V každé úloze 1. – 4. označte své odpovědi postupně podle zadání A, B, C, D, pište je na stejnou stránku pod zadání nebo na rub archu a oddělte je vhodně opticky, např. pomocí zvýrazněné čáry apod. Případné pomocné výpočty pište na jiný arch, který také podepište a odevzdejte. Pokud můžete, pište tiskacím písmem.
Každá úloha 1. – 4. je hodnocena 0 – 4 body, přitom každá z odpovědí na otázky A, B, C, D přispívá do tohoto počtu nejvýše 1 bodem. Při neúplné nebo nejasné odpovědi přihlíží zkoušející také k celkovému charakteru ostatních odpovědí.

1. Řazení

A. Určete a zdůvodněte, kolik vzájemných porovnání prvků pole nastane při řazení daného pole délky 8 algoritmem Merge Sort. Pole: 2, 4, 6, 5, 8, 7, 3, 1.

B. Určete a zdůvodněte, kolik vzájemných porovnání prvků pole nastane při řazení daného pole délky 8 algoritmem Insert Sort. Pole: 10 20 20 10 20 10 10 20

C. Insert sort řadí pole P délky 3n, pričemž před zahájením řazení mají všechny prvky v první a v poslední třetině pole hodnotu n a všechny prvky ve druhé třetině pole mají hodnotu 2n. Odvoďte a zdůvodněte asymptotickou složitost řazení pole P v závislosti na hodnotě n.

D. Quick sort řadí pole P délky 2n, pričemž před zahájením řazení tvoří prvních n prvků v poli rostoucí posloupnost a posledních n prvků v poli tvoří klesající posloupnost. Přitom platí, že všechny prvky v první polovině pole jsou menší než všechny prvky ve druhé polovině pole. Jako pivot je vždy vybírán první prvek řazeného úseku. Odvoďte a zdůvodněte asymptotickou složitost řazení pole P v závislosti na hodnotě n.

2. Je dána množina M obsahující 3 předměty. Váhy těchto předmětů jsou 2, 5, a 6 kg. Hodnoty předmětů v daném pořadí od nejlehčího k nejtěžšímu jsou 10, 40 a 30 hodnotových jednotek. Dále je dán kontejner o kapacitě 20 kg. Úlohou je nalézt optimální naplnění kontejneru (nazývaného také batoh) v následujícím smyslu: Hledá se taková posloupnost P předmětů množiny M, pro níž platí, že součet hodnot předmětů v P je maximální možný a přitom součet vah těchto předmětů nepřekročí kapacitu kontejneru (batohu). Předměty se mohou v posloupnosti P opakovat a cena i váha každého předmětu se započítávají tolikrát, kolikrát se předmět vyskytuje v P.

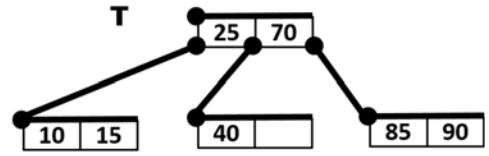
A. Napište rekurentní vztah, pomocí nějž se počítají hodnoty v tabulce dynamického programování při řešení této úlohy. Nezapomeňte uvést také počáteční podmínky rekurentního vztahu. Vysvětlete význam jednotlivých symbolů v napsaném vztahu.

B. Pro zadané numerické hodnoty tabulku nakreslete a vyplněte konkrétními čísly s využitím rekurentního vztahu uvedeného v A.

C. Uvedenou úlohu je možno interpretovat také jako hledání optimální cesty v acyklickém orientovaném grafu. Napište, co představují uzly a hrany v takovém grafu a jak se určí ohodnocení jednotlivých hran.

D. Předpokládejte, že v neomezené úloze batohu je dáno N objektů, přičemž váha i cena každého z nich je vyjádřena jednociferným celým číslem. Kapacita batohu je vyjádřena celým číslem, jehož zápis v desítkové soustavě obsahuje k cifer. Určete asymptotickou složitost nalezení optimálního naplnění batohu v závislosti na hodnotách N a k. Zdůvodněte svůj výpočet.

3. Na obrázku je B-strom T, jehož každý uzel smí obsahovat jen 1 nebo 2 klíče a nejvýše 3 bezprostřední potomky.



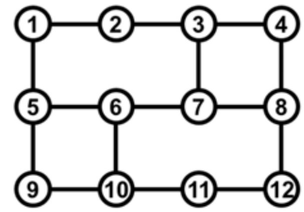
A. Uveďte všechny možné hodnoty celočíselného klíče K, po jehož vložení do T výška T vzroste. Uvažujte hodnoty K v intervalu od 1 do 100 včetně.

B. Zdůvodněte, zda je možné, aby po vložení dvou klíčů do původního stromu T vzrostla výška stromu T o 2. Pokud je to možné, nakreslete příklad.

C. Jaký je nejmenší možný počet klíčů, které je nutno vložit do původního stromu T, aby v T bylo alespoň 9 uzlů? Zdůvodněte svůj závěr a nakreslete příklad.

D. Předpokládejte že B-strom obsahuje N uzlů ($N \geq 6$), z nich každý může mít nejvýše 3 bezprostřední potomky. Jaký je, v závislosti na hodnotě N, maximální možný počet uzlů navštívených nebo zpracovávaných během vložení nového klíče do tohoto stromu? Vysvětlete, jak jste tento maximální počet nalezli.

4. V grafu G daném na obrázku je celkem 12 uzlů označených čísly 1, 2, 3, ..., 12. V grafu G probíhá prohledávání do šířky. Přitom navíc platí pravidlo, že algoritmus při své činnosti postupuje dopředu do dosud neotevřených vrcholů vždy tak, že pokaždé v určitém vrcholu vybírá jeho sousední vrchol s nejnižším možným označením.



A. Prohledávání začne v uzlu 2.
Napište, v jakém pořadí budou otevřeny jednotlivé uzly během prohledávání.

B. Prohledávání začne v uzlu 2. Předpokládáme, že algoritmus využívá standardní datovou strukturu fronta. V určitém okamžiku bude ve frontě největší počet prvků za dobu celého prohledávání. Napište, které uzly budou v tom okamžiku ještě neobjevené (FRESH), které budou otevřené (OPEN) a které budou zavřené (CLOSED). Pokud existuje více možností, určete je všechny.

C. Napište, ve kterém uzlu nebo ve kterých uzlech musí prohledávání začít, za dodržení uvedeného pravidla, aby strom prohledávání měl co nejmenší hloubku, uveďte tuto hloubku a nakreslete strom prohledávání pro jeden z těchto případů.

D. Předpokládejme, že v úplném neorientovaném grafu s *n* uzly probíhá prohledávání do šířky. Při otevření každého uzlu je volána další funkce, která sama o sobě není součástí prohledávání a jejíž doba běhu je úměrná počtu uzlů, které již byly uzavřeny. Jaká bude asymptotická složitost tohoto prohledávání? Zdůvodněte.