Algoritmizace

Marko Genyk-Berezovskyj, Daniel Průša

2010 - 2024

Dnešní téma

Rekurzivní algoritmy

- Programovací technika rozděl a panuj
- Odvození časové složitosti
- Domácí úloha

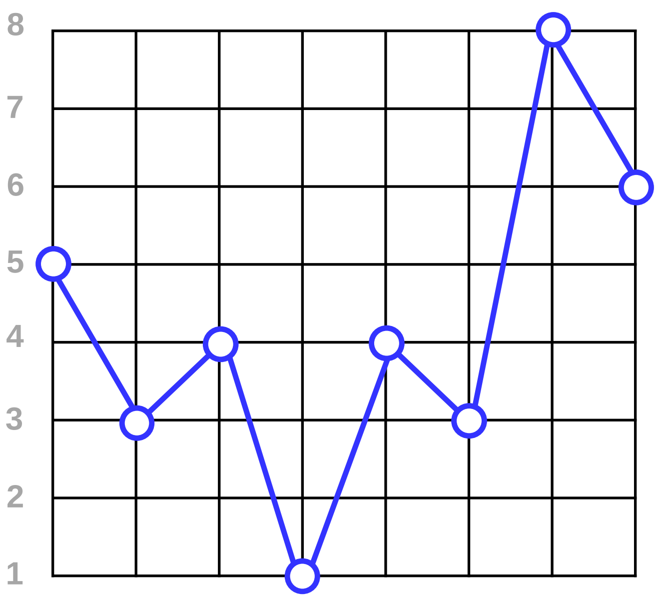
slido

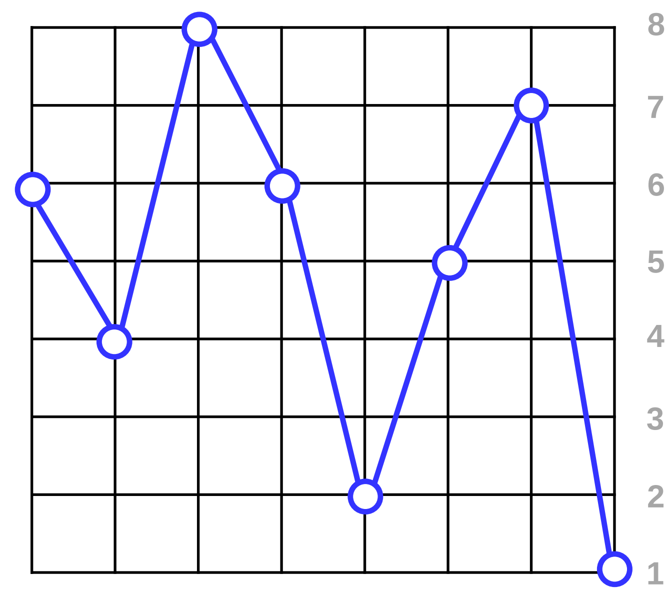
Join at slido.com
#1526493

ⓘ Start presenting to display the joining instructions on this slide.

Nákup a prodej akcií

Predikce vývoje ceny
v čase:





Úloha: Chceme naplánovat jeden nákup a jeden prodej tak, aby zisk byl maximální možný.

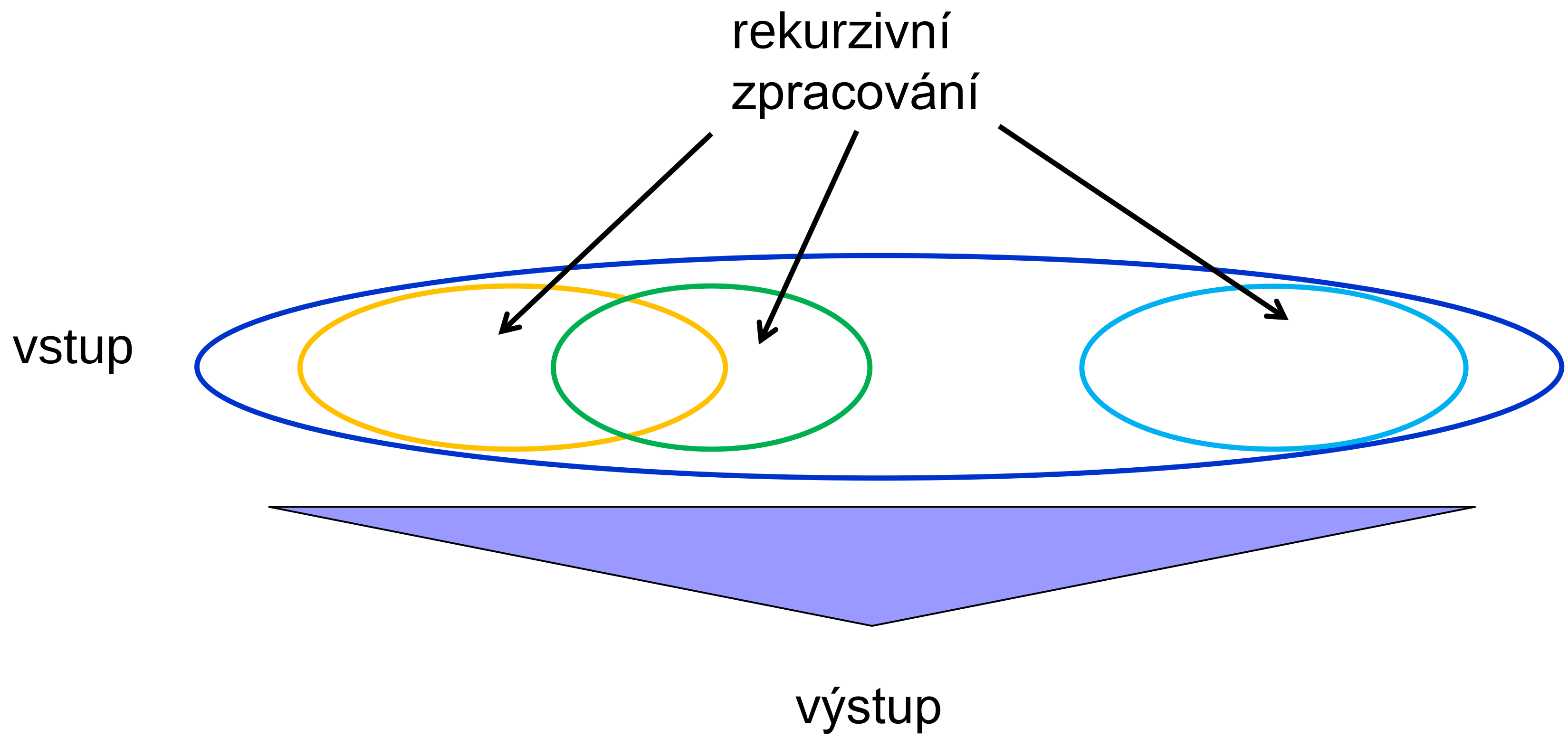
Nákup a prodej akcií

Rekurzivní algoritmus:

```
MaxProfit(int low, int hi, int[] cena):
if low == hi then
   return 0;
else
   mid = (low + hi) / 2;
   profit_1 = MaxProfit(low, mid, cena);
   profit_2 = MaxProfit(mid + 1, hi, cena);
   profit_3 = MAX(mid + 1, hi, cena) -
      MIN(low, mid, cena);
   return MAX3(profit_1, profit_2, profit_3);
endif
```

Rozděl a panuj

- Divide and conquer, divide et impera
- Programovací technika



Rozděl a panuj

- Třídění
- Syntaktická analýza (top-down parsing)
- Násobení velkých čísel
- Násobení matic
- Diskrétní Fourierova transformace

Nákup a prodej akcií

Rekurzivní algoritmus:

```
MaxProfit(int low, int hi, int[] cena):
if low == hi then
   return 0;
else
   mid = (low + hi) / 2;
   profit_1 = MaxProfit(low, mid, cena);
   profit_2 = MaxProfit(mid + 1, hi, cena);
   profit_3 = MAX(mid + 1, hi, cena) -
      MIN(low, mid, cena);
   return MAX3(profit_1, profit_2, profit_3);
endif
```

Časovou složitost vyjádříme rekurentně:

$$T(1) = \theta(1)$$

$$T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \Theta(n),\ n > 1$$

slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

Převod rekurence na přímé vyjádření

- Přímým vyjádřením složitosti myslíme vyjádření složitosti bez rekurence.
  - Např: $T(n) \in \Theta(\log n)$

- Jaké jsou možnosti řešení?
  - **Substituční metoda**
    - „Uhádneme" řešení a potom dokážeme, že je správné indukcí.
  - **Metoda rekurzívního stromu**
    - Spočítáme složitost celého rekurzivního stromu.
  - **Použití „kuchařky"** (Master theorem – mistrovská věta)
    - Pro některé speciální tvary rekurentních vztahů známe předem vypočítané řešení dle mistrovské věty.

Substituční metoda

- Řešíme ve dvou krocích
  1. **Odhadneme přesný tvar řešení.**
     - Odhad lze stanovit například pomocí zjišťováním složitosti pro různá vstupní n.
  2. **Matematicky dokážeme, že je náš odhad správný.**
     - Obvykle se dokazuje pomocí matematické indukce.
- Metoda bývá zpravidla velmi účinná.
- Její nevýhodou je určování přesného tvaru řešení v kroku 1 pro které neexistuje obecný postup.

Substituční metoda

$$T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \Theta(n), \quad n > 1$$

Zkusme odhadnout, jakou má $T(n)$ asymptotickou složitost.

A. $T(n) \in \Theta(n)$

B. $T(n) \in \Theta(n \log n)$

C. $T(n) \in \Theta(n^2)$

D. $T(n) \in \Theta(2^n)$

slido

Prodej akcií - jaká je časová složitost?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Substituční metoda

- $$T(1) = d$$
  $$T(n) = T\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + d \cdot n, \quad n > 1$$

- Nejprve mat. indukcí dokážeme $\forall k \geq 1$: $T(2^k) \leq 2dk2^k$
  - Ověříme platnost tvrzení pro $k = 1$:
    $$T(2^1) = T(1) + T(1) + 2d = 4d$$
  - A s použitím indukčního předpokladu $T(2^k) \leq 2dk2^k$ odvodíme

$$T(2^{k+1}) = T(2^k) + T(2^k) + d2^{k+1} \leq 2dk2^{k+1} + d2^{k+1}$$
$$= (2k+1)d2^{k+1} \leq 2(k+1)d2^{k+1} = 2d(k+1)2^{k+1}$$

Substituční metoda

- Nyní výsledek zobecníme pro každé $n \geq 2$.
- Pro takové n existuje mocnina dvojky n' splňující

$$n \leq n' < 2n$$

- $T(n)$ je neklesající funkce, platí tedy

$$T(n) \leq T(n') \leq 2dn' \log_2 n' < 4dn \log_2(2n) \in O(n \log n)$$

slido

Audience Q&A Session

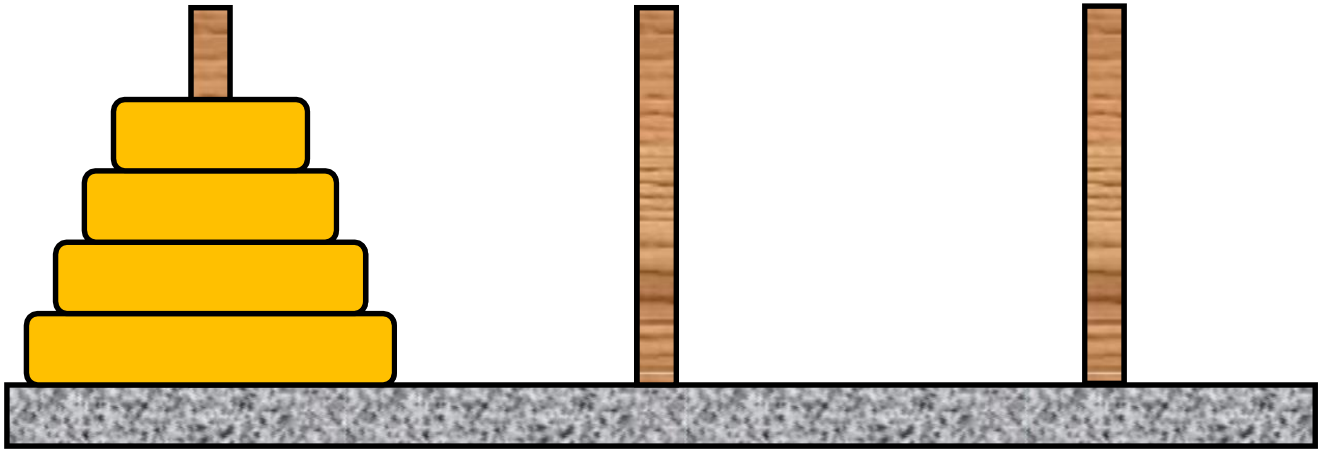
ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

Hanojská věž

Úkol: přemístit disky z tyče vlevo na tyč vpravo

Pravidla:

- disky přesouváme pouze jednotlivě, z tyče na tyč
- větší disk nesmí nikdy ležet na menším disku



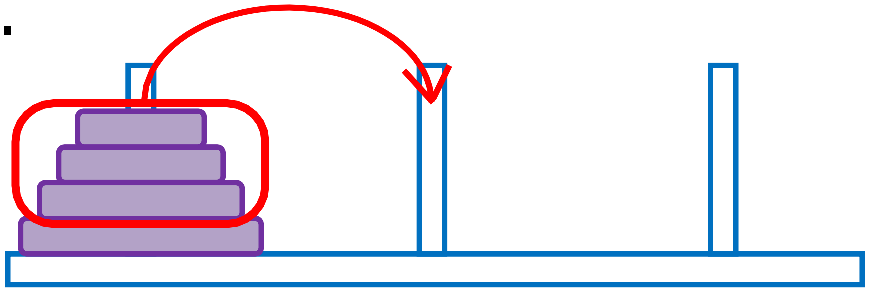
Hanojská věž

https://www.youtube.com/watch?v=CBM1zE9vFnE

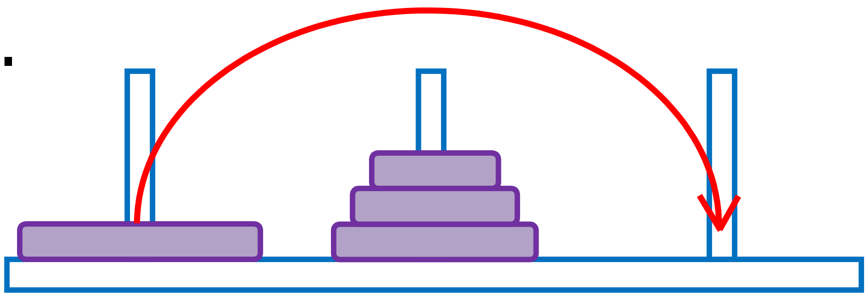
Hanojská věž

Rekurzivní algoritmus:

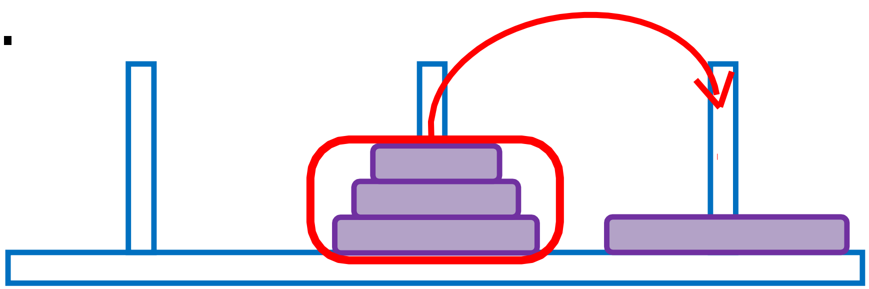
1.



2.



3.



odkud, přes, kam

```
Hanoj(n, t1, t2, t3):
if n > 0 then
    Hanoj(n-1, t1, t3, t2);
    přesuň disk z t1 na t3;
    Hanoj(n-1, t2, t1, t3);
endif
```

```
Hanoj(4,1,2,3);
```

Hanojská věž

Časová složitost je úměrná počtu tahů (přesunů), které provedeme.

```
Hanoj(n, t1, t2, t3):
if n > 0 then
   Hanoj(n-1, t1, t3, t2);
   přesuň disk z t1 na t3;
   Hanoj(n-1, t2, t1, t3);
endif
```

$$T(1) = 1,$$

$$T(n) = 2T(n-1) + 1, \qquad n > 1.$$

Substituční metoda

- $$T(1) = 1,$$
  $$T(n) = 2T(n-1) + 1, \qquad n > 1.$$

Zkusme odhadnout asymptotickou složitost funkce $T(n)$.

A. $T(n) \in \Theta(n)$

B. $T(n) \in \Theta(n \log n)$

C. $T(n) \in \Theta(n^2)$

D. $T(n) \in \Theta(2^n)$

Hanojská věž - jaká je časová složitost?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Substituční metoda

- $$T(1) = 1,$$
  $$T(n) = 2T(n-1) + 1, \qquad n > 1.$$

Dokážeme $T(n) = 2^n - 1$

- Pro $n = 1$:

$$2^1 - 1 = 1 = T(1)$$

- Pro $n > 1$:

$$T(n+1) = 2T(n) + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1$$
$$= 2^{n+1} - 1$$

slido

Audience Q&A Session

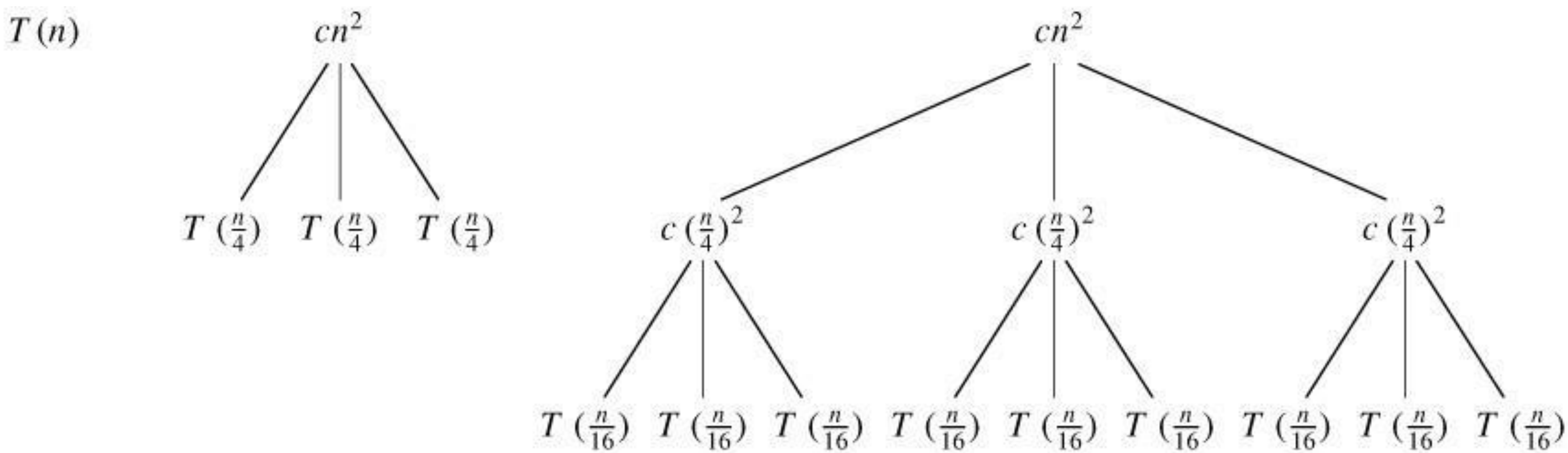
ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

Metoda rekurzivního stromu

- Příklad:

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + cn^2$$

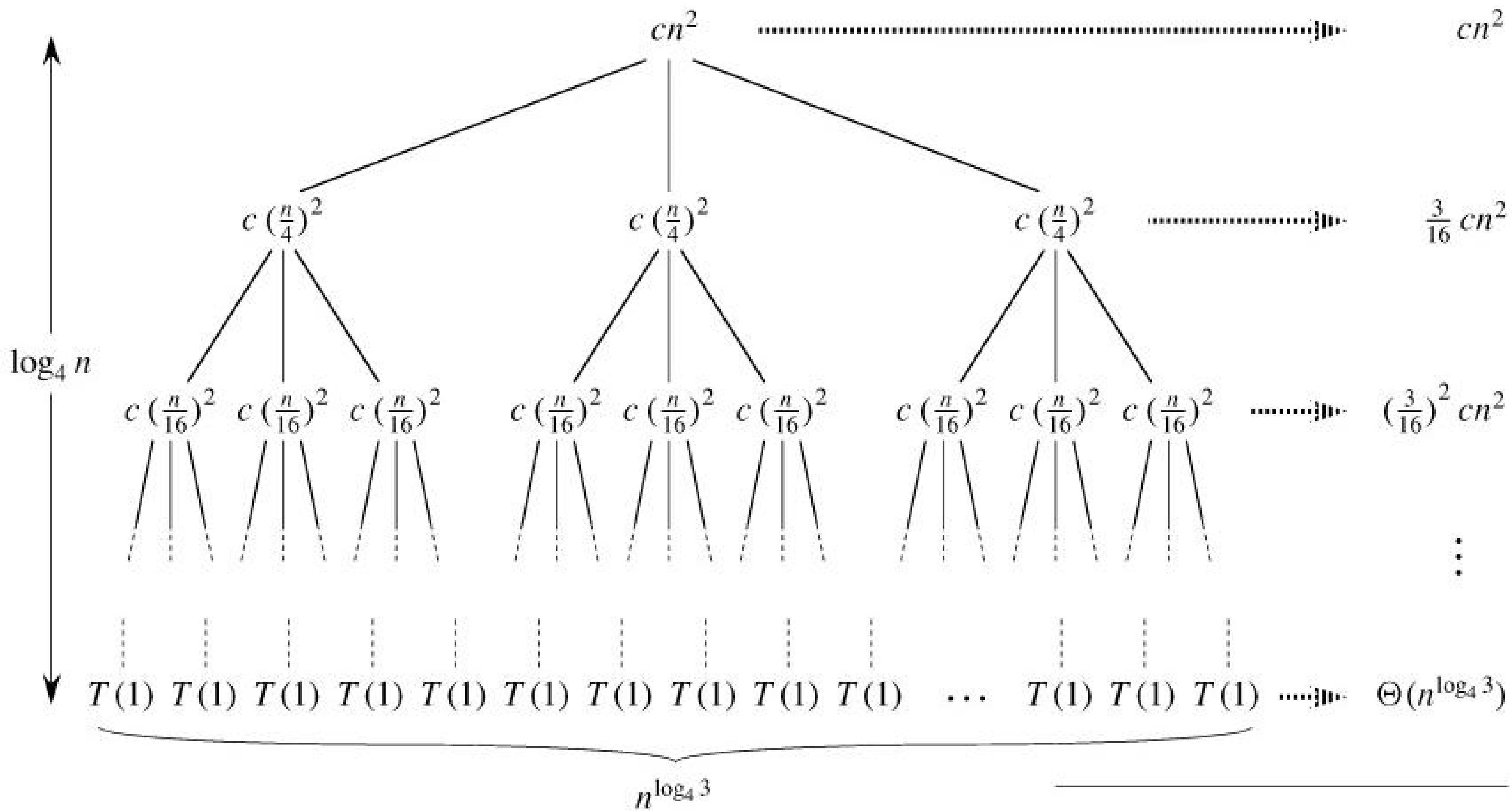
- Iterativně rozkládáme do rekurzivních stromů:



- Pro každý strom platí, že součet všech uzlů dá složitost $T(n)$ podle původního rekurentního vztahu.
- Rekurzivní stromy jsou pouze grafická vizualizace rozvoje rekurentního vztahu.

Metoda rekurzivního stromu

- Výsledný strom má následující tvar:



- Vyjádříme součty v patrech a patra sečteme: $O(n^2)$

Metoda rekurzivního stromu

- Výsledný rekurzivní strom má $3^{\log_4 n}$ listů, z čehož odvodíme

$$3^{\log_4 n} = \left(4^{\log_4 3}\right)^{\log_4 n} = 4^{(\log_4 3)\cdot(\log_4 n)}$$
$$= \left(4^{\log_4 n}\right)^{\log_4 3} = n^{\log_4 3}$$

Metoda rekurzivního stromu

- Součet pater spočítáme následovně:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n-1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{1}{1-(3/16)} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{16}{13} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= O(n^2)\,.
\end{aligned}
$$

podle vzorce $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

kde $0 < q < 1$

slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

Mistrovská věta

- Master theorem nebo také kuchařková věta
- Řeší složitost rekurentní funkce tvaru

$$T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$$

kde $a \geq 1$ a $b > 1$ jsou konstanty
a $f(n)$ je asymptoticky kladná funkce.

- Zaokrouhlení u členu $T(n/b)$ na $T(\lfloor n/b \rfloor)$ nebo $T(\lceil n/b \rceil)$ neovlivní v tomto případě výslednou složitost.
- Lze aplikovat na Mergesort, binární vyhledávání, hledání mediánu, Strassenův algoritmus pro násobení matic, …

Mistrovská věta

Nechť jsou $a \geq 1$ a $b > 1$ konstanty, nechť je $f(n)$ asymptoticky kladná funkce a nechť $T(n)$ je definováno pro nezáporná celá čísla rekurencí $T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$, kde n/b má význam buď $\lfloor n/b \rfloor$ nebo $\lceil n/b \rceil$. Potom lze $T(n)$ asymptoticky vyjádřit následovně:

1. Pokud $f(n) \in O(n^{\log_b(a)-\varepsilon})$ pro nějakou konstantu $\varepsilon > 0$, potom
$$\boldsymbol{T(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)})}.$$
2. Pokud $f(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)})$, potom
$$\boldsymbol{T(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)} \log(n))}.$$
3. Pokud $f(n) \in \Omega(n^{\log_b(a)+\varepsilon})$ pro nějakou konstantu $\varepsilon > 0$ a pokud $a\,f(n/b) \leq c\,f(n)$ pro nějakou konstantu $c < 1$ a všechna dostatečně velké n, potom
$$\boldsymbol{T(n) \in \Theta(f(n))}.$$

Použití „kuchařky“ – příklad 1

- Příklad 1 (Strassenův algoritmus):

  $T(n) = 7 \cdot T(n/2) + \Theta(n^2)$

- Z toho dostáváme, že $a = 7$, $b = 2$, $f(n) \in O(n^{\log_2(7)-0.5})$. Jedná se tedy o případ číslo 1.

- Dostáváme složitost:

  $T(n) \in \Theta(n^{\log_2(7)}) \subseteq \boldsymbol{\Theta(n^{2.8074})}$

Použití „kuchařky“ – příklad 2

- Příklad 2 (Nákup a prodej akcií):

  $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + \Theta(n)$

- Z toho dostáváme, že $a = 2$, $b = 2$,

  $f(n) \in \Theta(n) = \Theta(n^{\log_2(2)})$.

  Jedná se tedy o případ číslo 2.

- Dostáváme složitost:

  $T(n) \in \boldsymbol{\Theta(n \cdot \log(n))}$

Použití „kuchařky“ – příklad 3

- Příklad 3 (fiktivní):

  $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n \log(n)$

- Z toho dostáváme, že $a = 3$, $b = 4$,

  $f(n) = n \log(n)$ a víme, že $n^{\log_4(3)} = O(n^{0.793})$.

  Platí tedy, že $f(n) \in \Omega(n^{\log_4(3)+0.2})$.

  Pokud by se mělo jednat o případ 3 musí ještě platit pro $c < 1$ a všechna dostatečně velká n, že $a\, f(n/b) \leq c\, f(n)$ tedy $a\, f(n/b) = 3(n/4)\log(n/4) \leq (3/4)n \log(n) = c\, f(n)$ pro $c = ¾$.

- Dostáváme složitost:

  $T(n) \in \boldsymbol{\Theta(n \log(n))}$

slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

Domácí úloha (ohrada sektorů s hnízdišti)

1	2	2	1	2	1	2	2	4	3	2
1	2	4	2	3		1	3	4	9	1
3	1	2	3	2		2	2	3	9	
3	4	2	2	2	1	3	1	2	2	
4				3	4	4	3	2	4	
2				1	3	3			2	2
2	1	2	4	9	3	1			2	2
4	4	2	1	1	1	4	2	2	3	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

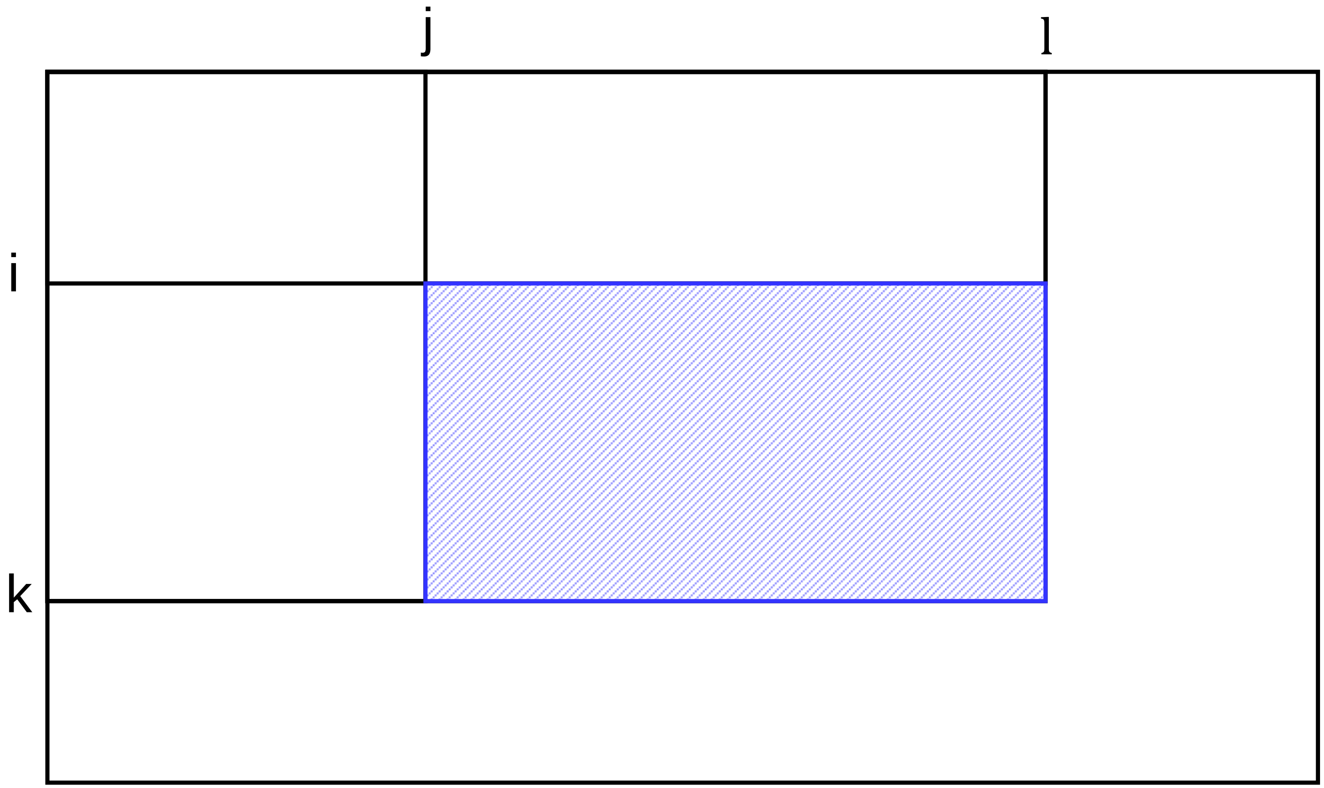
hnízdiště

sektor

stupeň ohrožení

Na vstupu je čtvercová mříž R x S.
Hledáme ohradu obsahující polovinu sektorů s maximálním sumárním stupněm ohrožení po jejím obvodu.

2D prefixové součty



Výpočet součtu v modrém obdélníku: P[k,l] – P[i,l] – P[k,j] + P[i,j]

Viz programátorská kuchařka:
https://ksp.mff.cuni.cz/kucharky/zakladni-algoritmy/

slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.