Matice, vektorové prostory

Petr Olšák

petr@olsak.net

http://petr.olsak.net/

Matice, součet a součin matic

Definice:
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, pak definujeme součet $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ po prvcích: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ a násobek skalárem $\mathbf{C} = \alpha\,\mathbf{A}$ rovněž po prvcích: $c_{ij} = \alpha\, a_{ij}$.
Je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times p}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, pak definujeme součin $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ po prvcích: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Blokový pohled na násobení matic:
Jsou-li matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ rozděleny do bloků takto:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{m1} & \dots & \mathbf{A}_{mp} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \dots & \mathbf{B}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{B}_{p1} & \dots & \mathbf{B}_{pn} \end{bmatrix},$$

pak je

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sum \mathbf{A}_{1k}\mathbf{B}_{k1} & \dots & \sum \mathbf{A}_{1k}\mathbf{B}_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum \mathbf{A}_{mk}\mathbf{B}_{k1} & \dots & \sum \mathbf{A}_{pk}\mathbf{B}_{kn} \end{bmatrix}.$$

Rozmyslíme si, jak velké musejí být bloky, aby toto násobení bylo definováno.

Vektorový prostor, vektory, značení

- V optimalizaci si vystačíme s vektorovým (lineárním) prostorem $\mathbb{R}^n$.
- Sčítání vektorů po složkách, násobení skalárem každou složku.
- Geometrická interpretace vektorů jako orientovaných úseček či bodů je často velmi užitečná.
- Vektory píšeme tučně: $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ a tím je odlišíme od skalárů z $\mathbb{R}$.
- Vektor v kontextu maticového násobení vždy považujeme za jednosloupcovou matici.
- Máme tedy lineární prostor matic $\mathbb{R}^{n,1}$ který ztotožníme s $\mathbb{R}^n$.
- Standardní bázi v $\mathbb{R}^n$ označujeme $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.
- Jedničkový vektor (sloupec jedniček) značíme $\mathbf{1}$.
- Řádkový vektor píšeme pomocí transpozice: $\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T$.
- Chceme-li vypsat složky vektoru, píšeme je oddělené čárkou v kulatých závorkách do řádků (ušetříme místo) nebo v hranatých závorkách do sloupců.
- Budeme potřebovat výhradně standardní skalární součin.
- Skalární součin vektorů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ zapisujeme jako maticové násobení $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$.

Důsledky blokového násobení matic

Součin $\mathbf{A}\mathbf{x}$ po sloupcích

- $\mathbf{A}\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1 \ \ldots \ \mathbf{a}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{a}_1[x_1] + \cdots + \mathbf{a}_n[x_n] = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$
- $\mathbf{A}\mathbf{x}$ je tedy LK sloupců $\mathbf{A}$ s koeficienty x_i (velmi důležité!).
- Je tedy $\operatorname{rng}\mathbf{A} = \{\mathbf{A}\mathbf{x};\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$.

Součin $\mathbf{A}\mathbf{x}$ po řádcích

- Nyní značím $\mathbf{a}_i^T$ řádky matice $\mathbf{A}$:
  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T\mathbf{x} \end{bmatrix}$
- Takže v jednotlivých složkách vektoru $\mathbf{A}\mathbf{x}$ jsou skalární součiny řádků matice $\mathbf{A}$ s vektorem $\mathbf{x}$.

Různé pohledy na soustavu lin. rovnic

Homogení soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

- Označme $\mathbf{a}_i^T$ řádky $\mathbf{A}$. Pro řešení $\mathbf{x}$ platí $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = 0$, tedy $\mathbf{x}$ je kolmý na všechny řádky matice $\mathbf{A}$. Prostor všech řešení značíme $\operatorname{Null}\mathbf{A}$ a je tedy kolmý na řádkový prostor matice $\mathbf{A}$ a tvoří ortogonální doplněk.
- Řešíme-li tuto soustavu, hledáme bázi prostoru kolmého na řádkový prostor matice $\mathbf{A}$. Proto platí věta:

$$\dim\operatorname{Null}\mathbf{A} + \dim\operatorname{rng}\mathbf{A}^T = n, \quad \text{kde } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Nehomogenní soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

- Označme $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \ldots \ \mathbf{a}_n]$. Aby měla soustava řešení, musí $\mathbf{b} \in \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_i\}$, to je ekvivalentní s $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}[\mathbf{A}\ \mathbf{b}]$ (Frobeniova věta).
  Připomínám: $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \dim\operatorname{rng}\mathbf{A} = \dim\operatorname{rng}\mathbf{A}^T$.
- Má-li $\mathbf{A}$ LN řádky, pak dle Frobeniovy věty má řešení pro každé $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ (protože $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}[\mathbf{A}\ \mathbf{b}] = m$).
- Má-li $\mathbf{A}$ LN sloupce (tvoří bázi $\operatorname{rng}\mathbf{A}$), pak hledáme souřadnice vektoru $\mathbf{b}$ v této bázi. Takové řešení je jediné.
- Vektor $\mathbf{x}$ leží v průniku nadrovin $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i$.

Příklad

Máme dány tyto rovnice:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i + y \quad \text{pro všechna } i \in \{1, \ldots, m\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = z,$$

kde x_j, y a z jsou proměnné, a_{ij}, b_i jsou zadané konstanty (parametry), $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Sestavíme soustavu lineárních rovnic $\mathbf{P}\,\mathbf{u} = \mathbf{q}$. Tj. najdeme matici $\mathbf{P}$, vektor konstant $\mathbf{q}$ a vektor neznámých $\mathbf{u}$ tak, že soustava $\mathbf{P}\,\mathbf{u} = \mathbf{q}$ je ekvivalentní s výše uvedenými dílčími rovnicemi.

Příklad

Máme dány tyto rovnice:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i + y \quad \text{pro všechna } i \in \{1, \ldots, m\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = z,$$

kde x_j, y a z jsou proměnné, a_{ij}, b_i jsou zadané konstanty (parametry), $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Sestavíme soustavu lineárních rovnic $\mathbf{P}\,\mathbf{u} = \mathbf{q}$. Tj. najdeme matici $\mathbf{P}$, vektor konstant $\mathbf{q}$ a vektor neznámých $\mathbf{u}$ tak, že soustava $\mathbf{P}\,\mathbf{u} = \mathbf{q}$ je ekvivalentní s výše uvedenými dílčími rovnicemi.

Řešení: $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{b} = [b_i]$,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^T & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Připomenutí vlastností operací s maticemi

- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (komutativita sčítání), $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (asociativita), $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \alpha(\mathbf{AB})$ (násobek).
- $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (transpozice součinu).
- Násobení není obecně komutativní ani pro čtvercové matice.

Pravá, levá inverze

- Jednotkovou matici značíme $\mathbf{I}$.
- Existuje-li k dané matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, tak, že $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, pak $\mathbf{B}$ nazýváme pravou inverzí k matici $\mathbf{A}$.
- Analogicky definujeme levou inverzi.
- $\mathbf{A}$ má pravou inverzi, právě když má plnou hodnost a je široká nebo čtvercová (sloupce $\mathbf{B}$ jsou řešeními nehomogeních soustav). Analogicky, $\mathbf{A}$ má levou inverzi, právě když má plnou hodnost a je úzká nebo čtvercová.
- Má-li $\mathbf{A}$ plnou hodnost a je čtvercová, pak je regulární a pravá inverze se rovná levé a je jediná.

Stopa

- Součet diagonálních prvků čtvercové matice je stopa matice (trace).
- Platí pochopitelně: $\operatorname{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \operatorname{tr}\mathbf{A} + \operatorname{tr}\mathbf{B}$, $\operatorname{tr}(\alpha\mathbf{A}) = \alpha \operatorname{tr}\mathbf{A}$, $\operatorname{tr}(\mathbf{A}^T) = \operatorname{tr}\mathbf{A}$.
- Platí méně pochopitelně: $\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$ (cykličnost stopy).
- Z předchozího plyne, že $\operatorname{tr}(\mathbf{ABC}) = \operatorname{tr}(\mathbf{CAB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BCA})$, ale není to rovno $\operatorname{tr}(\mathbf{BAC})$ ani pro čtvercové matice.

Připomenutí determinantu

- $\det\mathbf{A} = \sum_\pi \operatorname{sgn}\pi \, a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}$.
- Měří (až na znaménko) velikost objemu rovnoběžnostěnu vymezeného sloupci $\mathbf{A}$ (řádky $\mathbf{A}$).
- $\det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}^T$.
- $\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^n \det\mathbf{A}$, $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$, $\det\mathbf{I} = 1$, $\det\mathbf{A}^{-1} = 1/\det\mathbf{A}$.
- $\det\mathbf{A} \neq 0$ právě když $\mathbf{A}$ je regulární.
- Je lineární při lineární změně v jediném sloupci/řádku.

Lineární zobrazení

- Zachovává koeficienty lin. kombinace vzorů v obrazech, přesněji: $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineání, když $\mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) = \alpha_1\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$.
- Je jednoznačně reprezentovatelné maticí $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tak, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.
- Je jednoznačně určeno svými hodnotami na bázi.
- Pochopitelně: $\operatorname{Ker}\mathbf{f} = \operatorname{Null}\mathbf{A}$, $\operatorname{Rng}\mathbf{f} = \operatorname{rng}\mathbf{A}$.
- Pravda o maticích z pohledu lineárního zobrazení zní: $\dim\operatorname{Ker}\mathbf{f} + \dim\operatorname{Rng}\mathbf{f} = n$.
- Je-li $\mathbf{f}$ reprezentováno maticí $\mathbf{A}$ a $\mathbf{g}$ reprezentováno maticí $\mathbf{B}$ a prostory vzorů a obrazů $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ jsou voleny tak, že lze setrojit složené zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$, pak toto složené zobrazení je reprezentováno maticí $\mathbf{AB}$.
- Je-li lineární $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, nazýváme ho také lineární transformace, protože si lze činnost zobrazení představit geometricky: „předměty“ v $\mathbb{R}^n$ se aplikací toho zobrazení transformují na „deformované předměty“ ve stejném prostoru $\mathbb{R}^n$ (rotace, zkosení, zrcadlení, ...).

Další vlastnosti matic

Věta:
Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jsou tvrzení pod sebou ekvivalentní.

- $\mathbf{A}$ má LN řádky
- $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \mathbb{R}^m$
- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$
- $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení $\forall\, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- $\mathbf{A}$ má pravou inverzi
- $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ je reguární

- $\mathbf{A}$ má LN sloupce
- $\operatorname{Null} \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$
- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$
- $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ má pouze triviální řešení
- $\mathbf{A}$ má levou inverzi
- $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je regulární

Věta:
$\operatorname{rank} \mathbf{AB} \le \min\{\operatorname{rank} \mathbf{A}, \operatorname{rank} \mathbf{B}\}$