

Afinní podprostory, ortogonalita: úvod

Petr Olšák
petr@olsak.net

<http://petr.olsak.net/>

Afinní kombinace a odvozené pojmy

- **Afinní kombinace** je lineární kombinace prvků z \mathbb{R}^n , jejíž koeficienty mají součet 1, tedy:

$$\text{AK}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k) = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k, \quad \text{kde } \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$$

- V kontextu afinních kombinací je užitečné si při geometrické interpretaci prvky z \mathbb{R}^n (vektory) představovat jako body v prostoru, ne jako orientované úsečky. AK totiž nezávisí na poloze počátku.
- **Afinní obal** zadaných bodů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ je množina všech afinních kombinací těchto bodů.
- **Afinní podprostor** je podmnožina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ uzavřená na afinní kombinace. Tedy je-li $\mathbf{x}_i \in M$, pak také všechny $\text{AK}(\mathbf{x}_i) \in M$.
- **Afinní zobrazení** je zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zachovávající afinní kombinace, tedy pro $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ platí

$$\mathbf{f}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k) = \alpha_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) + \dots + \alpha_k \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

- Analogie: lineární kombinace, lineární obal, podprostor, zobrazení.

Afinní kombinace a podprostory: vlastnosti

- Afinní kombinace afinních kombinací je afinní kombinace.
- Afinní obal je afinní podprostor. Každý afinní podprostor lze zapsat jako afinní obal nějakých bodů.
- Je-li $M \subseteq \mathbb{R}^n$ množina řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pak M je prázdná nebo M je afinní podprostor (uzavřený na AK).
- Je-li $M \subseteq \mathbb{R}^n$ afinní podprostor (uzavřený na AK), pak existuje $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a lineární podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tak, že

$$M = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}; \mathbf{x} \in X\} = \mathbf{x}_0 + X. \quad (1)$$

- Splňuje-li $M \subseteq \mathbb{R}^n$ rovnost (1), pak existuje matice \mathbf{A} a vektor \mathbf{b} tak, že soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má množinu řešení rovnu M .
- **Závěr:** Tři vlastnosti množiny M uvedené výše jsou ekvivalentní.
- Afinní podprostor je z geometrického pohledu lineární podprostor plus posun.
- **Dimenze** afinního prostoru se definuje jako dimenze příslušného posunutého lineárního podprostoru.

Afinní zobrazení: vlastnosti

- Zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definované vztahem $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je afinní (tj. AK vzorů je vždy rovna AK obrazů se stejnými koeficienty).
- Je-li $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ afinní zobrazení (AK vzorů je vždy rovna AK obrazů se stejnými koeficienty), pak existuje $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineární a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ tak, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- Splňuje-li zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vzorec $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pro nějaké lineární zobrazení \mathbf{g} a vektor \mathbf{b} , pak existuje jednoznačně matice \mathbf{A} tak, že platí $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$.
- **Závěr:** Tři vlastnosti zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uvedené výše jsou ekvivalentní.
- Afinní zobrazení je z geometrického pohledu lineární zobrazení plus konstantní posun, například rotace a posun, zkosení a posun atd.
- Hodnota posunu je rovna $\mathbf{f}(\mathbf{0})$.
- Afinní zobrazení zobrazuje afinní podprostory na afinní podporostory.

Příklad

Zkusíme si geometricky znázornit, jak „pracuje“ zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované předpisem:

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Různá vyjádření afinních prostorů

Od rovnicového popisu k parametrickému

- Vyjádříme afinní podprostor $A = \{\mathbf{x}; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$ parametricky, tedy jako $A = \mathbf{x}_0 + \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\}$.

Různá vyjádření afinních prostorů

Od rovnicového popisu k parametrickému

- Vyjádříme afinní podprostor $A = \{\mathbf{x}; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$ parametricky, tedy jako $A = \mathbf{x}_0 + \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\}$.

Řešení: najdeme bázi $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ řešení přidružené homogenní soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ a jedno partikulární řešení \mathbf{x}_0 .

Různá vyjádření afinních prostorů

Od rovnicového popisu k parametrickému

- Vyjádříme afinní podprostor $A = \{\mathbf{x}; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$ parametricky, tedy jako $A = \mathbf{x}_0 + \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\}$.

Řešení: najdeme bázi $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ řešení přidružené homogenní soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ a jedno partikulární řešení \mathbf{x}_0 .

Od parametrického popisu k rovnicovému

- Pro afinní prostor zadaný parametricky $A = \mathbf{x}_0 + \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\}$ najdeme matici \mathbf{A} a vektor \mathbf{b} tak, že $A = \{\mathbf{x}; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$.

Různá vyjádření afinních prostorů

Od rovnicového popisu k parametrickému

- Vyjádříme afinní podprostor $A = \{\mathbf{x}; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$ parametricky, tedy jako $A = \mathbf{x}_0 + \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\}$.

Řešení: najdeme bázi $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ řešení přidružené homogenní soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ a jedno partikulární řešení \mathbf{x}_0 .

Od parametrického popisu k rovnicovému

- Pro afinní prostor zadaný parametricky $A = \mathbf{x}_0 + \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\}$ najdeme matici \mathbf{A} a vektor \mathbf{b} tak, že $A = \{\mathbf{x}; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$.

Řešení: zapíšeme vektory \mathbf{b}_i do řádků matice \mathbf{B} a najdeme bázi prostoru řešení soustavy $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$. Tyto bázevé vektory zapíšeme do řádků matice \mathbf{A} . Pak je $\text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\} = \{\mathbf{x}; \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}$. Dále volíme $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}_0$.

Skalární součin: úhly, velikosti

- Skalární součin $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ umožňuje měřit vzdálenosti a úhly:

$$\text{Euklidovská norma: } \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$$

$$\text{Euklidovská metrika (vzdálenost): } d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

$$\text{Úhel: } \cos \varphi = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

$$\text{Pravý úhel: } \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0 \quad (\text{pro } \mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0})$$

- Skalární součin geometricky: číslo $\|\mathbf{x}\| \cos \varphi$ je orientovaná velikost průmětu vektoru \mathbf{x} na přímku generovanou vektorem \mathbf{y} . Vynásobíme-li toto číslo velikostí $\|\mathbf{y}\|$, máme skalární součin:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \varphi.$$

- Zakreslíme-li vektory korespondující s $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ jako šipky na sebe kolmé a s jednotkovou velikostí, pak výše uvedené pojmy (úhel, velikost vektoru, vzdálenost) zavedené v \mathbb{R}^n „numericky“ mají přesně odpovídající geometrický význam.

Připomenutí

- Schwartzova nerovnost: $|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, takže úhel je definován pro každé dva nenulové vektory. Rovnost nastává jen pro LZ vektory.
- Trojúhelníková nerovnost: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.
- Příklad odvození Pythagorovy věty (předpokládáme $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$):

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Terminologie, základní vlastnosti

- Vektory jsou **ortogonální** (píšeme $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$), když $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$.
- Vektory jsou **ortonormální**, jsou-li ortogonální a mají jednotkovou velikost.
- Matice je s **ortonormálními sloupci**, jsou-li každé dva různé sloupce této matice ortonormální.
- Matice je **ortogonální**, je-li čtvercová a s ortonormálními sloupci.
- **Tvrzení:** Skupina nenulových vektorů, kde je každý s každým ortogonální, je lineárně nezávislá.
- **Důsledek:** Matice s ortonormálními sloupci je úzká nebo čtvercová a vždy s plnou hodností. Ortogonální matice je regulární.
- **Tvrzení:** Nechť \mathbf{U} je s ortonormálními sloupci, $\mathbf{x} \in \text{rng } \mathbf{U}$. Tedy sloupce \mathbf{U} (označíme je $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$) tvoří ortonormální bázi podprostoru $\text{rng } \mathbf{U}$. Pak souřadnice vektoru \mathbf{x} vzhledem k této bázi jsou $\mathbf{u}_i^T \mathbf{x}$, tedy

$$\mathbf{x} = (\mathbf{u}_1^T \mathbf{x}) \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2^T \mathbf{x}) \mathbf{u}_2 + \dots + (\mathbf{u}_k^T \mathbf{x}) \mathbf{u}_k.$$

- **Tvrzení:** Matice \mathbf{U} je s ortonormálními sloupci, právě když $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$.

Vlastnosti ortogonální matice

- Následující vlastnosti jsou ekvivalentní.
 - \mathbf{U} je ortogonální matice.
 - $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$
 - \mathbf{U}^T je ortogonální matice.

Vidíme tedy, že jakmile je matice ortogonální, má ortonormální nejen sloupce, ale i řádky.

- **Tvrzení:** Součin ortogonálních matic je ortogonální matice.

Příklady ortogonálních matic

- Rotační matice v \mathbb{R}^2 .
- Matice \mathbf{P} obsahuje ve sloupcích báze vektory \mathbf{e}_j v libovolném pořadí: permutační matice. Pak vektor $\mathbf{P}\mathbf{x}$ má stejné složky jako vektor \mathbf{x} , jen v permutovaném pořadí.
- Householderova matice je definována pro libovolný vektor \mathbf{u} jednotkové velikosti takto: $\mathbf{H}_{\mathbf{u}} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$. Je ortogonální.

Lineární isometrie

Nechť \mathbf{U} je matice s ortonormálními sloupci. Definujme lineární zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ předpisem $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x}$. Pak platí:

- \mathbf{f} zachovává skalární součin, přesněji: $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{y})$.
- \mathbf{f} zachovává velikosti vektorů (velikost vzoru je rovna velikosti obrazu).
- \mathbf{f} zachovává úhly (úhel mezi vzory je stejný jako mezi jejich obrazy).

Takové zobrazení \mathbf{f} se nazývá **isometrie**.

Isometrie do stejného prostoru

- Je-li $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (tj. je to transformace) a je to isometrie, pak z geometrického pohledu je zřejmé, že \mathbf{f} může být pouze rotace nebo rotace složená se zrcadlením.
- Nechť \mathbf{U} je ortogonální matice, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x}$. Pak $\det \mathbf{U} = \pm 1$. Podle znaménka determinantu poznáme, zda součástí této transformace je zrcadlení.

Ortogonalita lineárních podprostorů

- Podprostory X a Y jsou na sebe **ortogonální** (píšeme $X \perp Y$), když každý vektor $\mathbf{x} \in X$ je kolmý na každý vektor $\mathbf{y} \in Y$, tedy pro ně platí $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$.
- Díky linearitě skalárního součinu stačí ověřit, že všechny báze vektory z X jsou kolmé na všechny báze vektory z Y .
- Pro $X \perp Y$ zřejmě platí $X \cap Y = \{\mathbf{0}\}$.
- Jestliže $X \perp Y$ a navíc X a Y generují celý prostor (jsou **komplementární**), pak říkáme, že X je **ortogonálním doplňkem** Y nebo též Y je ortogonálním doplňkem X a značíme $X = Y^\perp$ nebo $Y = X^\perp$.
- Je-li dáno X svou bází, jak najdeme bázi X^\perp ?
- Je-li dáno X jako množina řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, tedy $X = \{\mathbf{x}; \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}$. Jak najdeme bázi X^\perp ?
- Povšimneme si, že $(\text{rng } \mathbf{A})^\perp = \text{Null } \mathbf{A}^T$ a $(\text{Null } \mathbf{A})^\perp = \text{rng } \mathbf{A}^T$.
- Důsledek: Soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nemá řešení, právě když existuje řešení soustavy $\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$, pro které neplatí $\mathbf{y} \perp \mathbf{b}$.