stochastickém ray tracingu:
 - Pro dané místo \mathbf{x} , generuj náhodné směry, pro každý směr vrhni paprsek a najdi nejbližší průsečík, v něm spočítej odchozí radianci. To vše sečti přes všechny náhodné směry.

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

Integrální formulace zobrazovací rovnice přes plochy

- Sčítání příspěvků světla do bodu ze všech ploch scény
- Příspěvek započítán pouze pokud je plocha z bodu viditelná
- Implementace ve stochastickém ray tracingu:
 - Generuj náhodně místa \mathbf{y} na geometrii. Pro každé otestuj viditelnost mezi \mathbf{x} a \mathbf{y} . Pokud viditelné, přičti k osvětlení v \mathbf{x} odchozí radianci z \mathbf{y} váženou geometrickým faktorem.
- Nejběžnější použití plošné formulace: radiozita, výpočet přímého osvětlení v stochastickém ray tracingu

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_S L(\mathbf{y}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega_o) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA$$

Přímé a nepřímé osvětlení

Přímé a nepřímé osvětlení

- Obecná formulace zobrazovací rovnice platná pro přímé i nepřímé osvětlení
- Praktické strategie výpočtu ZR pro přímé a nepřímé osvětlení se však liší:
 - Formální rozdělení ZR na přímé a nepřímé osvětlení

Výpočet přímého osvětlení

- A priori víme, kde se nachází zdroje přímého osvětlení
- Tyto zdroje jsou často velmi lokalizované (malé v poměru s velikostí scény)
- Náhodné vrháním paprsku by mělo malou (u bodového zdroje nulovou) pravděpodobnost zásahu světelného zdroje => šum
- **Použití plošné formulace ZR** je výhodnější
 - vzorkování plochy světelného zdroje
 - testování viditelnosti mezi vzorkem na zdroji na osvětlovaným bodem
 - kvadratický útlum se vzdáleností

Výpočet nepřímého osvětlení

- A priori nevíme, kde jsou ve scéně zdroje nepřímého osvětlení
- Tyto zdroje (tj. všechny plochy scény) nejsou lokalizované
- **Použití úhlové formulace ZR** je výhodnější
 - Vzorkování hemisféry - vržení sekundárních paprsků
 - Rekurzivní aplikace

Bodový světelný zdroj

- „Plocha“ světelného zdroje je jediný bod
- Plošný integrál přes světelné zdroje degeneruje na sumarizaci přes všechny bodové zdroje
- Jeden stínový paprsek na světlo v klasickém sledování paprsku

Plošný světelný zdroj

- Plošný integrál přes plochu zdroje

$$L^{direct}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{Zdroj} L_e(\mathbf{y}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA$$

- Vzorkování plochy zdroje
- Pro každý vzorek vyhodnocení integrandu (=příspěvek vzorku)
- Sečíst příspěvky vzorků, vynásobit plochou zdroje, vydělit počtem vzorků
- Speciální případ Monte Carlo integrace
 - ale to až na příští přednášce...

Od zobrazovací rovnice k radiozitě

Od zobrazovací rovnice k radiozitě

- Formulace ZR pomocí integrálu přes plochy:

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_S L(\mathbf{y}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega_o) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA$$

- Radiozita – pouze difúzní plochy

- BRDF konstantní v ω_i a ω_o

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \frac{\rho(\mathbf{x})}{\pi} \int_S L(\mathbf{y}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA$$

- Odchozí radiance je nezávislá na ω a je rovna radiozitě B děleno π pro každý bod \mathbf{x}

$$B(\mathbf{x}) = B_e(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \int_S B(\mathbf{y}) \underbrace{\frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\pi}}_{G'(\mathbf{x}, \mathbf{y})} dA$$

Radiozita s konstantními konečnými elementy

- Konstantní radiozita přispívajících plošných elementů

$$B(\mathbf{x}) = B_e(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^N B_j \int_{A_j} G'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA_j$$

- Průměrná (konstantní) radiozita elementu i :
 - Střední hodnota radiozity přes plochu elementu

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{1}{A_i} \int_{A_i} B(\mathbf{x}) dA_i = \\ &= B_{e,i} + \rho_i \sum_{j=1}^N B_j \underbrace{\frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} G'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA_j}_{F_{ij}} \end{aligned}$$

F_{ij} ... form faktor

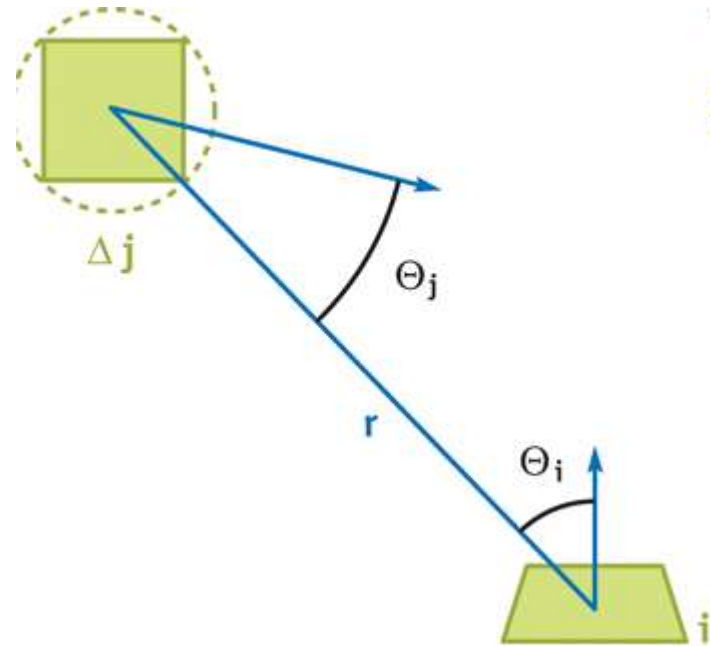
Radiozita s konstantními konečnými elementy

- Klasická radiozitní rovnice

$$B_i = B_{e,i} + \rho_i \sum_{j=1}^N B_j F_{ij}$$

- Form faktor je vypočítán:

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \iint_{A_i A_j} \frac{\cos \theta_x \cos \theta_y}{\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} \cdot V(x, y) dA_i dA_j$$



Zobrazovací rovnice jako integrální operátor

Integrální rovnice

- Integrální rovnice prvního druhu
 - Neznámá pouze na pravé straně uvnitř integrálu

$$f(x) = \int k(x, x')g(x') dx'$$

- Integrální rovnice druhého druhu
 - neznámá na obou stranách

$$f(x) = g(x) + \int k(x, x')f(x') dx'$$

- Často je označeno jako Fredholmova integrální rovnice druhého druhu

Lineární operátory

- Lineární operátory působí na funkce
 - jako matice na vektory

$$h(x) = (L \circ f)(x)$$

- Působení je lineární

$$L \circ (af + bg) = a(L \circ f) + b(L \circ g)$$

- Příklady lineárních operátorů

$$(K \circ f)(x) \equiv \int k(x, x') f(x') dx'$$

$$(D \circ f)(x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(x)$$

Transportní operátor

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \omega_o) &= \int_{\Omega} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i \\ &= K \circ L \end{aligned}$$

- Zobrazovací rovnice

$$L = L_e + K \circ L$$

$$(I - K) \circ L = L_e$$

- Řešení

$$L = (I - K)^{-1} \circ L_e$$

Formální řešení

- Neumannova řada

$$(I - K)^{-1} = \frac{1}{I - K} = I + K + K^2 + \dots^3 + \dots$$

- Ověřte

$$\begin{aligned}(I - K) \circ (I - K)^{-1} &= (I - K) \circ (I + K + K^2 + \dots^3) \\ &= (I + K + \dots^2) - (K + K^2 + \dots^3) \\ &= I\end{aligned}$$

Postupné aproximace

- Postupné aproximace

$$L^1 = L_e$$

$$L^2 = L_e + K \circ L^1 \quad \dots \text{přímé osvětlení}$$

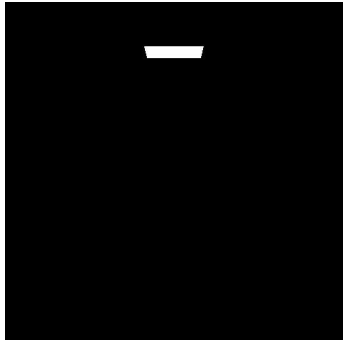
...

$$L^n = L_e + K \circ L^{n-1}$$

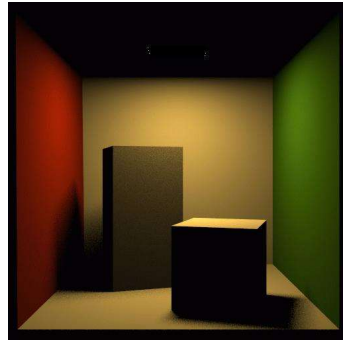
- Zkonvergované řešení

$$L^n = L^{n-1} \quad \therefore \quad L^n = L_e + K \circ L^n$$

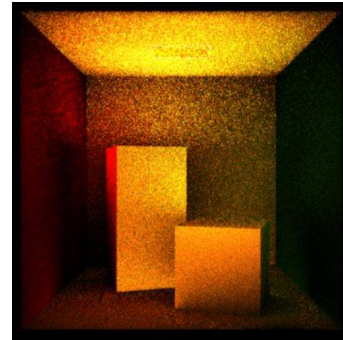
Postupné aproximace



L_e



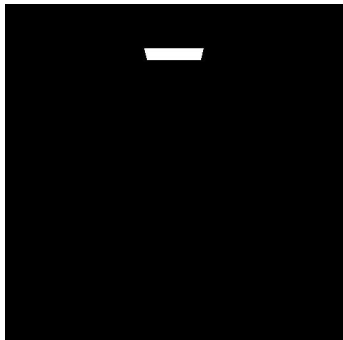
$K \circ L_e$



$K \circ K \circ L_e$



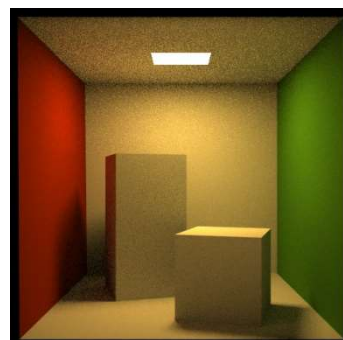
$K \circ K \circ K \circ L_e$



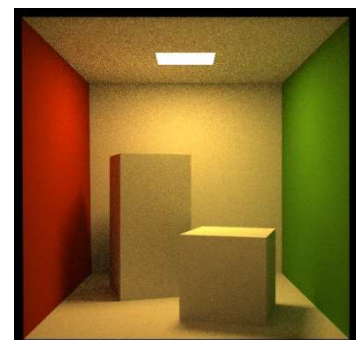
L_e



$L_e + K \circ L_e$



$L_e + \dots K^2 \circ L_e$



$L_e + \dots K^3 \circ L_e$

Images by Pat Hanrahan