Řešení některých cvičení ze skript Optimalizace (B0B33OPT)

Petr Olšák

23. 9. 2024

Základ tohoto textu vznikl v letech 2020 a 2021, kdy studenti nemohli chodit do školy a museli studovat samostatně, případně se „scházeli“ jen ve virtuálním počítačovém prostředí. Pro studenty jsem tehdy připravil podrobná řešení všech cvičení, která bylo potřeba projít na tehdy vzdáleně realizovaných „cvičeních“.

Plánuji řešení doplňovat o další, aby byla nakonec sbírka úplná a korespondovala zcela s cvičeními ve skriptech doc. Wernera. Zatím mám řešení úplně všech cvičení až do kapitoly deváté. Od desáté kapitoly následují jen řešení k vybraným cvičením, se kterými nejčastěji pracujeme.

Sbírka neobsahuje zadání cvičení ze skript doc. Wernera, ale jen řešení odkazované do skript číslem cvičení. Čísla cvičení jsou prolinkována do skript (modrá barva funguje jako hyperlink).

Značení v této sbírce se může mírně odchylovat od skript. Např. definice množin pomocí vlastností prvků se zde píše se středníkem ale ve skriptech se svislítkem. Tedy např. kružnice je zde $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1\}$ zatímco ve skriptech $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$. Bod/vektor (prvek $\mathbb{R}^n$) se zde někdy značí v hranatých závorkách jako matice, např. $[1,2]$ a někdy v kulatých $(1,2)$. Uzavřený interval se zde značí $\langle a,b\rangle$ zatímco ve skriptech $[a,b]$. Tyto rozdíly snad nepovedou ke zmatení, neboť vše bude jasné z kontextu.

Najdete-li v textu chybu, prosím, neváhejte mě informovat, pokusím se to napravit.

Kapitola 1

1.1 a) V řešení této úlohy ve skriptech je popsán geometrický přístup (obrázek a úvaha). Zde si ukážeme metodu eliminace proměnné a převedení úlohy na hledání minima funkce jedné proměnné. Úloha má dvě proměnné a je zřejmé, že řešení nebude uvnitř množiny přípustných řešení, ale na její hranici $xy = 1$, tedy $y = 1/x$. Nahradíme-li v účelové funkci proměnnou y výrazem $1/x$, dostaneme účelovou funkci v jedné proměnné: $f = x^2 + \frac{1}{x^2}$, pro kterou hledáme minimum na intervalu $(0, \infty)$. Funkce je na tomto intervalu spojitá a má spojitou derivaci, takže její minimum může být jen ve stacionárních bodech $f' = 0$, tedy $2x - \frac{2}{x^3} = 0$, tedy $x^4 = 1$, tedy $x = 1$. Vyloučili jsme $x = -1$, protože tento bod neleží v $(0, \infty)$. Souřadnici y dopočítáme ze vztahu $y = 1/x$ a máme tedy argument minima v bodě $[1, 1]$. Hodnota minima je $f = 2$. Že to je minimum a ne maximum by se dalo vyšetřit z průběhu funkce f v jedné proměnné x: na daném intervalu má f jediný stacionární bod a má jednostranné limity v obou krajních bodech $+\infty$.

b,c,d) Má řešení ve skriptech.

e) Při obvyklém značení r pro poloměr podstavy válce a v pro jeho výšku vyjádříme jeho objem $V = \pi r^2 v = 1$ a jeho povrch $S = 2\pi rv + 2\pi r^2$. Optimalizační úloha tedy zní:

$$\min\{2\pi rv + 2\pi r^2;\ \pi r^2 v = 1, r > 0, v > 0\}$$

Z první podmínky popisující množinu přípustných řešení snadno eliminujeme proměnnou $v = \frac{1}{\pi r^2}$ a účelovou funkci máme pak jen v proměnné r, tedy $f = 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$. Vyšetříme ji na intervalu $(0, \infty)$. Uvnitř má jediný stacionární bod $f' = 0$, tedy $-\frac{2}{r^2} + 4\pi r = 0$, tedy $r^3 = \frac{1}{2\pi}$, tedy $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$. Tento stacionární bod tedy musí být minimem, protože f je spojitá se spojitou derivací a v krajních bodech intervalu $(0, \infty)$ má limity ∞. Dále je $v = \frac{1}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ a argument minima máme v bodě $[r, v] = \left[\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}, \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\right]$. Tím jsou rozměry válce s minimálním povrchem určeny.

f) Úlohu formálně zjednodušíme a počítáme $\min\{2\pi rv + \pi r^2;\ \pi r^2 v = 1/2, r > 0, v > 0\}$. Postupujme stejně, jako v úloze e). Vychází stejné r a dále zde vychází $v = r$.

g) Intuitivně je to čtverec, ale udělejme to pořádně. Strany obdélníka označme a, b, jeho úhlopříčka musí mít délku 2, takže dle Pythagorovy věty je $a^2 + b^2 = 4$. Hledáme maximum součinu ab, takže optimalizační úloha zní: $\max\{ab;\ a^2 + b^2 = 4,\ 0 < a < 2,\ 0 < b < 2\}$. Z podmínky eliminujeme proměnnou a: $a^2 = 4 - b^2$, tedy $a = \sqrt{4 - b^2}$. Účelová funkce má po eliminaci jen jednu proměnnou $f = \sqrt{4 - b^2}\, b$. Vyšetříme ji na intervalu $(0, 2)$. Funkce je spojitá, má všude spojitou derivaci, v krajních bodech má limity 0, je všude kladná a má jediný stacionární bod, který tedy musí být maximem. Stacionární bod zjistíme z $f' = 0$, tedy $\frac{-2b}{\sqrt{4-b^2}} + \sqrt{4 - b} = 0$, tedy $-b^2 + 4 - b^2 = 0$, tedy $b^2 = 2$, tedy $b = \sqrt{2}$. Dopočítáme $a = \sqrt{4 - b^2} = \sqrt{2}$. Argument maxima je $[a, b] = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, takže to je opravdu čtverec. Intuice tentokrát nezklamala.

h,i) Řešení je ve skriptech.

j) Označme strany obdélníka a, b. Plocha je $ab = 1$ a cena plotu (účelová nebo také cenová funkce) je $1000\,(a + 2b) + 500\,a$. Protože se neptáme na cenu (hodnotu účelové funkce), ale na argument minima, můžeme funkci vydělit například tisícem a máme optimalizační úlohu ve tvaru $\min\{\frac{3}{2}a + 2b;\ ab = 1\}$. Eliminujeme $b = 1/a$ a účelová funkce má jen proměnnou a: $f = \frac{3}{2}a + 2/a$ a vyšetřujeme ji na intervalu $(0, \infty)$. Je spojitá, má spojitou derivaci a limity v krajních bodech intervalu má ∞, takže má-li jediný stacionární bod, bude to minimum. Stacionární bod najdeme pomocí $f' = 0$, tedy $\frac{3}{2} + \frac{-2}{a^2} = 0$, tedy $a^2 = \frac{4}{3}$, tedy $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Po dosazení máme $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a argument minima je $[a, b] = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. Zamyslíme se, v jakých jednotkách máme rozměry uvedené ve výsledku. V popisu množiny přípustných řešení jsme psali $ab = 1$, tedy jeden *hektar*. Jedna strana hektarového čtverce má 100 metrů. Naše jednotka je tedy 100 metrů, konkrétně strana a obdélníka má rozměr $\frac{200}{\sqrt{3}}$ metrů a strana b je velká $50\sqrt{3}$ metrů.

k,l) Má řešení ve skriptech.

m) Nakreslete si kružnici se středem O a poloměrem 1. Na ní na protilehlých stranách na kružnici vyznačte dva body A (start) a C (cíl). Mezi nimi kdekoli na kružnici nakreslete bod B. Potkan poplave nejkratší spojnicí úsečkou AB a dále poběží po kružnici mezi BC. Úhel AOB označíme α. Cesta potkana je dána polohou bodu B, neboli úhlem α. Délka první části cesty AB je $2\sin(\alpha/2)$. Zjistíte to tak, že rozdělíte úhel α jeho osou na dva a máte dva pravoúhlé trojúhelníky, úhel $\alpha/2$ je proti polovině úsečky AB v pravoúhlém trojúhelníku o přeponě délky 1. Dále délka běžecké části dráhy potkana je rovna délce oblouku na kružnici o poloměru 1 mezi body B a C a je tedy rovna $\pi - \alpha$. Označíme-li t čas a d délku dráhy, pak víme, že $t = d/v$, takže čas od startu k cíli je $t = \frac{1}{v_1} 2\sin(\alpha/2) + \frac{1}{v_2}(\pi - \alpha)$. Je to funkce jediné proměnné α s parametry v_1 a v_2 a máme ji minimalizovat na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, neboli hledáme $\min\{t(\alpha);\ 0 \leq \alpha \leq \pi\}$. Funkce je spojitá se spojitou derivací. Najdeme její stacionární bod z $t' = 0$, tedy $\frac{1}{v_1}\cos(\alpha/2) + \frac{-1}{v_2} = 0$, tedy $\cos(\alpha/2) = \frac{v_1}{v_2}$, tedy $\alpha = 2\arccos\frac{v_1}{v_2}$.

Kdybychom potkanovi poradili, že má nakreslit úhel $2\arccos\frac{v_1}{v_2}$ a tím najít bod B a pak bude vědět, jak má plavat a jak běžet, moc by nám nepoděkoval, naopak, začal by na nás nebezpečně prskat. Našli jsme totiž maximum účelové funkce t, nikoli její minimum, jak je zřejmé z druhé derivace funkce t. Funkce je na definičním intervalu konkávní. Je to takový malý chytáček.

Minimum konkávní účelové funkce t je tedy v jednom z jejích krajních bodů intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. V nule má funkce t hodnotu $\frac{\pi}{v_2}$ a v bodě π má hodnotu $\frac{2}{v_1}$. Globální minimum je v tam, kde je odpovídající hodnota menší. Potkanovi tedy poradíme takto: umí-li přeplavat jezero rychleji než jej oběhne, tak ať plave napříč a vůbec neběží. V opačném případě ať běží a vůbec neplave.

n) Je řešeno ve skriptech.

1.2 $z \in \operatorname{argmin}_X f(x) \Leftrightarrow f(z) \leq f(x)\ \forall x \in X \Leftrightarrow g(f(z)) \leq g(f(x))\ \forall x \in X \Leftrightarrow z \in \operatorname{argmin}_X g(f(x))$.

1.3 $\operatorname{argmin}_Y f(x) = Y \cap \operatorname{argmin}_X f(x)$ právě když hodnoty v argumentech minima na Y nejsou větší než hodnoty v argumentech minima na celé X, ale mohou být stejné. To platí právě když $f(z) \geq \min_Y f(x)$ pro všechna $z \in X \setminus Y$.

Kapitola 2

2.1 To je jednoduché opakování, jak můžeme upravovat maticové výrazy:

a) $\mathbf{AX}+\mathbf{B}=\mathbf{A}^2\mathbf{X}, \quad \mathbf{AX}-\mathbf{A}^2\mathbf{X}=-\mathbf{B}, \quad (\mathbf{A}-\mathbf{A}^2)\,\mathbf{X}=-\mathbf{B}, \quad \mathbf{X}=-(\mathbf{A}-\mathbf{A}^2)^{-1}\,\mathbf{B}$
Za zmínku stojí snad jen to, že zde šlo vytknout $\mathbf{X}$ *doprava* z obou sčítanců a tedy v posledním kroku šlo násobit inverzní maticí *zleva*. Násobení matic není komutativní. Taky lze konstantou -1 roznásobit inverzní matici, protože $-1^{-1}=-1$ a psát $\mathbf{X}=(\mathbf{A}^2-\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}$.

b) $\mathbf{X}-\mathbf{A}=\mathbf{XB}, \quad \mathbf{XI}-\mathbf{XB}=\mathbf{A}, \quad \mathbf{X}\,(\mathbf{I}-\mathbf{B})=\mathbf{A}, \quad \mathbf{X}=\mathbf{A}\,(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}$

c) $2\mathbf{X}-\mathbf{AX}+2\mathbf{A}=\mathbf{O}, \quad 2\mathbf{IX}-\mathbf{AX}=-2\mathbf{A}, \quad (2\mathbf{I}-\mathbf{A})\,\mathbf{X}=-2\mathbf{A}, \quad \mathbf{X}=-2\,(2\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}$
Jednotkovou čtvercovou matici značíme $\mathbf{I}$, dále v zadání c) je nulová matice značena $\mathbf{O}$. Konečně v posledním kroku úlohy c) je konstanta (-2) vytknutá zcela dopředu, jak bývá zvykem. Můžeme též krátit: $\mathbf{X}=-2\,(2\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}=-2\,(2(\mathbf{I}-\frac{1}{2}\mathbf{A}))^{-1}\,\mathbf{A}=-2\cdot 2^{-1}(\mathbf{I}-\frac{1}{2}\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}=(\frac{1}{2}\mathbf{A}-\mathbf{I})^{-1}\,\mathbf{A}$.

2.2 Jedninou sosutavu lze zapsat blokově $[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots\ \mathbf{b}_k]=\mathbf{X}\,[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_k]$, tedy $\mathbf{X}\,\mathbf{A}=\mathbf{B}$ při značení $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_k]$, $\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots\ \mathbf{b}_k]$. Je-li $\mathbf{A}$ čvercová a regulární, máme jediné řešení $\mathbf{X}=\mathbf{B}\,\mathbf{A}^{-1}$.

2.3 Nejprve si uvědomíme vektor proměnných: $\mathbf{u}^T=[\mathbf{x}^T\ \mathbf{y}^T\ \alpha]\in\mathbb{R}^{m+n+1}$. Dále je třeba převést součiny s proměnnými na levou stranu rovností a konstanty na pravou:

$$\begin{array}{rrrl} \mathbf{x}^T & \mathbf{y}^T & \alpha & \\ \mathbf{Ax}+ & \mathbf{B}^T\mathbf{y}- & \alpha\mathbf{1} & =\mathbf{0} \\ & \mathbf{Ay} & & =-\mathbf{c} \end{array}$$

Nad soustavu jsem modře vyznačil řádek s proměnnými. Proměnné v tomto řádku musejí korespondovat s jednotlivými sloupci matice $\mathbf{P}$, takže

$$\mathbf{Pu}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}^T & -\mathbf{1}\\ \mathbf{O} & \mathbf{A} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\\ \alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ -\mathbf{c}\end{bmatrix}$$

Zde je $\mathbf{O}$ nulová matice, $\mathbf{0}$ nulový vektor, $\mathbf{1}$ vektor (sloupec) obsahující samé jedničky. Uvědomíme si také, že $\alpha\mathbf{1}=\mathbf{1}\,\alpha$, přitom vlevo této rovnosti je α-násobek jedičkového vektoru a vpravo je součin matic, první z nich má jeden sloupec s jedničkami a druhá je z $\mathbb{R}^{1\times 1}$ a obsahuje prvek α. Rozměry jednotlivých bloků matice $\mathbf{P}$ obecně jsou: $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{k\times n}$, $\mathbf{B}^T\in\mathbb{R}^{k\times m}$, $-\mathbf{1}\in\mathbb{R}^{k\times 1}$, $\mathbf{O}\in\mathbb{R}^{k\times n}$, $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{k\times m}$, $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^{k\times 1}$. Ejhle, matice $\mathbf{A}$ je ve dvou blocích a tudíž musí být $m=n$.

2.4 a) provedeme stejně jako ve Cvičení 2.3, výsledek je ve skriptech.

b) Za předpokladu existence zmíněných inverzí $\mathbf{D}$ musí být čtvercová a $\mathbf{A}$ také je čtvercová (třebaže obecně jiného rozměru). Je možné provést blokově eliminaci vektoru $\mathbf{y}$ z druhé maticové rovnice a dosadit do první, jako bychom pracovali s čísly a ne s maticemi:

$$\begin{aligned} \mathbf{Dy}&=\mathbf{b}-\mathbf{Cx}, \quad \mathbf{y}=\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{Cx})\\ \mathbf{Ax}&=\mathbf{a}-\mathbf{BD}^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{Cx})=\mathbf{a}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{b}+\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{Cx}\\ (\mathbf{A}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})\,\mathbf{x}&=\mathbf{a}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{x}&=(\mathbf{A}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{a}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Výpočetní výhoda: počítáme s menšími maticemi. Předpokládejme, že na výpočet inverzí matice máme algoritmus složitosti n^3. Výpočet inverze matice řádově dvakrát vetší má pak složitost zhruba $(2n)^3=8n^3$, zatímco při vyjádřeném $\mathbf{x}$ stačí provést dvě inverze složitosti n^3 a tři násobení se složitostí n^3 a další operace sčítání a násobení sloupcovým vektorem se složitostí n^2. Takže máme složitost $5n^3$.

2.5 a) $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, je to nehomogenní lineární soustava m rovnic s n neznámými.

b) $\mathbf{A}$ musí být čtvercová. Vlevo je kvadratická forma, jediná rovnice, není lineární.

c) $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Jediná lineární rovnice.

d) Všechny matice musejí být čtvercové. Je to lineární soutava s n^2 rovnic i neznámými.

e) $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Nelineární soustava s $2mn$ neznámými obsahující $m^2 + n^2$ rovnic.

2.6 Vzorec $\operatorname{vec}(\mathbf{AXC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A}) \operatorname{vec} \mathbf{X}$ nám umožní „vykostit“ z maticového součinu matici $\mathbf{X}$ napsanou v jednom sloupci, zatímco před vykostěním byla matice $\mathbf{X}$ uvnitř maticového součinu „krytá“ maticemi z obou stran.

a) Pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ je $\mathbf{b}_i^T \mathbf{X} \mathbf{a}_i = \operatorname{vec}(\mathbf{b}_i^T \mathbf{X} \mathbf{a}_i) = 0$, takže $(\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_i) \operatorname{vec} \mathbf{X} = 0$. Sestavíme-li matici M mající k řádků, jednotlivé řádky jsou $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_i$, pak máme výslednou soustavu $\mathbf{M} \operatorname{vec} \mathbf{X} = \mathbf{0}$

b) Je $\operatorname{vec}(\mathbf{AX} + \mathbf{X}^T\mathbf{B}^T) = \operatorname{vec} \mathbf{AX} + \operatorname{vec} \mathbf{X}^T\mathbf{B}^T$. Dále, má-li být $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, pak jsou $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dále při označení $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jednotkové matice je $\operatorname{vec} \mathbf{AX} = \operatorname{vec} \mathbf{AXI} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) \operatorname{vec} \mathbf{X}$ a $\operatorname{vec} \mathbf{X}^T\mathbf{B}^T = \operatorname{vec} \mathbf{I}\,\mathbf{X}^T\mathbf{B}^T = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}) \operatorname{vec} \mathbf{X}^T = \mathbf{M} \operatorname{vec} \mathbf{X}$, kde matice $\mathbf{M}$ vznikla permutovaáním sloupců matice $(\mathbf{B} \otimes \mathbf{I})$ podle stejné permutace, jako se permutuje $\operatorname{vec} \mathbf{X}^T$ na $\operatorname{vec} \mathbf{X}$. Hledaná soustava pak je $(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) \operatorname{vec} \mathbf{X} + \mathbf{M} \operatorname{vec} \mathbf{X} = ((\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) + \mathbf{M}) \operatorname{vec} \mathbf{X} = \operatorname{vec} \mathbf{C}$.

c) Úloha má neznámou matici $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, u níž jsou známy její řádkové součty a_i a sloupcové součty b_j (souvisí to s dopravní úlohou lineárního programování). Tvar matice uvedený v závěru příkladu se dá vydumat z požadavku na dané hodnoty řádkových a sloupcvých součtů. My ale použijeme tvar $\mathbf{X}\mathbf{1}_n = \mathbf{a}, \mathbf{X}^T\mathbf{1}_m = \mathbf{b}$ (zde $\mathbf{1}_n$ je sloupcový vektor z $\mathbb{R}^n$ obsahující samé jedničky (to měli někteří šťastlivci na vysvědčenéní v první třídě) a analogicky $\mathbf{1}_m \in \mathbb{R}^m$. Je $\operatorname{vec}(\mathbf{X}\mathbf{1}_n) = \operatorname{vec}(\mathbf{I}_m\mathbf{X}\mathbf{1}_n) = (\mathbf{1}_n^T \otimes \mathbf{I}_m) \operatorname{vec} \mathbf{X} = \operatorname{vec} \mathbf{a} = \mathbf{a}$ a také $\operatorname{vec}(\mathbf{1}_m^T\mathbf{X}) = \operatorname{vec}(\mathbf{1}_m^T\mathbf{X}\,\mathbf{I}_n) = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_m) \operatorname{vec} \mathbf{X} = \operatorname{vec} \mathbf{b} = \mathbf{b}$. Sestavíme-li tedy matici $\mathbf{M}$ mající dva bloky nad sebou, v prvním je $\mathbf{1}_n^T \otimes \mathbf{I}_m$ a ve druhém $\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_m$, pak máme soustavu $\mathbf{M} \operatorname{vec} \mathbf{X} = \left[\begin{smallmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{smallmatrix}\right]$.

2.7 a) $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^T = (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})^T = \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T = \mathbf{BA} - \mathbf{AB} = -[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$.

b) $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}(\mathbf{BC} - \mathbf{CB}) - (\mathbf{BC} - \mathbf{CB})\mathbf{A} + \mathbf{B}(\mathbf{CA} - \mathbf{AC}) - (\mathbf{CA} - \mathbf{AC})\mathbf{B} + \mathbf{C}(\mathbf{AB} - \mathbf{BA}) - (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{ABC} - \mathbf{ACB} - \mathbf{BCA} + \mathbf{CBA} + \mathbf{BCA} - \mathbf{BAC} - \mathbf{CAB} + \mathbf{ACB} + \mathbf{CAB} - \mathbf{BCA} - \mathbf{ABC} + \mathbf{BAC} = \mathbf{O}$.

c) $\mathbf{ABC} - \mathbf{BCA} - (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\mathbf{C} + \mathbf{B}(\mathbf{AC} - \mathbf{CA}) = \mathbf{ABC} - \mathbf{BAC} + \mathbf{BAC} - \mathbf{BCA}$

2.8 Z $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$ plyne $\mathbf{AA} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$. Obráceně, z $\mathbf{AA} = \mathbf{I}$ plyne, že $\mathbf{A}$ má plnou hodnost, je tedy regulární a má tedy inverzi $\mathbf{A}^{-1}$. Vynásobením obou stran rovnosti touto inverzí zprava máme $\mathbf{A} = \mathbf{IA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$.

2.9 Ověříme, že $(\mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{I}$. Platí $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}\,\mathbf{B} = \mathbf{I}$.

2.10 Nechť je $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ a nechť k matici $\mathbf{A}$ máme inverzi $\mathbf{B}$, tedy $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Transponujeme-li matice z poslední rovnosti, máme $(\mathbf{BA})^T = \mathbf{I}^T$, což znamená, že $\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T = \mathbf{AB}^T = \mathbf{I}$, takže $\mathbf{B}^T$ je inverze k $\mathbf{A}$.

2.11 a)
$$\begin{aligned}
\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) + (\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A} = \mathbf{B}\,(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})\,\mathbf{A} &\quad \text{rovnost invertujeme} \\
(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1}\mathbf{B}^{-1} &\quad \text{vynásobíme zleva } \mathbf{A}\text{, zprava } \mathbf{B} \\
\mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} = (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1}. &
\end{aligned}$$

Druhou rovnost dokážeme obdobně.

b) Děláme ekvivalentní úpravy, takže až dostaneme zřejmou identitu, máme hotovo. Obě strany rovnosti vynásobíme $(\mathbf{I} + \mathbf{AB})$ zleva: $\mathbf{I} = (\mathbf{I} + \mathbf{AB})(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1}\mathbf{B}) = \mathbf{I} + \mathbf{AB} - \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{ABA}(\mathbf{I}{+}\mathbf{BA})^{-1}\mathbf{B}$. Odečteme z obou stran $\mathbf{I}$ a máme $\mathbf{O} = \mathbf{AB} - \mathbf{A}(\mathbf{I}{+}\mathbf{BA})^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{ABA}(\mathbf{I}{+}\mathbf{BA})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1} - \mathbf{BA}(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \mathbf{BA})(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{I})\mathbf{B} = \mathbf{O}$. Hotovo.

c) V zadání je zřejmě překlep, má se dokázat $(\mathbf{I} + \mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1}$. Vynásobeníme zprava $(\mathbf{I} + \mathbf{BA})$ a dostáváme ekvivalentní rovnost $(\mathbf{I} + \mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{BA}) = \mathbf{A}$. Levou stranu upravíme $(\mathbf{I} + \mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{BA}) = (\mathbf{I} + \mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{ABA}) = (\mathbf{I} + \mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{AB})\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

d) Pro názornější výpočet provedeme substituci $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, neboli $\mathbf{B} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$. Dokazujeme $\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} = (\mathbf{C} - \mathbf{A}) - (\mathbf{C} - \mathbf{A})\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{C} - \mathbf{A}) = \mathbf{C} - \mathbf{A} - (\mathbf{C} - \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}) = \mathbf{C} - \mathbf{A} - \mathbf{C} + \mathbf{A} + (\mathbf{C} - \mathbf{A})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{O} + \mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$.

2.12 a,b) Dokážeme nejdříve b) a z toho pak vyplyne a).

Při značení $\mathbf{X} = \mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^T$, $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\,(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}$ je třeba dokázat $\mathbf{X}\mathbf{Y} = \mathbf{I}$. Tím dokážeme, že $\mathbf{X}$ je levá inverze, ale ona je pak automaticky i pravá, protože matice jsou čtvercové a mají plnou hodnost (viz vzorec (3.19) ve skriptech). Takže inverze k nim existuje (plyne z věty o výpočtu inverze pomocí determinantu). A když je $\mathbf{Z}$ pravá inverze k $\mathbf{Y}$, pak $\mathbf{X}\mathbf{Y}\mathbf{Z} = \mathbf{I}\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{I}$, takže pravá a levá inverze je stejná a víme také z lineární algebry, že je jediná. Nyní se pustíme do ověření $\mathbf{X}\mathbf{Y} = \mathbf{I}$: Kvůli stručnosti výpočtu značím $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}$

$$\begin{gathered}
(\mathbf{A}+\mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^T)\,(\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}+\mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{U}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} = \\
= \mathbf{I}+\mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{U}(\mathbf{I}+\mathbf{C}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}+\mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{U}\mathbf{C}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} = \\
= \mathbf{I} + \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}
\end{gathered}$$

Rozmyslíme si ještě rozměry matic. V rámci součinu píšu do indexu před maticí počet jejích řádků a za ní počet jejích sloupců:

$${}_n\mathbf{X}_n = {}_n\mathbf{A}_n + {}_n\mathbf{U}_m\mathbf{C}_m\mathbf{V}^T_n, \quad {}_n\mathbf{Y}_n = {}_n\mathbf{A}^{-1}{}_n - {}_n\mathbf{A}^{-1}{}_n\mathbf{U}_m\,({}_m\mathbf{C}^{-1}{}_m + {}_m\mathbf{V}^T{}_n\mathbf{A}^{-1}{}_n\mathbf{U}_m)^{-1}{}_m\mathbf{V}^T{}_n\mathbf{A}^{-1}{}_n.$$

Vidíme, že vše sedí při rozměrech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. a že ve výpočtu výše je v závorce ve druhém kroku matice $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, ale všude jinde máme matici $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Měli bychom ji tedy značit jinak, ale když si řekneme, že to jsou jiné matice, tak to snad stačí.

Případ b) přechází na případ a) při $m = 1$ a při $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ obsahující jedničku. Místo jednosloupcových matic $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ píšeme $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a vzorec dokázaný v b) pak přechází na

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\,(1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u})^{-1}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}$$

Jednoprvkovou matici $1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}$ označíme α a uvědomíme si, že $\mathbf{u}\,\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{u}$, kde vlevo je součin jednosloupcové matice $\mathbf{u}$ s inverzí jednoprvkové matice α a vpravo je $\frac{1}{\alpha}$-násobek vektoru $\mathbf{u}$ a tento skalár můžeme vytknout před celé maticové násobení a zapsat ho nakonec jako podíl tohoto maticového násobení číslem α. Lidově řečeno, skalár „vybublá“ z maticového násobení ven.

2.13 Když má na diagonále nenulové prvky. Inverze má na odpovídajících místech převrácené hodnoty k těmto prvkům.

2.14 $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)\ \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) = \operatorname{diag}(a_1b_1, \ldots, a_nb_n) = \operatorname{diag}(b_1a_1, \ldots, b_na_n) =$
$= \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)\ \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$.

2.15 Má-li matice $\mathbf{A}$ levou inverzi, má lineárně nezávislé sloupce, ale může být úzká, tj. její sloupce negenerují celý prostor $\mathbb{R}^m$. Když například $\mathbf{b} \notin \operatorname{rng}\mathbf{A}$, pak soustava nemá řešení, ale postup uvedený studentem řešení najde.

2.16 a) $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^{T^T} = \mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$.

b) $(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{A} = -(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$.

c) Volíme $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ a $\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$. jejich součet je zřejmě roven $\mathbf{A}$ a dále $\mathbf{B}$ je symetrická (podle úlohy (a) a z faktu, že násobek symetrické matice je symetrický) a konečně $\mathbf{C}$ je antisymetrická (podle úlohy (b) a z analogického faktu). Takže matice existují.

Ještě zdůvodníme jednoznačnost. Předpokládáme, že máme ještě matice $\mathbf{B}'$ a $\mathbf{C}'$ stejných vlastností, takže $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{B}' + \mathbf{C}'$, $\mathbf{A}^T = \mathbf{B} - \mathbf{C} = \mathbf{B}' - \mathbf{C}'$. Po sečtení těchto rovností dostáváme $2\mathbf{B} = 2\mathbf{B}'$ a po odečtení $2\mathbf{C} = 2\mathbf{C}'$. Musí tedy $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$ a $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$.

2.17 a) $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^T(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T)\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T\mathbf{a} + \mathbf{a}^T\mathbf{b} + \mathbf{b}^T\mathbf{a} + \mathbf{b}^T\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a}^T\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2$.

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^T(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T\mathbf{a} - \mathbf{a}^T\mathbf{b} + \mathbf{b}^T\mathbf{a} - \mathbf{b}^T\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$.

c,d) Jako (a), (b), nejprve matice převedeme po sloupcích na vektory prostřednictvím operace vec uvedené ve cvičení 2.6.

2.18 Trik spočívá v tom, že si nějaký genius všimne, že podmínky k důkazu se dají formulovat blokově:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Skutečně, v levém horním bloku máme podmínku $\mathbf{AD}^T - \mathbf{BC}^T = \mathbf{I}$, v pravém dolním máme tutéž podmínku v transponované podobě (je totiž $\mathbf{I} = \mathbf{I}^T$) a v ostatních dvou blocích je ukryto sdělení, že matice $\mathbf{AB}^T$ a $\mathbf{CD}^T$ jsou symetrické, tedy $\mathbf{AB}^T = \mathbf{BA}^T$ a $\mathbf{CD}^T = \mathbf{DC}^T$. Podíváme-li se na blokovou rovnost z dálky, vidíme součin dvou matic $\mathbf{XY} = \mathbf{I}$. Takže matice $\mathbf{Y}$ musí být inverzní k matici $\mathbf{X}$. A čtvercová inverzní matice s výchozí maticí komutuje (pravá a levá inverze je pro čvercové matice stejná), takže platí i rovnost $\mathbf{YX} = \mathbf{I}$. Podíváme-li se v této rovnosti do pravého dolního bloku, najdeme tam dokazovanou rovnost $\mathbf{A}^T\mathbf{D} - \mathbf{C}^T\mathbf{B} = \mathbf{I}$.

2.19 Provádíme blokové operace násobení.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}-\mathbf{BA} & \mathbf{B} \\ 2\mathbf{A}-\mathbf{ABA} & \mathbf{AB}-\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}-\mathbf{BA} & \mathbf{B} \\ 2\mathbf{A}-\mathbf{ABA} & \mathbf{AB}-\mathbf{I} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\mathbf{I}-\mathbf{BA})(\mathbf{I}-\mathbf{BA}) + \mathbf{B}(2\mathbf{A}-\mathbf{ABA}) & (\mathbf{I}-\mathbf{BA})\mathbf{B} + \mathbf{B}(\mathbf{AB}-\mathbf{I}) \\ (2\mathbf{A}-\mathbf{ABA})(\mathbf{I}-\mathbf{BA}) + (\mathbf{AB}-\mathbf{I})(2\mathbf{A}-\mathbf{ABA}) & (2\mathbf{A}-\mathbf{ABA})\mathbf{B} + (\mathbf{AB}-\mathbf{I})(\mathbf{AB}-\mathbf{I}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

2.20 $\operatorname{tr}(\mathbf{XY} - \mathbf{YX}) = \operatorname{tr}(\mathbf{XY}) - \operatorname{tr}(\mathbf{YX}) = \operatorname{tr}(\mathbf{XY}) - \operatorname{tr}(\mathbf{XY}) = 0$, ale na pravé straně je $\operatorname{tr}(\mathbf{I}) = n$. V úpravě levé strany jsme využili cykličnost stopy.

2.21 Dokazujeme $\langle \mathbf{AB}, \mathbf{C} \rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{A}^T\mathbf{C} \rangle$. Na levé straně máme $\sum_i \sum_j (\sum_k a_{ik}b_{kj})\, c_{ij}$. Na pravé straně je $\sum_j \sum_k b_{kj}(\sum_i a_{ik}c_{ij}) = \sum_i \sum_j \sum_k a_{ik}b_{kj}c_{ij}$, takže máme tentýž výsledek. Aalogicky bychom ověřili daší rovnost.

2.22 Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Je $\det(-\mathbf{A}) = (-1)^n \det \mathbf{A}$. Použili jsme linearitu determinatnu v každém řádku matice $\mathbf{A}$.

2.23 **a)** Vidíme to např. z eliminační metody počítání inverze, tedy $[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I}] \sim [\mathbf{I}\,|\,\mathbf{A}^{-1}]$. Je-li $\mathbf{A}$ horní trojúhelníková, pak eliminace obsahuje jen zpětný chod, který nezruší nuly pod diagonálou výchozí matice $\mathbf{I}$.

b) Uvažujme součin $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, kde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou horní trojúhelníkové matice. Je-li $i > j$, pak platí $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj} = 0$, neboť v každém součinu $a_{ik}b_{kj}$ je aspoň jeden činitel nulový.

2.24 Tři typy elementárních matic zmíněných ve skriptech označíme $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ a $\mathbf{E}_3$.

a) Vidíme, že $\mathbf{E}_1^T = \mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2^T = \mathbf{E}_2$. Pouze $\mathbf{E}_3^T$ se liší od $\mathbf{E}_3$. Jestliže $\mathbf{E}_3$ přičítá α násobek i-tého řádku k j-tému, pak $\mathbf{E}_3^T$ přičítá α násobek j-tého řádku k i-tému.

b) Je $\mathbf{E}_1^{-1} = \mathbf{E}_1$. Dále pokud $\mathbf{E}_2$ pronásobí i-tý řádek konstantou α, pak $\mathbf{E}_2^{-1}$ pronásobí i-tý řádek konstantou $1/\alpha$ (a vrátí eliminovanou matici do původního stavu). Konečně, pokud $\mathbf{E}_3$ pracuje s konstantou α, pak $\mathbf{E}_3^{-1}$ pracuje s konstantou $-\alpha$ na stejné pozici, takže odečítá α násobek řádku a vrací eliminovanou matici do původního stavu.

K nalezení inverze k $\mathbf{E}_3$ použijeme vzorec Morrisonové. Označme $\mathbf{M}(\alpha)$ nulovou matici s jedinou výjimkou, prvek $m_{ij} = \alpha$ pro nějaké $i \neq j$. Pak $\mathbf{E}_3 = \mathbf{I} + \mathbf{M}(\alpha)$. Dále označme $\mathbf{u}$ nulový vektor s výjimkou $u_i = \alpha$, a $\mathbf{v}$ buď nulový vektor s výjimkou $v_j = 1$. Pak je $\mathbf{uv}^T = \mathbf{M}(\alpha)$. Morrisonové vzorec nám dává: $\mathbf{E}_3^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{M}(\alpha))^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{uv}^T)^{-1} = \mathbf{I}^{-1} - (\mathbf{I}^{-1}\mathbf{uv}^T\mathbf{I}^{-1})/(1 + \mathbf{v}^T\mathbf{I}^{-1}\mathbf{u}) = \mathbf{I} - \mathbf{uv}^T/(1+0) = \mathbf{I} - \mathbf{M}(\alpha)$. Ve jmenovateli máme $1 + \mathbf{u}^T\mathbf{v} = 1 + 0$, protože $i \neq j$.

Kapitola 3

3.1 Je vyřešeno ve skriptech. Přidáme jen geometrický pohled.
a) Při daném nenulovém vektoru $\mathbf{a}$ jde o množinu vektorů na $\mathbf{a}$ kolmých, což vyplní nadrovinu kolmou na $\mathbf{a}$ procházející počátkem.
b) Je to nadrovina kolmá na daný nenulový vektor $\mathbf{a}$ posunutá do partikulárního řešení nehomogenní soustavy s jedinou rovnicí $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = b$.
c) Množina je povrch jednotkové koule (sféra).
d) Pro $n > 1$ to je prázdná množina. Matice vlevo má totiž hodnost nejvýše 1.
e) Je to množina řešení $\mathbf{1}^T\mathbf{x} = 0$, tedy je to nadrovina kolmá na vektor $\mathbf{1}$ procházející počátkem.
f) Množina je afinní podprostor zapsaná ve tvaru lineární podprostor plus posun.

3.2 Je to opakování klasické úlohy z lineární algebry. Je vyřešeno ve skriptech.

3.3 Požadavek $\alpha(1,2,3) + \beta(-1,0,1) = (2,2,2)$ vede na nehomogenní soustavu s neznámými α, β, jejíž řešení je $\alpha = 1$, $\beta = -1$, což jsou souřadnice vektoru $(2,2,2)$ v zadané bázi.

3.4 To je klasické tvrzení ze základů lineární algebry. Z lineární závislosti zadaných vektorů, tedy z faktu, že existuje lineární kombinace $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ s netriviálními koeficienty plyne, že třeba α_i je nenulový koeficient. Vydělíme jím zmíněnou rovnici a kromě vektoru $\mathbf{x}_i$ vše ostatní převedeme na druhou stranu rovnosti. Máme $\mathbf{x}_i = -(\alpha_1/\alpha_i)\mathbf{x}_1 - \cdots - (\alpha_k/\alpha_i)\mathbf{x}_k$, kde na pravé straně chybí sčítanec s vektorem $\mathbf{x}_i$. Je tedy $\mathbf{x}_i$ lineární kombinací ostatních vektorů.

3.5 Toto je další klasika. $\mathbf{f}(X)$ je podprostor, protože je uzavřený na lineární kombinace. Podrobněji: nechť $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{f}(X)$. Ukážeme, že pak $\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 \in \mathbf{f}(X)$. Vektory $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ mají své vzory $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, tj. $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$. Díky linearitě $\mathbf{f}$ je $\mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2) = \alpha_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \alpha_2\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) = \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2$, takže $\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2$ má svůj vzor a leží tedy v množině $\mathbf{f}(X)$.

3.6 Protože $\begin{bmatrix} 0 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -x_1y_3 + x_3y_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$, je zkoumané zobrazení lineární, matici tohoto zobrazení vidíme v předchozím vzorci. Je to antisymetrická matice a pro nenulový vektor $\mathbf{y}$ má hodnost rovnu 2, jak se můžete přesvědčit výpočtem (zjistíte, že determinant této matice je nulový ale buď první a druhý řádek nebo první a třetí řádek nebo druhý a třetí řádek jsou při nenulovém $\mathbf{y}$ lineárně nezávislé).

3.7 Je částečně vyřešeno ve skriptech. Je tam ukázáno, že existuje matice $\mathbf{A}$ a nenulový vektor $\mathbf{b}$ tak, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Tak poznáme afinní zobrazení. Ale poslední dovětek v zadání říká, že to máme dokázat *z definice*, která ve skriptech zní: afinní zobrazení je takové, které zobrazí afinní kombinaci vzorů $\mathbf{x}_i$ na afinní kombinaci obrazů $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ se stejnými koeficienty. Jinak řečeno:

$$\mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n) = \alpha_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_n\mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad \text{kdykoli } \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$$

Ukážeme tedy, že toto je ekvivalentní s faktem, že lze obrazy $\mathbf{f}$ psát ve tvaru $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$.

Jeden směr důkazu je snadný. Předpokládáme-li $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, pak je při $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n) &= \mathbf{A}\,(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n) + \mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{A}\mathbf{x}_n + (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\,\mathbf{b} = \\ &= \alpha_1(\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}) + \cdots + \alpha_n(\mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{b}) = \alpha_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_n\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)\end{aligned}$$

Nyní předpokládáme pro $\mathbf{f}$ platnost definice a najdeme matici $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{b}$. Volme $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{0})$. Ukážeme, že zobrazení $\mathbf{g} = \mathbf{f} - \mathbf{f}(\mathbf{0})$ je lineární:

$$\begin{gathered}\mathbf{g}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \\ \mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n + (1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_n)\,\mathbf{0}) - \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \\ = \alpha_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_n\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + (1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_n)\,\mathbf{f}(\mathbf{0}) - \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \alpha_1(\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{0})) + \cdots + \alpha_n(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{0})) = \\ = \alpha_1\mathbf{g}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_n\mathbf{g}(\mathbf{x}_n)\end{gathered}$$

Protože je $\mathbf{g}$ lineární, má svou matici $\mathbf{A}$. Konečně $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$.

3.8 Je to další klasická úloha z lineární algebry. Řešení je ve skriptech.

3.9 **a)** Má existovat matice $\mathbf{A}$ tak, že $\mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 2$ a $\mathbf{A}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = 3$, neboli $\mathbf{A}\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix} = [2\ 3]$. Poslední rovnost v transponované podobě $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ je nehomogenní soustava s neznámou jednosloupcovou maticí $\mathbf{A}^T$. Protože matice soustavy je regulární, má tato soustava řešení a tedy hledané zobrazení $\mathbf{f}$ existuje.

b) Má být $\mathbf{A}\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{bmatrix} = [2\ 3\ 4]$, tedy $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$. Tato nehomogenní soustava s neznámou maticí $\mathbf{A}^T$ má svou matici soustavy i rozšířenou matici se stejnou hodností (hodnost je v obou případech 2), takže dle Frobeniovy věty má řešení, tedy $\mathbf{A}^T$ existuje, takže též $\mathbf{f}$ existuje.

c) Analogicky, jako v předchozích úlohách řešíme soustavu $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&1&3\end{bmatrix}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$. Hodnost matice soustavy je 2 a rozšířené matice je 3, takže soustava nemá řešení a hledané lineární zobrazení $\mathbf{f}$ neexistuje.

3.10 **a)** Hodnoty zobrazení jsou $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&-1\end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Je $\operatorname{rng}\mathbf{f} = \operatorname{rng}\mathbf{A} = \mathbb{R}^2$, báze $\operatorname{rng}\mathbf{f}$ tedy je například $\{(1,0),(0,1)\}$. Jádro zobrazení $\mathbf{f}$ (nulový prostor $\mathbf{f}$) je prostor řešení homogenní soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, báze tohoto prostoru je například $\{(1,1,3)\}$.

b) Je $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}2&1\\1&-1\\1&2\end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, takže $\operatorname{rng}\mathbf{f} = \operatorname{rng}\mathbf{A}$ a jeho bázi vidíme např. ve sloupcích matice $\mathbf{A}$, tedy $\{(2,1,1),(1,-1,2)\}$ (jsou lineárně nezávislé). Množina řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ obsahuje pouze nulový vektor, takže $\operatorname{Null}\mathbf{f} = \operatorname{Null}\mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$.

3.11 V příkladu nás mírně pletou, protože písmena m a n jsou použita obráceně, než je obvyklé, tedy zde je m dimenze vstupního lineárního prostoru a n dimenze výstupního lineárního prostoru. Předpokládá se, že dimenze prostoru obrazů je rovna dimenzi vstupního lineárního prostoru, takže zobrazení $\mathbf{A}\mathbf{x}$ má nulový defekt, tedy $\mathbf{A}$ musí mít lineárně nezávislé sloupce, tedy tvoří bázi $\operatorname{rng}\mathbf{A}$. Obráceně, máme-li bázi s m prvky, pak dimenze jejího lineárního obalu je pochopitelně rovna m.

3.12 Nechť $\operatorname{rng}\mathbf{A} = \operatorname{rng}\mathbf{B}$ a mají lineárně nezávislé sloupce $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\ \dots\ \mathbf{a}_k]$, $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1\ \dots\ \mathbf{b}_k]$. Pak $\mathbf{a}_1 = \mathbf{B}\mathbf{c}_1$ což značí, že a_1 je lineární kombinací vektorů $\mathbf{b}_i$ a $\mathbf{c}_1$ obsahuje koeficienty této lineární kombinace. Analogicky $\mathbf{a}_2 = \mathbf{B}\mathbf{c}_2$, atd., $\mathbf{a}_k = \mathbf{B}\mathbf{c}_k$. Zapsáno jedinou maticovou rovností: $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$, kde $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1\ \dots\ \mathbf{c}_k]$. Sloupce matice $\mathbf{C}$ nemohou být lineárně závislé, protože pak by také $\mathbf{a}_i$ byly lineárně závislé, ale ony nejsou. $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ je tedy regulární matice.

Nechť nyní platí $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$ pro nějakou regulární matici $\mathbf{C}$. Pak $\operatorname{rng}\mathbf{A} \subseteq \operatorname{rng}\mathbf{B}$, protože všechny sloupce matice $\mathbf{A}$ leží v $\operatorname{rng}\mathbf{B}$ ($\mathbf{a}_i$ jsou lineárními kombinacemi $\mathbf{b}_i$, takže lineární kombinace $\mathbf{a}_i$ jsou lineárními kombinacemi lineárních kombinací $\mathbf{b}_i$). Obrácená inkluze $\operatorname{rng}\mathbf{A} \supseteq \operatorname{rng}\mathbf{B}$ pak plyne z faktu $\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}$. Využili jsme regularity $\mathbf{C}$.

3.13 **a)** Je-li $X \subseteq Y$, pak z definice lineárního obalu je $\operatorname{span} X \subseteq \operatorname{span} Y$. Jinak řečeno $\operatorname{rng}\mathbf{A} \subseteq \operatorname{rng}[\mathbf{A}\ \mathbf{B}]$

b) Je-li $\operatorname{span} Y \subseteq \operatorname{span} X$, pak $\operatorname{span} X = \operatorname{span}(X \cup Y)$, což je jinými slovy dokazované tvrzení. Dokážeme to. Rozšíříme obě strany inkluze v předpokladu o množinu $\operatorname{span} X$, máme: $(\operatorname{span} Y) \cup (\operatorname{span} X) = (\operatorname{span} X) \cup (\operatorname{span} X) = \operatorname{span} X$. Aplikujeme na obě strany inkluze span, inkluze zůstávají zachovány: $\operatorname{span}((\operatorname{span} Y) \cup (\operatorname{span} X)) \subseteq \operatorname{span}(\operatorname{span} X) = \operatorname{span} X$. Z definice lineárního obalu je $\operatorname{span}((\operatorname{span} Y) \cup (\operatorname{span} X)) = \operatorname{span}(Y \cup X)$, protože to je množina lineárních kombinací lineárních kombinací prvků z X a Y. Máme tedy výsledek $\operatorname{span}(X \cup Y) \subseteq \operatorname{span} Y$. Obrácená inkluze je zřejmá.

c) Jsou-li P, Q podprostory takové, že $P \subseteq Q$ a mají navíc stejnou dimenzi, pak se rovnají. Přesně toto se říká v dokazovaném tvrzení.

d) Dokážeme nejprve, že z $\operatorname{rng}\mathbf{A} = \operatorname{rng}\mathbf{B}$ plyne $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}[\mathbf{A}\ \mathbf{B}]$. Z úlohy (b) vidíme, že z $\operatorname{rng}\mathbf{A} = \operatorname{rng}\mathbf{B}$ plyne $\operatorname{rng}\mathbf{A} = \operatorname{rng}[\mathbf{A}\ \mathbf{B}]$. A dimenze stejných podprostorů jsou stejné. Obráceně. Dokážeme, že z $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}[\mathbf{A}\ \mathbf{B}] = \operatorname{rank}\mathbf{B}$ plyne $\operatorname{rng}\mathbf{A} = \operatorname{rng}\mathbf{B}$. Z úlohy (c) plyne, že $\operatorname{rng}\mathbf{A} = \operatorname{rng}[\mathbf{A}\ \mathbf{B}]$ a po prohození písmen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ také plyne, že $\operatorname{rng}\mathbf{B} = \operatorname{rng}[\mathbf{A}\ \mathbf{B}]$. Takže taky $\operatorname{rng}\mathbf{A} = \operatorname{rng}\mathbf{B}$.

3.14 Součin $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ čteme takto: složky vektoru $\mathbf{x}$ jsou koeficienty linenární kombinace sloupců matice $\mathbf{A}$, která je rovna nulovému vektoru. Je-li $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, pak máme netriviální lineární kombinaci sloupců matice $\mathbf{A}$ rovnu nulovému vektoru. To je doslova definice lineární závislosti. Matice $\mathbf{A}$ může mít lineárně nezávislé řádky, je-li široká, tj. má lineárně závislé sloupce.

3.15 Je $\operatorname{rng}\mathbf{AB} \subseteq \operatorname{rng}\mathbf{A}$, protože sloupce $\mathbf{AB}$ obsahují jen lineární kombinace sloupců matice $\mathbf{A}$. Z inkluze podprostorů plyne nerovnost jejich dimenzí, tedy $\dim\operatorname{rng}\mathbf{AB} = \operatorname{rank}\mathbf{AB} \leq \dim\operatorname{rng}\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A}$. Máme výsledek $\operatorname{rank}\mathbf{AB} \leq \operatorname{rank}\mathbf{A}$. Druhou nerovnost $\operatorname{rank}\mathbf{AB} \leq \operatorname{rank}\mathbf{B}$ dokážeme po transponování součinu a s využitím věty z lineární algebry, že $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^T$. Platí: $\operatorname{rank}\mathbf{AB} = \operatorname{rank}(\mathbf{AB})^T = \operatorname{rank}\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \leq^* \operatorname{rank}\mathbf{B}^T = \operatorname{rank}\mathbf{A}^T$. V místě $\leq^*$ jsme využili před chvíli dokázanou nerovnost.

3.16 $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je tvaru $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$. Neznámá je matice $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{b}$. Má platit $\mathbf{Ap}_i + \mathbf{b} = \mathbf{q}_i$ pro $i \in \{1,2,3\}$. Souhrnně to lze zapsat pomocí blokové matice: $[\mathbf{A}\ \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\ \mathbf{q}_3]$. Po transponování máme soustavu $\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T & 1 \\ \mathbf{p}_2^T & 1 \\ \mathbf{p}_3^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{b}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix}$, jejíž pravá strana má dva sloupce. Soustava má matici neznámých $\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{b}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Vyřešením této soustavy dostaneme $\mathbf{A}$ a $\mathbf{b}$.

3.17 a) Neplatí. Protipříklad $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Matice $\mathbf{A}$ nemá plnou hodnost, $\mathbf{AB}$ má plnou hodnost.

b) Neplatí. Nechť $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Pak $\mathbf{a}$ i $\mathbf{a}^T$ mají plnou hodnost, ale $\mathbf{aa}^T$ nemá.

c) Platí. Pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ je dle předpokladu $\mathbf{Bx} \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{Ay} \neq \mathbf{0}$. Pak také $(\mathbf{AB})\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{Bx}) \neq \mathbf{0}$.

d) Platí. Předpoklad $\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{O}$ praví, že všechny sloupce matice $\mathbf{A}$ jsou kolmé na všechny sloupce matice $\mathbf{B}$. Takže $\operatorname{rng}\mathbf{A} \perp \operatorname{rng}\mathbf{B}$. Protože sloupce $\mathbf{A}$ a sloupce $\mathbf{B}$ jsou lineárně nezávislé a generují navzájem kolmé prostory, je i sjednocení těchto sloupců lineárně nezávislé.

e) Platí. Má-li bloková matice plnou hodnost ve smyslu, že má lineárně nezávislé sloupce, pak jsou lineárně nezávislé sloupce i v prvním sloupcovém bloku i ve druhém sloupcovém bloku, takže $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ mají lineárně nezávislé sloupce a tudíž mají plnou hodnost. Má-li bloková matice plnou hodnost ve smyslu, že má lineárně nezávislé řádky, pak se úvaha provede analogicky.

3.18 Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, pak $\mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ a předpokládáme o ní, že je regulární, má tedy hodnost m. Maticový součin nezvětšuje hodnost, takže $\operatorname{rank}\mathbf{A} \geq m$, $\operatorname{rank}\mathbf{B} \geq m$, takže obě tyto matice mají plnou hodnost rovnu m. To znamená, že $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé řádky a $\mathbf{B}$ má lineárně nezávislé sloupce.

3.19 Aby tvrzení platilo, musí navíc $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$, protože $\mathbf{x}_1$ je vždy klíčový vektor (požadavek $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$ není v zadání úlohy uveden, ale předpokládejme jej). Pak vyřazujeme všechny následující vektory, pokud leží ve $\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1\}$ až najdeme $\mathbf{x}_i$ nemající tuto vlastnost. To je druhý klíčový vektor. Vyřazujeme všechny následující, které leží ve $\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_i\}$ až najdeme první $\mathbf{x}_j$ nemající tuto vlastnost, to je třetí klíčový vektor. Atd. Po konečně mnoha krocích projdeme všechny vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$, protože jich je konečně mnoho. Je zřejmé, že jsme dohromady vyřadili vektory, které leží ve span klíčových vektorů, takže $\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ = span klíčových vektorů. Ještě je třeba dokázat jejich lineární nezávislost. Pro spor předpokládejme jejich lineární závislost. Pak existuje jejich netriviální kombinace rovna nulovému vektoru. Vezmeme nenulový koeficient s největším indexem (index označíme p), vydělíme tímto koeficientem uvedenou lineární kombinaci a převedeme ostatní vektory s výjimkou $\mathbf{x}_p$ na druhou stranu rovnosti. Máme $\mathbf{x}_p$ vyjádřený jako lineární kombinaci předchozích vektorů, takže $\mathbf{x}_p$ nemůže být klíčový. To je spor.

3.20 a) $\mathbf{u} \in Y^T \Rightarrow \mathbf{u}^T\mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in Y \Rightarrow \mathbf{u}^T\mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in X$ (protože $X \subseteq Y$) $\Rightarrow \mathbf{u} \in X^T$, tedy $Y^T \subseteq X^T$.

b) $\mathbf{u} \in X + Y \Rightarrow \exists\, \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y, \mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{u} = \sum_i^k \alpha_i \mathbf{x}_i + \sum_j^l \beta_k \mathbf{y}_j$ (protože $\mathbf{x}_i$ generují X a $\mathbf{y}_j$ generují Y) $\Rightarrow$ $\mathbf{u}$ je lineární kombinací generátorů $\mathbf{x}_i$ a $\mathbf{y}_j$. Obráceně: každou lineární kombinaci těchto generátorů lze rozdělit na kombinaci prvků $\mathbf{x}_i$ a zvlášť $\mathbf{y}_j$, takže $\exists\, \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y, \mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ $\Rightarrow \mathbf{u} \in X + Y$.

c) Vlevo vidíme všechny vektory, které jsou mimo jiné kolmé na všechny generátory $\mathbf{x}_i$ a $\mathbf{y}_j$ z předchozí vlastnosti. Vpravo vidíme vektory kolmé na všechny generátory $\mathbf{x}_i$ a také kolmé na všechny generátory $\mathbf{y}_j$. To je ovšem tatáž množina vektorů.

d) Pišme $X^\perp$ místo X a pišme $Y^\perp$ místo Y. Vlastnost (c) má pak tvar $(X^\perp + Y^\perp)^\perp = X \cup Y$, protože $X^{\perp\perp} = X$, $Y^{\perp\perp} = Y$. Nakonec přejdeme ke kolmým doplňkům na obou stranách rovnosti.

3.21 V matici $\mathbf{A}$ vyznačíme sloupce, které tvoří množinu klíčových vektorů v $\mathbb{R}^m$. Jejich indexy tvoří množinu J. Pak matici $\mathbf{A}$ doplníme dalšími řádky tvaru $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$, kde j je mimo množinu J. Dostáváme čtvercovou matici. Ukážeme nyní, že všechny sloupce této čtvercové matice jsou klíčové, takže matice je regulární a tudíž i všechny její řádky jsou lineárně nezávislé. Proč jsou její sloupce klíčové? Sloupec s indexem z množiny J (dejme tomu $\mathbf{s}_j$) má od řádku $m+1$ samé nuly. Nelze jej tedy lineárně kombinovat pomocí sloupců s indexy mimo množinu J, protože ty mají někde na pozici $m+1$ až n právě jednu jedničku a žádné dva nemají jedničku na stejném řádku. Nelze jej také lineárně kombinovat z předchozích sloupců s indexy z J, protože $\mathbf{s}_j$ je klíčový v rámci prvních m složek tohoto vektoru. Konečně každý sloupec s indexem mimo J je také klíčový, protože má jedničku na pozici, kde všechny předchozí sloupce mají nuly.

3.22 $1 \Rightarrow 2$: Dokážeme sporem. Nechť tedy nějaký koeficient α_i z vlastnosti 2 je nenulový. Bez újmy na obecnosti to bude α_1 (pořadí bodů můžeme změnit). Rovnost vektorů ve vlastnosti 2 vydělíme α_1 a převedeme vše až na $\mathbf{x}_1$ na pravou stranu. Máme $\mathbf{x}_1 = (-\alpha_2/\alpha_1)\mathbf{x}_2 + \cdots + (-\alpha_k/\alpha_1)\mathbf{x}_k$. Využijeme předpokladu ve vlastnosti 2: $\alpha_1 = -\alpha_2 - \cdots - \alpha_k$. Zřejmě je $\mathbf{x}_1$ afinní kombinací ostatních bodů, protože suma koeficientů této lineární kombinace je $(-\alpha_2 - \cdots - \alpha_k)/\alpha_1 = 1$.

$2 \Rightarrow 3$: Dokazujeme lineární nezávislost z definice. Nechť $\beta_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \cdots + \beta_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1) = \mathbf{0}$. Po roznásobení máme $\beta_2\mathbf{x}_2 - \beta_2\mathbf{x}_1 + \cdots + \beta_k\mathbf{x}_k - \beta_k\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, což je lineární kombinace bodů $\mathbf{x}_i$, jejichž suma koeficientů je nulová. Podle 2 je tedy každý koeficient nulový, tedy $\beta_i = 0$ pro $i \in \{2, \ldots, k\}$. Pouze triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru.

$3 \Rightarrow 4$: Ukážeme, že matice $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_k \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$ má plnou hodnost, tedy lineárně nezávislé sloupce. Po jednom kroku Gaussovy eliminace aplikované na sloupce matice máme $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$ a stačí u této matice ukázat lineární nezávislost sloupců. Ověříme z definice lineární nezávislosti: $\gamma_1 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \gamma_k \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}$. Z poslední složky sloupců ihned plyne, že musí $\gamma_1 = 0$. Zbylá lineární kombinace obsahuje vektory z předpokladu 3 a ty jsou lineárně nezávislé. Takže všechny γ_i jsou nulové. Pouze triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru.

$4 \Rightarrow 1$: Dokážeme sporem. Nechť tedy jeden bod je afinní kombinací ostatních, bez újmy na obecnosti to bude $\mathbf{x}_1$. Pak je $\mathbf{x}_1 = \delta_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \delta_k\mathbf{x}_k$, kde suma těchto koeficientů je rovna jedné. Pak můžeme psát $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \delta_2 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ 1 \end{bmatrix} + \cdots + \delta_k \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ 1 \end{bmatrix}$. Tato rovnost platí nejen na úrovni bodů $\mathbf{x}_i$, ale též v poslední složce s jedničkami, protože suma δ_i je rovna jedné. Ovšem ta rovnost vyvrací předpoklad 4 o lineární nezávislosti sloupců $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Kapitola 4

4.1 **a)** $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 14$, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{14}$,

b) $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|(2,2,2)\| = \sqrt{12}$,

c) $\cos\alpha = \mathbf{x}^T\mathbf{y}/(\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|) = 2/\sqrt{2\cdot 14} = 1/\sqrt{7}$, $\arccos 1/\sqrt{7} \doteq 1{,}1832$.

4.2 Vektory leží ve společné přímce (tj. jsou lineárně závislé) a jsou shodně orientované.

4.3 Vyřešíme soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kde $\mathbf{A}$ je matice obsahující v řádcích dané vektory. Báze řešení je např. $(1,1,-1)$.

4.4 Označme $A = X$, $B = Y$, $C = Z$. (Takto to bylo značeno v původní verzi skript.) B je řešení soustavy $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kde $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, C je řešení $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kde $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Jsou to tedy lineární podprostory, $\dim B = 3$, $\dim C = 2$, je $C \subseteq B$. Všechny vektory kolmé na řešení libovolné soustavy $\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ leží v lineárním obalu řádků matice $\mathbf{P}$. Protože podprostor $A = \operatorname{span}\{(1,0,1,0)\}$ leží v lineárním obalu řádků uvedených matic $\mathbf{B}, \mathbf{C}$, je kolmý na řešení odpovídajících soustav, tedy na B i C. Není pravda, že $B \perp C$, protože mají netriviální průnik. Je pravda, že $A = B^\perp$, $B = A^\perp$, protože $A \perp B$ a součet dimenzí prostorů A a B je 4, tedy dimenze celého prostoru, v němž máme dané vektory. Konečně není $A = C^\perp$ (třebaže $A \perp C$), protože součet dimenzí $1+2$ není roven dimenzi celého prostoru.

4.5 **a)** $(\mathbf{x}+\mathbf{y})^T(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{x}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} - \mathbf{y}^T\mathbf{y} = 0$. Geometricky: úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé.

b) $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{y})^T(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{y} = \|\mathbf{x}|^2 + 0 + \|\mathbf{y}\|^2$. Pythagorova věta.

c) Je to stejné jako (b), přechod od $\mathbf{y}$ k $-\mathbf{y}$ nemění levou stranu dokazované rovnosti.

d) Analogicky jako (b), jen po roznásobení závorek je těch součinů v zápise poněkud více, ale všechny součiny s navzájem různými vektory jsou nulové.

4.6 `$ octave --no-gui` spustí svobodnou alternativu k Matlabu.

```
octave:1> A = [1 1 1 -1; 2 -1 -1 1; -1 2 2 1]'
A =
   1   2  -1
   1  -1   2
   1  -1   2
  -1   1   1

octave:2> [Q R] = qr(A,0)
Q =
  -5.0000e-01   8.6603e-01  -8.3267e-17
  -5.0000e-01  -2.8868e-01  -4.0825e-01
  -5.0000e-01  -2.8868e-01  -4.0825e-01
   5.0000e-01   2.8868e-01  -8.1650e-01

R =
  -2.00000   0.50000  -1.00000
   0.00000   2.59808  -1.73205
   0.00000   0.00000  -2.44949
```

Báze je ve sloupcích matice $\mathbf{Q}$. První bázový vektor je jen normalizovaný první sloupec matice $\mathbf{A}$, tj. zde násobený polovinou (ve skutečnosti mínus polovinou, v tom má algoritmus svobodnou volbu a jeho chování neovlivníme). Další sloupec je lineární kombinací prvních dvou sloupců $\mathbf{A}$, navíc kolmý na první sloupec $\mathbf{Q}$ a normalizovaný. Atd. Koeficienty lineárních kombinací sloupců matice $\mathbf{Q}$, které se rovnají sloupcům matice $\mathbf{A}$, vidíme v matici $\mathbf{R}$. Nepovinný parametr `0` ve volání funkce `qr()` vede na redukovaný QR rozklad. Bez něj bychom měli plný QR rozklad, tj. $\mathbf{Q}$ by byla čtvercová: další sloupce jsou ortonormální bází z ortogonálního doplňku $\operatorname{rng}\mathbf{A}$, tedy je tam řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Matice $\mathbf{R}$ je pak obdélníková doplněná nulami.

Pozorování: QR rozklad je numerické vyjádření Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace.

4.7 Jsou-li $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ ortogonální, tj. čtvercové s vlastností $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$, $\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$, pak

$$(\mathbf{U}\mathbf{V})^T(\mathbf{U}\mathbf{V}) = \mathbf{V}^T\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{V} = \mathbf{V}^T\mathbf{I}\,\mathbf{V} = \mathbf{I}.$$

Doplňující otázka k ortogonálním maticím: Je-li $\mathbf{U}$ ortogonální, pak $\mathbf{U}^T$ je taky ortogonální. Jinými slovy, ortogonální matice má nejen ve sloupcích, ale i v řádcích ortonormální bázi. Důvod: $\mathbf{U}$ má plnou hodnost, tedy z LA víme, že má inverzní matici, tj. matici, která násobena zleva i zprava danou maticí dává $\mathbf{I}$ (to se dokazuje pomocí determinantů). Sdělení $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$ násobme zprava inverzní maticí $\mathbf{U}^{-1}$ a dostáváme, že $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$. Tato matice umí násobit danou matici $\mathbf{U}$ zprava i zleva se stejným výsledkem $\mathbf{I}$.

4.8 Rotační je taková izometrie, která zachovává znaménko orientovaného objemu, tedy $\det \mathbf{U} = 1$. Z toho plyne, že počet mínus jedniček musí být sudý. Jiný geometrický pohled: jedna mínus jednička vytvoří zrcadlení. Dvakrát provedené zrcadlení je rotace.

4.9 $\begin{bmatrix} a+b & a-b \\ b-a & b+a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+b & b-a \\ a-b & b+a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a^2+2b^2 & 0 \\ 0 & 2a^2+2b^2 \end{bmatrix}$. Aby byla daná matice ortogonální, musí se tento součin rovnat $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Takže musí $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$. Body (a, b) vyplňují kružnici o poloměru $\frac{1}{2}$.

4.10 Není to izometrie, protože velikost vzoru $(1, -1, 2)$ není rovna velikosti obrazu $(1, 2, -1, 1)$. Kdybychom upravili zadání, že totiž $\mathbf{f}(1, -1, 2) = (1, 2, -1, 0)$, pořád bychom neměli izometrii, protože není skalární součin vzorů roven skalárnímu součinu obrazů.

Doplňující otázka: mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, kde $m > n$. Může být izometrií? Odpověď: Ne, protože f musí mít při $m > n$ netriviální kernel a nenulové vektory z kernelu mají obraz nulové velikosti.

4.11 a) Matice $\mathbf{U}^T\mathbf{U}$ a matice $\mathbf{I}$ jsou symetrické, takže je zde nezávislých rovnic tolik, kolik je prvků na diagonále a nad ní, tedy při maticích z $\mathbb{R}^{n\times n}$ jich je dohromady $n(n + 1)/2$. Nejdříve máme n^2 knoflíků (rozměr matice), ale $n(n + 1)/2$ knoflíků je vázáno rovnicemi, takže volných knoflíků zbývá $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$. Pro $n = 2$ máme jeden knoflík (může to být úhel rotace), pro $n = 3$ máme tři knoflíky: úhly otočení podél tří nezávislých os. Pro $n = 4$ je zde šest nezávislých knoflíků.

b) Antisymetrická matice má tolik volných parametrů, kolik je prvků nad diagonálou, jejich počet je $n(n - 1)/2$. Je to stejný výsledek jako v podúkolu (a).

4.12 a) Ověříme, že skalární součiny vektorů každý s každým dávají nulu.

b) Vyřešíme soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kde matice $\mathbf{A}$ obsahuje v řádcích zadané tři vektory. Báze řešení je třeba $\mathbf{y} = (-1, 1, 0, 1)$.

c) (Tento podúkol v aktuální verzi skript chybí. Máme najít ortogonální projektory na podprostory $\mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ a $\mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}^\perp$.) Najdeme ortogonální projekce na podprostory $\mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ a $\mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}^\perp$ (bylo v původní verzi skript). Normalizované vektory, tj. $\mathbf{x}_1/\sqrt{6}$, $\mathbf{x}_2/\sqrt{3}$, $\mathbf{x}_3/\sqrt{3}$ zapíšeme do sloupců matice $\mathbf{U}$. Matice má ortonormální sloupce. Dále do jednosloupcové matice $\mathbf{V}$ zapíšeme normalizovaný $\mathbf{y}/\sqrt{3}$. Projektor na $\mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ je $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$ a na $\mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}^T = \mathrm{span}\{\mathbf{y}\}$ je $\mathbf{V}\mathbf{V}^T$. Ten druhý projektor se pohodlněji počítá (méně výpočtů při maticovém násobení) a vychází

$\mathbf{P}_Y = \frac{1}{3}\mathbf{y}\mathbf{y}^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Projektor $\mathbf{P}_X$ můžeme pak spočítat z právě vypočteného: $\mathbf{P}_X = \mathbf{I} - \mathbf{P}_Y$. Vyhneme se tak maticovému násobení $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$.

4.13 Můžeme volit jakékoli dva na sebe kolmé vektory ve $\mathrm{span}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$. Například první vektor ponecháme a druhý upravíme na $\mathbf{y}'$ tak, aby zůstal ve $\mathrm{span}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, ale byl na $\mathbf{x}$ kolmý. Zvolíme $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - \mathbf{p}$, kde $\mathbf{p}$ je kolmá projekce $\mathbf{y}$ na $\mathrm{span}\{\mathbf{x}\}$, což je $\mathbf{p} = (\mathbf{x}^T\mathbf{y})\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^2 = \frac{5}{2}(0, 1, 1)$. Takže $\mathbf{y}' = (1, 2, 3) - \frac{5}{2}(0, 1, 1) = (1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$. Vektor $\mathbf{y}$ můžeme vynásobit dvěma jen pro formu, abychom měli celočíselný výsledek. Dva kolmé vektory respektující původní span jsou $(0, 1, 1), (2, -1, 1)$.

Poznámka: vzoreček pro výpočet projekce $\mathbf{p}$ můžeme odvodit dvěma způsoby. (1) číslo $c = \mathbf{y}^T\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ je první souřadnice vektoru $\mathbf{y}$ vzhledem ortonormální bázi, kde prvním bázovým vektorem je $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$. To je vlastnost skalárního součinu. Projekce je pak $\mathbf{p} = c\,\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T\mathbf{y})\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^2$

(2) Projekce je $\mathbf{p} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{y}$, když $\mathbf{U}$ je jednosloupcová matice obsahující $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$. Tedy $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{x}^T\mathbf{y})/\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x}^T\mathbf{y})\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^2$.

Jiný způsob řešení: hledá se vektor $\mathbf{y}' = (\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y})$ takový, že $\mathbf{y}' \perp \mathbf{x}$, tedy $(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y})^T\mathbf{x} = 0$. To vede na $\alpha = \frac{-2}{5}$ a $\mathbf{y} = (\frac{-2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{5}) \sim (-2, 1, -1)$.

4.14 Všimneme si, že zadaná matice $\mathbf{A}$ je ortogonální. Takže $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$ a inverzní matice k $\mathbf{A}$ je $\mathbf{A}^T$. Navíc je $\mathbf{A}$ symetrická, takže inverzní matice k $\mathbf{A}$ je v tomto případě $\mathbf{A}$. Jinak řečeno $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$. Nemůže to být projektor, protože pro něj musí platit $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

4.15 $\det\mathbf{A} = \det\mathbf{QR} = \det\mathbf{Q}\det\mathbf{R} = (\pm 1)\cdot\det\mathbf{R} = (\pm 1)\cdot$součin diagonálních prvků matice $\mathbf{R}$.

4.16 Platí $(\operatorname{rng}\mathbf{A})^\perp = \operatorname{Null}\mathbf{A}^T = \operatorname{Null}\mathbf{A}$ (když je $\mathbf{A}$ symetrická) a také $\operatorname{Null}\mathbf{A}^T = \operatorname{Null}(-\mathbf{A}) = \operatorname{Null}\mathbf{A}$ (když je $\mathbf{A}$ antisymetrická).

4.17 Zformulujme zadání mírně jinak, aby dokazovaná ekvivalence dávala větší smysl. Odstraňme předpoklad a dokažme: Sloupce matic $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou ortonormální báze stejného podprostoru právě když $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$ a existuje ortogonální $\mathbf{C}$ tak, že $\mathbf{V} = \mathbf{UC}$.

$\Rightarrow$: $\mathbf{C}$ je matice přechodu od báze v $\mathbf{U}$ k bázi ve $\mathbf{V}$. Dokážeme, že je ortogonílní. Po vynásobení rovnosti $\mathbf{V} = \mathbf{UC}$ maticí $\mathbf{U}^T$ zleva máme $\mathbf{U}^T\mathbf{V} = \mathbf{U}^T\mathbf{UC} = \mathbf{C}$. A platí $\mathbf{C}^T\mathbf{C} = (\mathbf{U}^T\mathbf{V})^T\mathbf{U}^T\mathbf{V} = \mathbf{V}^T\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{V}$. Protože $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$ je ortogonílní projektor do $\operatorname{rng}\mathbf{U} = \operatorname{rng}\mathbf{V}$, každý sloupec matice $\mathbf{V}$ po aplikaci tohoto projektoru zůstane nezměněn, takže $(\mathbf{U}\mathbf{U}^T)\mathbf{V} = \mathbf{V}$. V předchozí rovnosti tedy máme $\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{V}^T(\mathbf{U}\mathbf{U}^T)\mathbf{V} = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$ a matice $\mathbf{C}$ je tudíž ortogonální. Je pochopielně čtverová s počtem řádků rovným dimenzi podprostoru $\operatorname{rng}\mathbf{U}$.

$\Leftarrow$: Báze v $\mathbf{U}$ je ortogonalní, protože se předpokládá $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$. Dále je $\operatorname{rng}\mathbf{V} \subseteq \operatorname{rng}\mathbf{U}$, protože platí maticový součin $\mathbf{V} = \mathbf{UC}$. Ve $\mathbf{V}$ je ortonormální báze, prtože $\mathbf{V}^T\mathbf{V} = (\mathbf{UC})^T\mathbf{UC} = \mathbf{C}^T\mathbf{U}^T\mathbf{UC} = \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{I}$. Je tedy $\dim\operatorname{rng}\mathbf{V} = \dim\operatorname{rng}\mathbf{U}$ a tyto dva podrostory se rovnají.

4.18 a) Pro sloupec $\mathbf{u}_j$ z matice $\mathbf{U}$ platí $1 = \|\mathbf{u}_j\|^2 = u_{1j}^2 + u_{2j}^2 + \cdots + u_{nj}^1$, takže nutně $u_{ij}^2 \leq 1$ a tedy také $|u_{ij}| \leq 1$.

b) Po doplnění matice $\mathbf{U}$ o další ortonormální sloupce tak, aby výslecná matice $\mathbf{V}$ byla čtvercová ortogonální máme matici $\mathbf{V}$, pro níž platí nejen $\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$, ale také $\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}$. Pro i-tý řádek $\mathbf{v}_i$ matice $\mathbf{V}$ tedy platí $\|\mathbf{v}_i\|^2 = 1$. Přitom prvních k prvků tohoto řádku obsahuje elementy řádku $\mathbf{u}_i$ matice $\mathbf{U}$, takže $\|\mathbf{u}_i\|^2 \leq 1$.

4.19 Máme $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1}$ s definičním oborem všech takových matic z $\mathbb{R}^{n\times n}$, pro které má matice $\mathbf{I} + \mathbf{X}$ inverzi.

a) $(\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X}) = \mathbf{I} - \mathbf{X}^2 = (\mathbf{I} + \mathbf{X})(\mathbf{I} - \mathbf{X})$.

b) Vynásobíme výsledek z a) výrazem $(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1}$ zprava i zleva.

c) Ověříme $\mathbf{F}(\mathbf{X})^T\mathbf{F}(\mathbf{X}) \stackrel{?}{=} \mathbf{I}$, tedy $((\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I}-\mathbf{X})^T(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1} = ((\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I}-\mathbf{X}^T-\mathbf{X}+\mathbf{X}^T\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1} = ((\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I}+\mathbf{X}-\mathbf{X}-\mathbf{X}^2)(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1} = ((\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1} = ((\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I}-\mathbf{X}) \stackrel{?}{=} \mathbf{I}$. Protože $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$, je možné vynásobit poslední rovnost výrazem $(\mathbf{I}+\mathbf{X}^T)$ zleva a ptát se tedy na $(\mathbf{I}-\mathbf{X}) \stackrel{?}{=} (\mathbf{I}+\mathbf{X}^T)$ a to je pravda, protože $\mathbf{X}$ je antisymetrická. Korektní vedení důkazu nyní musí proběhnout obráceně: vyjdeme z faktu $(\mathbf{I}-\mathbf{X}) = (\mathbf{I}+\mathbf{X}^T)$ a postupnými úpravami v protisměru slova „tedy“ dostaneme dokazované tvrzení $\mathbf{F}(\mathbf{X})^T\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}$.

d) Ověříme $((\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})^T = ((\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I}-\mathbf{X}^T) \stackrel{?}{=} -(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1}$, tedy ověříme po vynásobení $(\mathbf{I}+\mathbf{X})$ zprava tvrzení $((\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I}-\mathbf{X}^T)(\mathbf{I}+\mathbf{X}) = (\mathbf{I}+\mathbf{X}^T)^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{X}^T+\mathbf{X}-\mathbf{X}^T\mathbf{X}) = (\mathbf{I}+\mathbf{X}^T)^{-1}(-\mathbf{X}^T+\mathbf{X}) \stackrel{?}{=} -(\mathbf{I}-\mathbf{X}) = \mathbf{X}-\mathbf{I}$, tedy po vynásobení $(\mathbf{I}+\mathbf{X}^T)$ zleva ověřujeme $-\mathbf{X}^T+\mathbf{X} \stackrel{?}{=} (\mathbf{I}+\mathbf{X}^T)(\mathbf{X}-\mathbf{I}) = \mathbf{X}-\mathbf{I}+\mathbf{X}^T\mathbf{X}-\mathbf{X}^T = \mathbf{X}-\mathbf{I}+\mathbf{I}-\mathbf{X}^T = -\mathbf{X}^T+\mathbf{X}$. To zřejmě platí. Korektní vedení důkazu začíná poslední zřejmou rovností a jde v protisměru slov „tedy“ až k závěru, že $(\mathbf{F}(\mathbf{X}))^T = -\mathbf{F}(\mathbf{X})$.

e) Ověříme $\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{X})) \stackrel{?}{=} \mathbf{X}$, tedy $(\mathbf{I}-(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})(\mathbf{I}+(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})^{-1} \stackrel{?}{=} \mathbf{X}$. Po vynásobení $(\mathbf{I}+(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1})$ zprava tedy ověřujeme $\mathbf{I}-(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1} \stackrel{?}{=} \mathbf{X}(\mathbf{I}+(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1}) = \mathbf{X}+\mathbf{X}(\mathbf{I}-\mathbf{X})(\mathbf{I}+\mathbf{X})^{-1}$ a po vynásobení $(\mathbf{I}+\mathbf{X})$ zprava tedy ověříme $(\mathbf{I}+\mathbf{X})-(\mathbf{I}-\mathbf{X}) \stackrel{?}{=} \mathbf{X}(\mathbf{I}+\mathbf{X})+\mathbf{X}(\mathbf{I}-\mathbf{X})$. Na obou stranách rovnosti máme $2\mathbf{X}$, takže to platí. Důkaz dále vedeme obráceně, tj. vyjdeme z faktu $2\mathbf{X} = 2\mathbf{X}$ a dojdeme k tvrzení, že $\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{X})) = \mathbf{X}$.

Kapitola 5

5.1 Má řešení ve skriptech.

5.2 Toto je typický příklad přeurčené soustavy bez řešení (zkuste eliminovat na papíře, zjistíte, že to nemá řešení). Vložte matici $\mathbf{A}$ a vektor pravých stran $\mathbf{b}$ do Matlabu a zkuste tři metody výpočtu řešení ve smyslu nejmenších čtverců. a) pomocí matlabské operace zpětné lomítko: `A\b`, b) přímým řešení normálních rovnic, vzorec (5.4) ve skriptech: `(A'*A)^-1 * A' * b` a konečně, c) QR rozkladem, tj. podle vzorce (5.9): `[Q R] = rq(A,0); R^-1 * Q' * b`. Ve všech případech dostaneme stejné řešení. Komická hodnota `-0.0000` ve výsledku naznačuje, že Matlab má smysl pro humor.

5.3 a) Minimalizujeme $\sum \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|^2$ při daných $\mathbf{a}_i$. To odpovídá přeurčené soustavě nehomogenních rovnic

$$\begin{matrix} \mathbf{x} = \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{x} = \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x} = \mathbf{a}_m \end{matrix} \qquad \text{tedy} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \vdots \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$$

a $\mathbf{x}$ je řešení dle metody nejmenších čtverců. Vynásobením zleva transponovanou maticí soustavy $[\mathbf{I} \quad \mathbf{I} \quad \cdots \quad \mathbf{I}]$ (tj. převedením na normální rovnice) máme $m\,\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_m$ a odtud vidíme, že $\mathbf{x}$ musí být těžiště zadaných bodů $\mathbf{a}_i$.

b) Hledáme $t \in \mathbb{R}$ tak, že bod $\mathbf{a} + t\mathbf{s}$ minimalizuje vzdálenost od $\mathbf{y}$, tedy

$$\min \|\mathbf{a} + t\mathbf{s} - \mathbf{y}\|^2 = \min(a_1 + ts_1 - y_1)^2 + (a_2 + ts_2 - y_2)^2 + \cdots + (a_n + ts_n - y_n)^2.$$

To je úloha nejmenších čtverců pro přeurčenou soustavu n rovnic s jednou proměnnou t ve tvaru $\mathbf{s}\,t = (\mathbf{y} - \mathbf{a})$. Matice soustavy je tedy jednosloupcová $\mathbf{P} = \mathbf{s}$, pravá strana je $\mathbf{q} = \mathbf{y} - \mathbf{a}$. Normální rovnice zní $\mathbf{s}^T\mathbf{s}\,t = \mathbf{s}^T(\mathbf{y} - \mathbf{a})$ a řešení je $t = \mathbf{s}^T(\mathbf{y} - \mathbf{a})/\|\mathbf{s}\|^2$. Po dosazení tohoto výsledku do hledané vzdálenosti máme hodnotu minima

$$\left\| \mathbf{a} + \frac{\mathbf{s}^T(\mathbf{y} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{s}\|^2}\,\mathbf{s} - \mathbf{y} \right\| = \left\| (\mathbf{a} - \mathbf{y}) - \frac{\mathbf{s}\,\mathbf{s}^T}{\|\mathbf{s}\|^2}\,(\mathbf{y} - \mathbf{a}) \right\| = \left\| \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{s}\,\mathbf{s}^T}{\|\mathbf{s}\|^2} \right) (\mathbf{y} - \mathbf{a}) \right\|.$$

Vidíme tedy, že výsledek se schoduje s výsledkem, který získáme jako velikost rejekce bodu $\mathbf{y} - \mathbf{a}$ vzhledem k přímce $t\,\mathbf{s}$, tedy $\|(\mathbf{I} - \mathbf{U}\mathbf{U}^T)(\mathbf{y} - \mathbf{a})\|$, kde $\mathbf{U} = \mathbf{s}/\|\mathbf{s}\|^2$, tedy matice s jedním ortonormálním sloupcem.

c) Hledání vzdálenosti dvou mimoběžek $\mathbf{a}_1 + t\,\mathbf{s}_1$ a $\mathbf{a}_2 + v\,\mathbf{s}_2$, $t, v \in \mathbb{R}$, vede na úlohu nejmenších čtverců pro přeurčenou soustavu se dvěma neznámými t, u ve tvaru $\mathbf{a}_1 + t\,\mathbf{s}_1 = \mathbf{a}_2 + v\,\mathbf{s}_2$. Hledáme tedy $\min \|\mathbf{a}_1 + t\,\mathbf{s}_1 - (\mathbf{a}_2 + v\,\mathbf{s}_2)\|^2$. Argumentace je stejná, jako v předchozí úloze b). Soustavu zapíšeme ve tvaru $\mathbf{P}\mathbf{u} = \mathbf{q}$, tedy $[\mathbf{s}_1 \; -\mathbf{s}_2] \left[\begin{smallmatrix} t \\ v \end{smallmatrix}\right] = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$. Matice soustavy má dva sloupce. Převod na normální rovnici vede na

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T \\ -\mathbf{s}_2^T \end{bmatrix} [\,\mathbf{s}_1 \quad -\mathbf{s}_2\,] \begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T \\ -\mathbf{s}_2^T \end{bmatrix} (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1), \quad \text{tedy} \quad \begin{bmatrix} \|\mathbf{s}_1\|^2 & -\mathbf{s}_1^T\mathbf{s}_2 \\ -\mathbf{s}_1^T\mathbf{s}_2 & \|\mathbf{s}_2\|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T\,(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \\ \mathbf{s}_2^T\,(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \end{bmatrix}.$$

d) Každá přímka má svou nezávislou proměnnou, tedy lépe je přímky vymezit jako $\{\mathbf{a}_i + t_i\mathbf{s}_i;\ t_i \in \mathbb{R}\}$. Máme přeučenou soustavu $\mathbf{y} = \mathbf{a}_i + t_i\mathbf{s}_i$ pro $i = 1, \ldots, m$. Soustava má mn rovnic a neznámé jsou y_j, t_i pro $j = 1, \ldots, n$ a $i = 1, \ldots, m$. Maticově to můžeme zapsat jako

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{s}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \vdots & \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{s}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}.$$

e) Vzdálenost bodu $\mathbf{y}$ od i-té nadroviny je $\frac{|\mathbf{a}_i\mathbf{y}-b|}{\|a_i\|}$. My bychm chtěli, aby součet čtverců těchto vdáleností byl minimální, což odpovídá řešení přeurčené soustavy $(\mathbf{a}_i/\|\mathbf{a}_i\|)\,\mathbf{y} - b\,/\,\|\mathbf{a}_i\| = \mathbf{0}$ pro $i = 1,\ldots,m$ ve smyslu nejmenších čtverců. Maticový zápis této soustavy zní:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1/\|\mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m/\|\mathbf{a}_m\| \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} b/\|\mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ b/\|\mathbf{a}_m\| \end{bmatrix}$$

f) Vezmeme v úvahu $n-1$ proměnných y_i takových, že $y_i = x_{i+1} - x_i$, tedy určují vzdálenosti sousedních bodů. Pak je $d_{ij} = y_i + \cdots + y_{j-1}$. Z jednoho měření pak máme jednu rovnici (možná) přeurčené soustavy s pravou stranou d_{ij}. Matice soustavy obsahuje jen nuly a jedničky, konrétněji na řádku s pravou stranou d_{ij} je souvislý sled jedniček začínající slupcem i a končící sloupcem $j-1$. Matice má $n-1$ sloupců a řádků tolik, kolik bylo provedeno měření.

Provedeme-li všechna měření $d_{i,i+1}$ pro $i = 1,\ldots,n-1$ a případně některá další, máme záruku lineární nezávislosti sloupců matice soustavy a řešení této (případně) přeurčené soustavy ve smyslu nejmenších čtverců pak kompenzuje možné chyby jednotlivých měření.

Výše jsem uvedl postačující podmínku lineární nezávislsti sloupců. Ekvivalentní podmínku linenární nezávislosti sloupců matice můžeme zformulovat takto. Uvažme neorientovaný graf s vrcholy x_i a hranami ohodnocenými $d_{i.j}$. Existuje-li v něm podgraf se stejnými vrcholy, který je souvislý a bez cyklů (strom), pak jsou sloupce lineárně nezávislé. Skutečně, z údajů tohoto podgrafu můžeme jednoznačně určit jakoukoli vzdálenost d_ij: vydáme se po cestě od x_i k x_j a sčítáme/odčítáme hodnoty hran (odčítáme právě tehdy, když cesta spojuje x_j s x_i, kde $j > i$). Počet hran zmíněného podgrafu je $n-1$, takže lineární nezávislost sloupců nám zaručí $n-1$ nějakých měření, které odpovídají hranám tohoto podgrafu.

g) Všechny naměřené vzorky (G_i, S_i, P_i) pro $i \in \{1,\ldots,n\}$ mají vyhovovat rovnostem

$$P_i = G_i(a_1 + a_2S_i + a_3 10^{G_i+S_i} + a_4 10^{-S_i})$$

což je pro $n > 4$ přeurčená nehomogenní soustava s neznámými a_1, a_2, a_3, a_4 , kterou chceme řešit ve smyslu nejmenších čtverců. Jednotlivé řádky matice soustavy včetně odpovídajícího údaje ze sloupce pravých stran jsou:

$$[\, G_i \quad G_iS_i \quad G_i\,10^{G_i+S_i} \quad G_i\,10{-}S_i \quad | \quad P_i \,]$$

Matice soustavy (bez sloupce pravých stran) má n řádků a čtyři sloupce. Úkolem pak je z naměřených dat vytvořit tuto matici a sloupec pravých stran, vložit údaje do počítače a provést `A\b`. Tím dostaneme odhad hodnot a_1, a_2, a_3, a_4.

h) Máme konečnou posloupnost známých údajů $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a chceme predikovat údaj p_{n+1} pomocí vzorce $p_{n+1} = \beta_1 + \beta_2 p_n + \beta_3 p_{n-1}$. K tomu účelu musíme nejprve odhadnout $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ze známých hodnot $p_1, p_2, \ldots, p_n$ jako řešení přeurčené soustavy s maticí a sloupcem pravých stran:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & p_2 & p_1 \\ 1 & p_3 & p_2 \\ 1 & p_4 & p_3 \\ & \vdots & \\ 1 & p_{n-1} & p_{n-2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

Vyřešením této přeurčené soustavy (pro $n > 5$) ve smyslu nejmenších čtverců dostaneme odhady $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, které požijeme ve vzorci pro predikci.

5.4 Je potřeba si rozmyslet, že maticové násobení funguje takto:

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sum_j a_{1j}x_j - b_1 \\ \sum_j a_{2j}x_j - b_2 \\ \vdots \\ \sum_j a_{mj}x_j - b_m \end{bmatrix}, \quad \text{takže} \quad \sqrt{\mathbf{W}}\,(\mathbf{A} - \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1}\,(\sum_j a_{1j}x_j - b_1) \\ \sqrt{w_2}\,(\sum_j a_{2j}x_j - b_2) \\ \vdots \\ \sqrt{w_m}\,(\sum_j a_{mj}x_j - b_m) \end{bmatrix}$$

Promyslete si to, projděte si to podrobně nad rozepsanými maticemi. Symbolem $\sqrt{\mathbf{W}}$ je označena matice $\operatorname{diag}(\sqrt{w_1},\dots,\sqrt{w_n})$, což je čtvercová matice rozměru $n\times n$, která obsahuje na diagonále uvedené prvky a mimo ní jsou nuly. Platí $\sqrt{\mathbf{W}}\,\sqrt{\mathbf{W}}=\mathbf{W}$.

Dále zjevně platí, že $\|\sqrt{\mathbf{W}}\,(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})\|^2 = f(\mathbf{x})$ ze zadání příkladu. Minimalizuje se tedy $\|\sqrt{\mathbf{W}}\,\mathbf{Ax}-\sqrt{\mathbf{W}}\,\mathbf{b}\|^2$. Optimální řešení je řešení soustavy $\sqrt{\mathbf{W}}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\sqrt{\mathbf{W}}\,\mathbf{b}$ ve smyslu nejmenších čtverců. Soustava normálních rovnic (5.4) je v naší úloze $\mathbf{A}^T\sqrt{\mathbf{W}}^T\sqrt{\mathbf{W}}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{A}^T\sqrt{\mathbf{W}}^T\sqrt{\mathbf{W}}\,\mathbf{b}$, stručněji $\mathbf{A}^T\mathbf{W}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{A}^T\mathbf{W}\,\mathbf{b}$. Pseudoinverzi si zapište sami.

5.5 Využijeme věty $\operatorname{rng}\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\operatorname{rng}\mathbf{A}^T$, $\operatorname{Null}\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\operatorname{Null}\mathbf{A}$:

$$(\operatorname{rng}\mathbf{A})^\perp=(\operatorname{rng}\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^\perp=(\operatorname{rng}\mathbf{A}^T\mathbf{A})^\perp=\operatorname{Null}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T=\operatorname{Null}\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\operatorname{Null}\mathbf{A}\,.$$

5.6 Řešením je nulový vektor, protože pravá strana normálních rovnic je $\mathbf{A}^T\mathbf{b}=\mathbf{0}$ a matice soustavy normálních rovnic $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je regulární. Má tedy jediné řešení a tím je nulové řešení. Geometricky (hleděním na obrázek): kolmá projekce vektoru $\mathbf{b}$ ležícím v $\operatorname{Null}\mathbf{A}^T$ je počátek.

5.7 Projektor $\mathbf{P}=\frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ je čtvercová matice z $\mathbb{R}^{n\times n}$. K jejímu výpočtu potřebujeme řádově n^2 operací a dále k výpočtu samotné projekce potřebujeme taky řádově n^2 operací. Když ale spočítáme projekci vektoru $\mathbf{b}$ přímo ze skalárního součinu $\frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}(\mathbf{a}^T\mathbf{b})\mathbf{a}$, potřebujeme k výpočtu řádově n operací. K tomuto vzorci dojdeme také z asociativity maticového násobení a z možnosti vytknout konstantu $(\mathbf{a}^T\mathbf{b})$ před matici $\mathbf{a}$, tedy: $\mathbf{Pb}=\frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}(\mathbf{a}\mathbf{a}^T)\mathbf{b}=\frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}(\mathbf{a}^T\mathbf{b})=\frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}(\mathbf{a}^T\mathbf{b})\mathbf{a}$.

5.8 c,d) Na to se dá jít různými cestami, my využijeme vzoreček o projektoru. Kdyby matice $\mathbf{A}$ měla ve sloupcích zadané vektory $\mathbf{u},\mathbf{v}$, a vektor $(2,0,1)$ označíme $\mathbf{z}$, pak projekce $\mathbf{z}$ na $\operatorname{rng}\mathbf{A}$ (neboli odpověď na otázku c) je $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{z}$ a projekce na kolmý doplněk (odpověď na otázku d) je $(\mathbf{I}-\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T)\mathbf{z}$. Jenže, to je zbytečně moc počítání.

Najdeme raději bázi podprostoru $\operatorname{span}\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}^\perp$ vyřešením soustavy $\mathbf{A}^T\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Ta báze obsahuje jediný vektor, například $\mathbf{b}=(2,5,3)$. Nyní projekce na kolmý doplněk (odpověď d) je

$$\mathbf{d}=\mathbf{b}\,(\mathbf{b}^T\mathbf{b})^{-1}\mathbf{b}^T\mathbf{z}=\frac{1}{\|\mathbf{b}\|^2}\mathbf{b}(\mathbf{b}^T\mathbf{z})=\frac{\mathbf{b}^T\mathbf{z}}{\|\mathbf{b}\|^2}\,\mathbf{b}=\frac{7}{38}(2,5,3).$$

Projekci na $\operatorname{span}\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$, (tedy řešení d) spočítáme jako $\mathbf{z}-\mathbf{d}=\frac{1}{38}(62,-35,17)$.

5.9 Je účelnější začít výpočtem projektoru na podprostor s menší dimenzí, tedy v tomto případě na podprostor $X^\perp=\operatorname{span}\{(0,1,0,0)\}$. Zde jsme generátor podprostoru $X^\perp$ našli vyřešením příslušné homogenní soustavy rovnic. Matice $\mathbf{U}$ s jedním sloupcem $(0,1,0,0)$ má ortonormální sloupec, takže $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$ je projektor na X^T. Je to matice s nulami všude, jen s jedinou jedničkou na pozici $(2,2)$. Projektor na X je pak $\mathbf{I}-\mathbf{U}\mathbf{U}^T=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$. Ke stejnému výsledku dospějeme, vložíme-li zadané tři vektory generující X do sloupců matice $\mathbf{V}$ (tyto vektory tvoří v tomto konkrétním příkladě ortonormální bázi) a vypočítáme $\mathbf{V}\mathbf{V}^T$.

5.10 Je $\operatorname{Null}\mathbf{A}=\operatorname{span}\{(-2,1,0)\}$. Při označení $\mathbf{z}=(1,1,1)$, $\mathbf{a}=(-2,1,0)$ je (b) projekce vektoru $\mathbf{z}$ na $\operatorname{Null}\mathbf{A}$ rovna $\mathbf{x}=(\mathbf{a}^T\mathbf{z})/(\mathbf{a}^T\mathbf{a})\mathbf{a}=-1/5\,(-2,1,0)=(2/5,-1/5,0)$. Dále (c) projekci vektoru $\mathbf{z}$ na kolmý doplněk $\operatorname{rng}\mathbf{A}^T$ (označíme ji $\mathbf{y}$) spočítáme z rovnosti $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{z}$, tedy $\mathbf{y}=(1,1,1)-(2/5,-1/5,0)=(3/5,6/5,1)$. Dále je $\operatorname{Null}\mathbf{A}^T=\operatorname{span}\{(1,0,-1)\}$ a při označení $\mathbf{a}=(1,0,-1)$ je (d) projekce vektoru $\mathbf{z}$ na $\operatorname{Null}\mathbf{A}^T$ rovna $\mathbf{x}=(\mathbf{a}^T\mathbf{z})/(\mathbf{a}^T\mathbf{a})\mathbf{a}=0\,\mathbf{a}=(0,0,0)$. Konečně (a) projekce vektoru $\mathbf{z}$ na kolmý doplněk je $\mathbf{y}=\mathbf{z}-\mathbf{x}=\mathbf{z}-\mathbf{0}=\mathbf{z}=(1,1,1)$.

5.11 Projektor $\mathbf{P}$ promítá do $\operatorname{rng}\mathbf{P}$. Navíc musí platit, že všechny vekotry z $\operatorname{rng}\mathbf{P}$ se nezmění při další alikaci zobrazení $\mathbf{P}$. Je-li $\mathbf{P}$ regulární, pak $\operatorname{rng}\mathbf{P}=\mathbb{R}^n$ a všechny vektory z $\mathbb{R}^n$ se znezmění při další aplikaci $\mathbf{P}$. To je možné jen pro $\mathbf{P}=\mathbf{I}$. Matice $\mathbf{A}$ ve vzorci (5.10) musí být čtvercová reulární. Geometricky: máme projekci, která s žádným bodem nepohne. Množina obrazů této projekce je totis rovna $\mathbb{R}^n$.

5.12 Označíme-li $\mathbf{P}$ projektor na $\operatorname{rng}\mathbf{A}^T$. Pak hledaný projektor na $\operatorname{Null}\mathbf{A}$ je $\mathbf{I}-\mathbf{P}$. Přitom víme, že $\mathbf{P}=\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\mathbf{A}$ je projektor na $\operatorname{rng}\mathbf{A}^T$ (všechny výskyty $\mathbf{A}^T$ jsme nahradili $\mathbf{A}$ a obráceně ve vzorci pro projektor na $\operatorname{rng}\mathbf{A}$). Výsledek pak je $\mathbf{I}-\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\mathbf{A}$.

5.13 Označme $\mathbf{B}$ matici, která má ve sloupcích jinou bázi téhož podprostoru rng $\mathbf{A}$. Pak existuje regulární matice přechodu $\mathbf{C}$ tak, že $\mathbf{B} = \mathbf{AC}$. Nechť $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$ a $\mathbf{P}' = \mathbf{B}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T$. Ukážeme, že $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$.

$$\mathbf{P}' = \mathbf{AC}\,((\mathbf{AC})^T\mathbf{AC})^{-1}(\mathbf{AC})^T = \mathbf{AC}\,(\mathbf{C}^T\mathbf{A}^T\mathbf{AC})^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{A}^T =$$
$$= \mathbf{ACC}^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{P}.$$

Využili jsme známého faktu $(\mathbf{XY})^{-1} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}^{-1}$. Jednotliví činitélé ve vzorci ovšem musejí být regulární matice, což tedy matice $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, $\mathbf{C}^T$ splňují.

5.14 Obecně neplatí. Protipříklad: Vezmeme v $\mathbb{R}^2$ ortogonální projektor na osu y, t.j. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0\ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a dále ortogonání projektor na přímku $y = x$, tj. $\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1\ 1] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Pak je sice rng $\mathbf{PQ}$ osa y, ale není to ortogonální projektor. Je totiž $\mathbf{PQ} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ což není symetrická matice a navíc $\mathbf{PQPQ} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, takže to není ani obecný projektor. Geometricky: $\mathbf{PQ}$ vezme bod, kolmo ho promítne na přímku $y = x$ a pak tento výsledek kolmo promítne do osy y. Projde-li touto konverzí bod již ležící na ose y, jeho vzdálenost k počátku se dvakrát zmenší. Nakreslete si k tomu obrázek.

5.15 a) Nechť projektor $\mathbf{P}$ kolmo zobrazuje na rng $\mathbf{U}$, kde $\mathbf{U}$ je s ortonormálními sloupci. Matici $\mathbf{U}$ najdeme tak, že najdeme ortonormální bázi rng $\mathbf{P}$. Pak je $\mathbf{P} = \mathbf{UU}^T$. Označíme i-tý řádek matice $\mathbf{U}$ znakem $\mathbf{u}_i^T$. Pak $p_{ij} = \mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_j$. Podle cvičení 4.19 b) je $\|\mathbf{u}_i\| \leq 1$. Takže $|p_{ij}| = \|\mathbf{u}_i\|\,\|\mathbf{u}_j\|\,|\cos\alpha| \leq \|\mathbf{u}_i\|\,\|\mathbf{u}_j\| \leq 1$.

b) Je $p_{ii} = \mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i \geq 0$ (značení je jako v podúkolu a).

5.16 Nejdříve vyřešíme podúlohy (e)-(g), které jsou jednodušší díky ortonormalitě sloupců matice $\mathbf{U}$. Problémy (f)-(h) budeme navíc řešit od konce – nejprve (h) a z toho vše ostatní plyne.

e) Je to vzdálenost bodu $\mathbf{v}$ od jeho kolmé projekce na rng $\mathbf{U}$, tedy od bodu $\mathbf{UU}^T\mathbf{v}$. Vzdálenost je $\|\mathbf{v} - \mathbf{UU}^T\mathbf{v}\| = \|(\mathbf{I} - \mathbf{UU}^T)\mathbf{v}\|$.

h) Nechť $\mathbf{p}$ je partikulární (tj. nějaké) řešení soustavy $\mathbf{U}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$, takže leží v zadaném afinním podprostoru. Kolmý doplněk k tomuto podprostoru je $X = \operatorname{rng}\mathbf{U}$. Na X kolmo promítneme jednak $\mathbf{p}$ (je to $\mathbf{UU}^T\mathbf{p}$) a jednak zadaný bod $\mathbf{v}$. Dostaneme $\mathbf{UU}^T\mathbf{v}$. Vzdálenost $\mathbf{v}$ od daného afinního podprostoru je stejná jako vzdálenost těch dvou projekcí, takže počítáme

$$\|\mathbf{UU}^T\mathbf{v} - \mathbf{UU}^T\mathbf{p}\| = \|\mathbf{U}(\mathbf{U}^T\mathbf{v} - \mathbf{U}^T\mathbf{p})\| = \|\mathbf{U}(\mathbf{U}^T\mathbf{v} - \mathbf{b})\| = \|\mathbf{U}^T\mathbf{v} - \mathbf{b}\|.$$

Předposlední rovnost plyne z faktu, že $\mathbf{p}$ je partikulární řešení soustavy $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}$ a poslední rovnost plyne z toho, že zobrazení $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ux}$ je izometrie.

g) Vzorec z (h) přechází při $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ na $\|\mathbf{U}^T\mathbf{v}\|$.

f) Vzorec z (h) přechází při $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ na $\|\mathbf{b}\|$.

Teď pojďme na podúlohy (a)-(d). Vyjdeme z řešení nejobecnější úlohy, označme ji jako (x). Ostatní úlohy pak vyřešíme tak, že obecné řešení upravíme na konkrétní případ. To matematici rádi dělají.

x) Najdeme vzdálenost bodu $\mathbf{v}$ od afinního prostoru $\{\mathbf{x};\ \mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$. Budeme postupovat analogicky jako v řešení předchozího cvičení. V tomto cvičení jsme hledali vzdálenost vektoru $\mathbf{v}$ od množiny $\{\mathbf{x}; \mathbf{U}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$, použili jsme projekce partikulárního řešení $\mathbf{p}$ a zadaného $\mathbf{v}$ na rng $\mathbf{U}$ a vzdálenost těch dvou projekcí jsme spočítali. Nyní máme místo $\mathbf{U}^T$ ($\mathbf{U}^T$ měla ortonormální řádky) matici $\mathbf{A}$ (jen s lin. nezávislými řádky). Potřebujeme ty dva vektory kolmo promítnout do rng $\mathbf{A}$. Projektor na tento podprostor je $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$, jak víme z teorie k této kapitole. Hledáme tedy vzdálenost projekce zadaného vektoru $\mathbf{v}$ od projekce partikulárního řešení $\mathbf{p}$ v rng $\mathbf{A}$:

$$\|\text{proj.}\mathbf{v} - \text{proj.}\mathbf{p}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{v} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{p}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\,(\mathbf{A}^T\mathbf{v} - \mathbf{b})\| =$$

$$= \sqrt{(\mathbf{A}^T\mathbf{v} - \mathbf{b})^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\,(\mathbf{A}^T\mathbf{v} - \mathbf{b})} = \sqrt{(\mathbf{A}^T\mathbf{v} - \mathbf{b})^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\,(\mathbf{A}^T\mathbf{v} - \mathbf{b})}$$

b) V terminologii podúlohy x) je $\mathbf{a} = \mathbf{A}$ a $b = \mathbf{b}$, takže druhá mocnina hledané vzdálenosti je $\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = b(\mathbf{a}^T\mathbf{a})^{-1}b = b^2/\|\mathbf{a}\|^2$ a vzdálenost je $\sqrt{b^2/\|\mathbf{a}\|^2} = |b|/\|\mathbf{a}\|$.

c) Vzdálenost množiny $\{\mathbf{x}; \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ od počátku získáme z obecného vzorce x) nahrazením $\mathbf{v}$ nulovým vektorem a přeznačkováním $\mathbf{A}^T \leftarrow \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{A}^T$. Protože $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, je také $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dostáváme $\sqrt{\mathbf{b}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\,\mathbf{b}}$.

d) Vzdálenost bodu $\mathbf{v}$ od nadroviny $\{\mathbf{x}; \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\}$ získáme použitím obecného vzorce z úlohy x), kde $\mathbf{A} = \mathbf{a}^T$, tedy

$$\sqrt{(\mathbf{a}^T\mathbf{v} - b)^T(\mathbf{a}^T\mathbf{a})^{-1}\,(\mathbf{a}^T\mathbf{v} - b)} = \sqrt{\frac{(\mathbf{a}^T\mathbf{v} - b)^2}{\|\mathbf{a}\|^2}} = \frac{|\mathbf{a}^T\mathbf{v} - b|}{\|a\|}$$

Poznámka. Ještě připojím důležitou poznámku o projekcích na lineární podprostor daný jako rng $\mathbf{A}$, což je popsáno v §5.2. Na výpočet projekce/projektoru jsou ve skriptech dva vzorce: jednak obecný vzorec (5.10) který funguje pro libovolnou matici $\mathbf{A}$ s lineárně nezávislými sloupci, a jednak (5.15) který funguje jen když matice $\mathbf{A}$ má ortonormální sloupce, tedy $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (v dřívějších verzích skript byla v tomto případě matice $\mathbf{A}$ značena písmenem $\mathbf{U}$). Další (ale poněkud nešikovná) možnost je použít vždy vzorec (5.15) s tím, že na matici $\mathbf{A}$ nejprve použijeme QR rozklad a vezmeme místo $\mathbf{A}$ matici $\mathbf{Q}$. Nepřehlédněte to, prosím, v písemce se to může s vysokou pravděpodobností vyskytnout.

5.17 $\left\|\begin{bmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{bmatrix}\right\|^2 = \begin{bmatrix}\mathbf{a}^T & \mathbf{b}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{bmatrix} = \mathbf{a}^T\mathbf{a} + \mathbf{b}^T\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2$.

Kapitola 6

6.1

	polynom	počet proměnných	stupeň	homogenní
a)	+	2	3	−
b)	+	n	1	+
c)	−	n		
d)	+	n	2	−
e)	+	$2n$	2	+
f)	+	n^2	1	+
g)	+	n^2	n	+

Toto je jednoduché cvičení na terminologii polynomů více proměnných. Sami si rozmyslete odpovědi na zadané otázky a pak to srovnejte se zde uvedenou tabulkou.

Případ c) není polynom, protože je to odmocnina z polynomu. Případ g) vás přinutí vzpomenout si na definici determinantu vzorcem, ve kterém je jistá suma součinů prvků x_{ij}, přičemž těch činitelů je v každém součinu stejný počet: n.

6.2 Toto je opakování na počítání vlastních čísel a vlastních vektorů matic. Charakteristický polynom $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ je pro první matici roven $\lambda^2+2\lambda-1$ a jeho kořeny (tedy vlastní čísla matice) jsou $-1\pm\sqrt{2}$. Dosadíme-li do vzorce $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}=\mathbf{0}$ první kořen, dostáváme homogenní soustavu s maticí $[2-\sqrt{2}\;\; 2 \mid 0]$ a vlastní vektor příslušející prvnímu vlastnímu číslu tedy je například $(2,\sqrt{2}-2)$. Vlastní vektor příslušející druhému vlastnímu číslu je $(-2,2+\sqrt{2})$.

Výsledky pro druhou matici: $\lambda_1=2$. $\mathbf{v}_1=(2,1)$, $\lambda_2=-1$, $\mathbf{v}_2=(1,-1)$.

Matlab má funkci `eig()`, která vrátí vlastní čísla. Celý spektrální rozklad matice `A` získáme pomocí `[V D] = eig(A)`.

6.3 Hledaná rovnice je $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$, v tomto konkrétním případě $-\lambda^3+2\lambda^2+14\lambda+8=0$. Protože je matice symetrická, má tato rovnice reálné kořeny, které v našem případě počítáme raději numericky, protože algebraický vzoreček (Cardanovy vzorce na řešení kubických rovnic) není příliš praktický. Na kořeny se v zadání nikdo neptal, ale kdyby to někoho zajímalo, tady jsou jejich přibližné hodnoty: $x_1\doteq-2{,}4196$; $x_2\doteq-0{,}65194$; $x_3\doteq 5,07154$ (použil jsem počítač).

6.4 Nulová matice má n vlastních čísel, všechny jsou nuly, vlastní vektory jsou jakékoli nenulové. Jednotková matice má vlastní čísla jedničky, vlastní vektory jsou libovolné nenulové. Obojí plyne přímo z definičního vzorce $\mathbf{A}\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$.

Diagonální i trojúhelníková matice mají vlastní čísla uvedené na diagonále této matice jak plyne z charakteristického polynomu $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$. Má-li diagonální matice všechny diagonální prvky různé, pak i-tému vlastnímu číslu přísluší vlastní vektor $\mathbf{e}_i$ (všude nuly, jen v i-té složce je jednička). U trojúhelníkové matice není pro vlastní vektor přímý výsledek, je nutno jej spočítat dosazením do vzorce $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}=\mathbf{0}$.

6.5 Víme, že $\mathbf{A}\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$. Vlastní čísla a vektory matice $\mathbf{A}+\alpha\mathbf{I}$ označíme $\tilde{\lambda}$ a $\tilde{\mathbf{v}}$. Pro ně platí z definice $(\mathbf{A}+\alpha\mathbf{I})\tilde{\mathbf{v}}=\tilde{\lambda}\tilde{\mathbf{v}}$. Po úpravě je $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}=(\tilde{\lambda}-\alpha)\tilde{\mathbf{v}}$, takže $\tilde{\mathbf{v}}=\mathbf{v}$ a $\tilde{\lambda}-\alpha=\lambda$. Z poslední rovnosti máme $\tilde{\lambda}=\lambda+\alpha$. Vlastní číslo se zvěší o α a vlastní vektor k němu je stejný.

6.6 Předpokládáme $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$. Vynásobíme rovnici maticí $\mathbf{B}$ zleva: $\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{v}=\lambda\mathbf{B}\mathbf{v}$. Při volbě $\mathbf{w}=\mathbf{B}\mathbf{v}$ máme $\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{w}=\lambda\mathbf{w}$, takže λ je též vlastním číslem matice $\mathbf{B}\mathbf{A}$ s vlastním vektorem $\mathbf{w}$, jenž je nenulový. Kdyby totiž byl nulový, pak první rovnice v předpokladu zní $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{v}=\mathbf{A}\mathbf{o}=\lambda\mathbf{v}$, takže by muselo být $\mathbf{o}=\lambda\mathbf{v}$. To ale není možné, neboť (dle zadání) předpokládáme $\lambda\neq 0$ a $\mathbf{v}\neq\mathbf{o}$.

6.7 Důkaz první rovnosti je podrobně uveden v řešení ve skriptech. Druhá rovnost se dokazuje analogicky: $\operatorname{tr}\mathbf{A}=\operatorname{tr}\mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{V}^T=\operatorname{tr}\boldsymbol{\Lambda}\,\mathbf{V}^T\mathbf{V}=\operatorname{tr}\boldsymbol{\Lambda}=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$. Využili jsme zde cykličnosti stopy.

6.8 Připomeňme, že definitnost matic je definována jen pro symetrické matice. To všechny matice zadané v tomto cvičení splňují.

Definitnost určíme ideálně pomocí hlavních minorů nebo vlastních čísel. Symetrickou Gaussovu eliminaci předvedeme jen na úloze (g) s poznámkou, že pro zjišťování definitinosti strojem je velmi výhodná, ale pro zjišťování definitinosti na papíře moc praktická není, neboť se člověk skoro vždy utopí v počítání se zlomky.

Matice (b) má vlastní čísla 1 a 3, obě jsou kladná, tj. je pozitivně definitní. Také všechny vůdčí hlavní minory, tj. $D_1 = 2$ a $D_2 = \det \mathbf{A} = 3$ jsou kladné.

Důležitá poznámka. Pro pozitivní definitnost stačí ověřit kladnost jen *vůdčích* hlavních minorů (*leading* principal minors) zatímco pro pozitivní semidefinitnost je třeba projít nezápornost *všech* hlavních minorů. Terminologie: *minor* je determinant libovolné čtvercové submatice, *hlavní minor* je determinant submatice, ve které je vybrána stejná podmnožina řádků i sloupců, *vůdčí hlavní minor* je determinant submatice umístěné v levém horním rohu původní matice.

Příklad: matice $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ má oba vůdčí hlavní minory nulové, tedy nezáporné, ale to nestačí k tomu, abychom mohli prohlásit, že je pozitivně semidefinitní. Hlavní minor z matice $[a_{22}]$, který není vůdčí, je totiž záporný.

Další důležitá poznámka: Negativní (semi)definitnost matice $\mathbf{A}$ se nejspolehlivěji ověří jako pozitivní (semi)definitnost matice $-\mathbf{A}$. Kdybyste nechtěli přecházet k matici $-\mathbf{A}$, pak vězte, že hlavní minory lichých řádů musejí být záporné (nekladné) a hlavní minory sudých řádů musejí být kladné (nezáporné). Rozmyslete si $\det(-\mathbf{A})$ pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pro liché nebo sudé n.

Jakmile existuje sudý hlavní minor se zápornou hodnotou, máme jistotu, že matice je indefinitní, protože není ani pozitivně (semi)definitiní, ani negativne (semi)definitiní. Proto je například matice (a) indefinitní od prvního pohledu: její determinant (sudého řádu) je záporný.

Matice (g) v tomto cvičení má vůdčí hlavní minory $D_1 = -2$ a $D_2 = -6$. Dále není třeba počítat. Protože hlavní minor sudého řádu je záporný, nemůže být tato matice ani pozitivně ani negativně semidefinitiní, je tedy indefinitní.

Ilustrujeme symetrickou GEM na matici (g):

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim\wr \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 8/3 \end{bmatrix} \sim\wr \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 12/5 \end{bmatrix}$$

V prvním kroku jsme první řádek násobili 2/3 a přičetli ke druhému a také jsme násobili první řádek $-1/3$ a přičetli ke třetímu. Následně jsme provedli stejnou sloupcovou činnost, která ovšem jen vyrobí nuly v druhé a třetí složce prvního řádku, ostatní čísla už nezmění. Povšimneme si, že nelze jako pivota použít jedničku, protože prohození řádků musí následovat stejné prohození sloupců, takže pivotem může být jen číslo z hlavní diagonály. Ve druhém kroku jsme druhý řádek násobili $-2/5$ a přičetli ke třetímu a stejný sloupcový úkon vytvoří nulu na pozici 2,3. Symetrická GEM zanechala na diagobále jen kladná čísla, matice je pozitivně definitiní.

Snadnější zjištění definitinosti matice (g) vede přes vůdčí hlavní minory. Ty mají hodnoty 3, 5, 12, takže matice je pozitivně definitiní.

K jednotlivým maticím (a) až (g) existuje podrobné řešení ve skriptech.

6.9 Kdybychom počítali minory či vlastní čísla přímo zadané matice, nedostali bychom žádný relevantní výsledek. Vlastní čísla by klidně mohla třeba vyjít komplexní. To sice v tomto příkladě nenastalo, vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou -1 a -2, ale to nám nic neříká o negativní semidefinitnosti a tím ani o zápornosti příslušné kvadratické formy. Je třeba tutéž kvadratickou formu reprezentovat symetrickou maticí $\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T) = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & -4 \end{bmatrix}$ a ta je indefinitní, protože má záporný minor sudého řádu. To můžeme zjistit i z vlastních čísel této symetrické matice, která jsou přibližně $-4{,}05$ a $1{,}05$. Žádně z tvrzení a), b), c) není tedy správně.

6.10 a) $2xy$ rozdělíme na dvě stejné čísti a máme symetrickou matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

b) Spektrální rozklad je $\mathbf{A} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{V}^T$, kde $\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Ve sloupcích matice $\mathbf{V}$ jsou příslušné vlastní vektory. Je $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{V} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{V}^T\mathbf{x}$, takže po přechodu na nové souřadnice $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{V}^T\mathbf{x} = \mathbf{w} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ dostáváme $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{w}^T \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{w} = 4u^2 + 2v^2$. Je tedy $\mathbf{U} = \mathbf{V}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

c) Je to elipsa se středem v počátku a procházející body $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(\frac{1}{2}, 0)$.

d) Přechod od souřadnic (x, y) k souřadnicím (u, v) je realizován otočením o 45°. Hledaná množina je otočená elipsa o úhel 45°.

6.11 Na levé straně rovnosti vidíme kvadratickou formu se symetrickou maticí $\begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix}$, která je indefinitní (má záporný minor sudéh řádu). Kvadratická forma tedy tvoří v okolí počátku sedlo. Zadaná množina je vrstevnice sedla ve výšce 1, což je hyperbola.

6.12 Předpokládáme $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right]$. Kdyby měla $\mathbf{A}$ nebýt symetrická, použijeme místo ní symetrickou matici $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$. Dále při značení $\mathbf{x} = (x, y)$ je $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Uvažujme vektor $\mathbf{x} = (t\cos\varphi, t\sin\varphi)$ a ve směru tohoto vektoru hledáme $t > 0$ tak, aby $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 1$, tedy $t^2(a\cos^2\varphi + 2\cos\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi) = 1$, což znamená $t = 1/\sqrt{a\cos^2\varphi + 2\cos\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi}$. Rozdělíme interval $\langle 0, \pi)$ například dostatečně jemným ekvidistantním dělením $D = \{\varphi_i\}$. Pro každé φ_i pak spočítáme dle předchozího vzorce t_i a vytvoříme vektor $\mathbf{x}_i = t_i(\cos\varphi_i, \sin\varphi_i)$. Tuto sadu vektorů nakreslíme. Také nakreslíme jejich středově souměrné obrazy, vektory $-\mathbf{x}_i$.

6.13 Reflexivita a symetrie jsou v řešení ve skriptech. Ukážeme tranzitivitu. Předpokládáme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$. Tedy $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T\mathbf{B}\mathbf{U}$ a $\mathbf{B} = \mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V}$, kde $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou regulární matice. Pak $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T\mathbf{B}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T\mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{U} = (\mathbf{V}\mathbf{U})^T\mathbf{C}(\mathbf{V}\mathbf{U})$, takže $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$. Součin $\mathbf{V}\mathbf{U}$ je totiž také regulární matice.

6.14 a) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = \mathbf{x}^T \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right] \mathbf{x} + \left[\begin{smallmatrix} 3 & -6 \end{smallmatrix}\right] \mathbf{x} + 5$. Údaj $\mathbf{x}_0$ pro doplnění na čtverec získáme řešením soustavy $-2\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tedy $-2\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right] \mathbf{x} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -6 \end{smallmatrix}\right]$. Ta má řešení $\mathbf{x}_0 = (\frac{1}{2}, -1)$. Takže

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0) = \left[\begin{matrix} x - \frac{1}{2} & y + 1 \end{matrix}\right] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y + 1 \end{bmatrix} + \frac{35}{4}.$$

Protože $\mathbf{A}$ je indefinitní (má záporný hlavní minor sudého řádu), má daná kvadratická funkce v bodě $(\frac{1}{2}, -1)$ sedlo, tedy nemá tam extrém.

Možná znáte doplňování na čtverec kvadratické funkce v jedné proměnné: $ax^2 + bx + c = a\,(x - (-b/2a))^2 + d$. Všimněte si analogie: $x_0 = -\frac{b}{2a}$ v jedné proměnné a $\mathbf{x}_0 = -\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$ ve více proměnných.

b) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = \mathbf{x}^T \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right] \mathbf{x} + \left[\begin{smallmatrix} 2 & -1 \end{smallmatrix}\right] \mathbf{x} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right] (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \frac{5}{4}$, kde $\mathbf{x}_0 = (-3/2, -1/2)$ a je tam minimum, protože matice $\mathbf{A}$ je pozitivně definitiní.

6.15 Úkoly a), b), c) jsou podrobně vysvětleny v řešení skript.

d) Protože $(x_i - x_j)^2 = x_i^2 + x_j^2 - 2x_ix_j$, vyskytuje se v celkovém součtu (ve funkci f) hodnota x_i^2 tolikrát, kolikrát je spojen tento vrchol hranou s nějakým vrcholem j. Tedy d_i krát. To se dá zapsat jako $\mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x}$. Dále se v součtu vyskytuje $-2x_ix_j$ právě tehdy, když jsou vrcholy i, j spojené hranou. Přitom výraz $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ obsahuje smíšené součiny x_ix_j dvakrát právě tehdy, když jsou vrcholy i, j spojené hranou (jednička v matici $\mathbf{A}$ je na pozici i, j a také na pozici j, i). Takže $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(\mathbf{D} - \mathbf{A})\mathbf{x}$.

e) Incidenční matice má na pozici i, k jedničku, pokud k-tá hrana z vrcholu i odchází a mínus jedničku, pokud do vrcholu i přichází. Snadno ověříme, že vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ definovaný jako $\mathbf{B}^T\mathbf{x}$ obsahuje ve své k-té složce $x_i - x_j$ (nebo $x_j - x_i$ v závislosti na volbě orientace hrany) právě tehdy, když vrcholy i, j jsou spojeny hranou. Jinak je v k-té složce nula. Kvadrát normy tohoto vektoru je roven $f(\mathbf{x})$, což vidíme přímo z definice funkce f.

6.16 Potože diagonální prvky jsou hlavní minory řádu jedna, musejí být u pozitivně definitní matice kladné, u negativně definitiní matice záporné. Pokud mají diagonální prvky různá znaménka, pak je matice nutně indefinitiní. Jsou-li diagonální prvky např. všchny kladné, matice může být pozitivně definitiní, ale nemůžeme vyloučit ani semidefinitnost (např. jiný hlavní minor vyššího řádu je nulový) nebo indefinitnost (např. sudý hlavní minor je záporný). a) Matice je pozitivně semidefinitiní, nebo indefinitiní. b) Matice je pozitivně (semi)definitiní nebo indefinitiní. c) Matice je negativně (semi)definitiní nebo indefinitní. d) Matice je indefinitiní.

6.17 Vyřešeno podrobně ve skiptech.

6.18 Vyřešeno ve skriptech pomocí spektrálního rozkladu.

6.19 a) Dokážeme to pomocí spektrálního rozkladu symetrické matice, což je speciální případ kongruence. Positivně definitní matice $\mathbf{A}$ má spektrální rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$, kde diagonální matice $\mathbf{\Lambda}$ má na diagonále kladné prvky, ke kterým můžeme vytvořit převrácené hodnoty a dostaneme tak matici $\mathbf{\Lambda}^{-1}$. Pak je $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\,\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{V}^T$, protože

$$(\mathbf{V}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{V}^T)\,(\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{V}^T) = \mathbf{V}\,\mathbf{\Lambda}\,(\mathbf{V}^T\mathbf{V})\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\,(\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{\Lambda}^{-1})\,\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\,\mathbf{V}^T = \mathbf{I}.$$

b) Ukážeme nejprve regularitu matice $\mathbf{A}$, tedy že soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ má jediné nulové řešení. Vynásobením zleva $\mathbf{x}^T$ máme rovnost $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{x}^T\mathbf{0} = 0$. Protože ale je $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} > 0$ pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (z předpokladu, že $\mathbf{A}$ je positivně definitní), musí být $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ukážeme nyní, že $\mathbf{y}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} > 0$. Volme $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$, tedy $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$. Dosadíme: $(\mathbf{Ax})^T\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} > 0$.

6.20 Řešení je ve skriptech.

6.21 Řešení je ve skriptech.

6.22 Úkol a) je vyřešený ve skriptech. Další úkoly:

b) Předpokládáme $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} \leq \mathbf{x}^T\mathbf{Bx}$ a $\mathbf{x}^T\mathbf{Cx} \leq \mathbf{x}^T\mathbf{Dx}$. Po sečtení těchto dvou nerovností máme $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} + \mathbf{x}^T\mathbf{Cx} \leq \mathbf{x}^T\mathbf{Bx} + \mathbf{x}^T\mathbf{Dx}$. Přitom je $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} + \mathbf{x}^T\mathbf{Cx} = \mathbf{x}^T(\mathbf{A} + \mathbf{C})\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}^T\mathbf{Bx} + \mathbf{x}^T\mathbf{Dx} = \mathbf{x}^T(\mathbf{B} + \mathbf{D})\mathbf{x}$, protože platí distributivní zákon při násobení matic. Je tedy $\mathbf{A} + \mathbf{C} \preceq \mathbf{B} + \mathbf{D}$.

c) Platí, protože když $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} \geq 0$, pak $\mathbf{x}^T(\alpha\mathbf{A})\mathbf{x} = \alpha\,\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} \geq 0$.

d) Tvrzení platí. Symetrická matice $\mathbf{A}$ má spektrální rozklad $\mathbf{V\Lambda V}^T$ a pak $\mathbf{A}^2 = \mathbf{V\Lambda}^2\mathbf{V}^T$ je pozitivně semidefinitní.

e) Součin dvou pozitivně definitiních symetrických matic nemusí být symetrická matice, což znamená, že otázka na $\mathbf{AB} \succeq \mathbf{O}$ je irelevantní, neboť vlevo může být matice mimo množinu matic, které bereme v úvahu. Ani kvadratická forma $\mathbf{x}^T\mathbf{ABx}$ nemusí být pozitivně definitiní, viz https://math.stackexchange.com/questions/113842.

f) Jsou-li matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ symetrické, je též $\mathbf{ABA}$ symetrická, protože $(\mathbf{ABA})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{ABA}$. Dále nám stačí použít pozitivní semidefinitnost matice $\mathbf{B}$. Při značení $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ je $\mathbf{x}^T\mathbf{ABAx} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{BAx} = \mathbf{y}^T\mathbf{By} \geq 0$.

6.23 Reflektor převádí vektory na „osově souměrné“ obrazy podle nějakého podprostoru P (tj. „osa“ může mít více dimenzí). Vezmeme-li nenulový vektor z P, reflektor jej nezmění, tj. je to vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu 1. Vezmeme-li nenulový vektor $\mathbf{x}$ kolmý na P, reflektor vyrobí obraz $-\mathbf{x}$, tedy je to vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu -1.

6.24 Rotace kolem přímky p nezmění vektory ležící na přímce p, takže nějaký nenulový vektor z této přímky je vlastním vektorem příslušející vlastnímu číslu 1. Všechny vektory ležící mimo přímku p změní při rotaci směr, takže ostatní dvě vlastní čísla rotace jsou komlexní. Neexistuje totiž reálné λ, aby $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \notin p$.

6.25 Je vyřešeno ve skriptech.

6.26 Je vyřešeno ve skriptech.

6.27 Determinant $\mathbf{A}$ je hlavní minor řádu n. Je-li tento řád lichý, musí být pro negativně semidefinitni matici $\det\mathbf{A} \leq 0$ a je-li tento řád sudý, musí být $\det\mathbf{A} \geq 0$. Protože $\det -\mathbf{A} = (-1)^n \det\mathbf{A}$.

6.28 Elipsa (ve speciálním případě kružnice) je vrstevnice kvadratické formy s pozitivně nebo negativně definitní maticí. Pro pozitivně definitní matici je třeba sledovat vrstevnici kladné výšky a pro negativně definitní matici vrstevnici záporné výšky. Jinak je vrstevnice množina prázdná nebo jednobodová. Hyperbola je vrstevnice kvadratické formy s indefinitní matici nenulové výšky. Nulová výška vrstevnice dává v tomto případě dvě přímky. Parabolu získáme jako vrstevnici kvadratické funkce s nenulovou lineární částí a se semidefinitní maticí, například $x^2 + y = 1$.

Osy elipsy i hyperboly jsou ve směru vlastních vektorů matice kvadratické formy. Osa paraboly je ve směru vlastního vektoru k němuž přísluší vlastní číslo nula.

6.29 Nejprve se podíváme na elipsu v rovině a nechť vektor $\mathbf{a}$ leží v ose x. Velikost vektoru $\mathbf{a}$ označíme symbolem e. je to excentricita elipsy. Délka provázku je v zadání daná hodnotou 1, takže hlavní poloosa (vzdálenost elipsy od počátku ve směru osy x) má velikost $a = \frac{1}{2}$. To dáte, když nad tím budete chvíli špekulovat. Vedlejší poloosa (vzdálenost elipsy ve směru osy y) má dle Pythagorovy věty velikost $b = \sqrt{1/4 - e^2}$. Je také zřejmé, že e musí být menší než $\frac{1}{2}$, jinak bychom provázek délky 1 mezi body $\mathbf{a}$ a $-\mathbf{a}$ nebyli schopni vůbec natáhnout. Tuto elipsu lze zapsat rovnicí $ux^2 + vy^2 = 1$ při volbě konstant $u = 1/a^2 = 4$, $v = 1/b^2 = 1/(1/4 - e^2)$. Elipsu tedy popíšeme pomocí kvadratické formy jako $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = 1$ pro $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{smallmatrix}\right]$.

Nyní uvažujme elipsoid $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|+\|\mathbf{x}+\mathbf{a}\| = 1$ v libovolné dimenzi a s libovolnou polohou vektoru $\mathbf{a}$. Už víme, že jeho velikost musí být menší než $\frac{1}{2}$, jinak bychom měli prázdnou množinu nebo při přesné rovnosti úsečku. Je zřejmé, že hlavní poloosa leží ve směru přímky $p = \{t\,\mathbf{a}\}$ a má velikost $\frac{1}{2}$. Ve všech směrech kolmých na hlavní poloosu máme stejnou vedlejší poloosu o velikosti $b = \sqrt{1/4 - e^2}$. Zvolme tedy jeden vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ roven normalizovanému vektoru $\mathbf{a}$ a s příslušejícím vlastním číslem $u = 4$ a dále doplňme tento vektor na ortonormální bázi zapsanou do sloupců matice $\mathbf{V}$ a ostatním vlastním vektorům přidělíme vlastní čísla $v = 1/(1/4 - e^2)$. Při označení $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(u, v, \dots, v)$ pak můžeme sestavit matici $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$. Skutečně, rovnice $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 1$ popisuje stejný elipsoid, což můžete ověřit z $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$ a přechodem k souřadnicím $\mathbf{y} = \mathbf{V}^T\mathbf{x}$. Tento přechod otočí hlavní poloosu do první souřadné osy a elipsa je popsaná rovnicí $uy_1^2 + vy_2^2 + \dots + vy_n^2$.

Kapitola 7

(pro novou verzi skript úvodní část upravil Tomáš Werner)

Shrneme nejprve nejdůležitější poznatky. Předpokládáme $\mathbf{C}$ symetrickou matici z $\mathbb{R}^{n\times n}$ s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Úloha

$$\max\{\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x};\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1\} \tag{1}$$

má argument maxima $\mathbf{v}_1$ (první vlastní vektor) a hodnotu λ_1. Důkaz plyne ze spektrálního rozkladu $\mathbf{C} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$ a z vyjádření kvadratické formy $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x}$ v nové bázi. Vektor $\mathbf{v}_1$ je první sloupec matice $\mathbf{V}$. Úloha (1) se dá zobecnit pro „vícesloupcové“ $\mathbf{x}$, tedy matici $\mathbf{X}$ s k sloupci, $k < n$:

$$\max\{\operatorname{tr}(\mathbf{X}^T\mathbf{C}\mathbf{X});\ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times k}, \mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{I}\} \tag{2}$$

Rozdělíme-li $\mathbf{V}$ ze spektrálního rozkladu $\mathbf{C}$ do dvou bloků, z nichž první má k sloupců a druhý $n-k$ sloupců, tedy $\mathbf{V} = [\mathbf{X}\ \mathbf{Y}]$, pak argumentem maxima je první blok a hodnotou maxima je $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$. Toto je *úloha na největší stopu.*

Když v úloze (1) nahradíme maximum minimem, situace bude zcela obdobná: úloha

$$\min\{\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x};\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1\} \tag{3}$$

má jako hodnotu minima *nejmenší* vlastní číslo λ_n a nabývá se v jemu příslušném vlastním vektoru $\mathbf{v}_n$. Podobně pro minimalizační verzi úlohy (2). Aby nám tam však značení hezky souhlasilo s výše uvedeným rozkladem $\mathbf{V} = [\mathbf{X}\ \mathbf{Y}]$, budeme místo přes matice $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ optimalizovat přes matice $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n\times(n-k)}$, tedy úlohu (2) změníme na

$$\min\{\operatorname{tr}(\mathbf{Y}^T\mathbf{C}\mathbf{Y});\ \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n\times(n-k)}, \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} = \mathbf{I}\} \tag{4}$$

která se tentokrát nazývá úloha na *nejmenší* stopu. Ta má hodnotu minima součet k nejmenších vlastních čísel (tj. $\lambda_{n-k+1} + \cdots + \lambda_n$) a nabývá se v bloku $\mathbf{Y}$.

Další úlohou je proložení m bodů $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ podprostorem X stanovené dimenze k tak, aby součet čtverců vzdáleností těch bodů od podprostoru X byl nejmenší. Tedy:

$$\min\Big\{\sum_{i=1}^{m}(\operatorname{dist}(\mathbf{a}_i, X))^2;\ \dim X = k\Big\} \tag{5}$$

Naplníme-li matici $\mathbf{A}$ ve sloupcích souřadnicemi daných bodů $\mathbf{a}_i$, pak tuto úlohu lze převést na úlohu (4) pro $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Úloha (4) pak vrátí ve sloupcích $\mathbf{X}$ ortonormální bázi hledaného prostoru X a ve sloupcích $\mathbf{Y}$ ortonormální bázi jeho kolmého doplňku $Y = X^\perp$. Argument, proč tomu tak je, se opírá o představu projekce daných bodů $\mathbf{a}_i$ do prostoru Y. Hledá se tedy Y, aby součet čtverců velikostí těchto projekcí byl co nejmenší. Ten součet vede (po chvíli výpočtu) na výraz $\operatorname{tr}(\mathbf{Y}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{Y})$, kde ve sloupcích $\mathbf{Y}$ je ortonormální báze prostoru Y. Což je úloha (4). Můžeme tedy matici $\mathbf{V}$ ze spektrálního rozkladu matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ rozdělit do dvou bloků $\mathbf{V} = [\mathbf{X}\ \mathbf{Y}]$, v prvním s k sloupci (tj. s k vlastními vektory příslušejícími největším vlastním číslům matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$) je báze X a ve druhém bloku (s $n-k$ sloupci) je báze Y. Úloha se jmenuje PCA (principal component analyzis), protože umožňuje analýzu nikoli daných m bodů, ale jen jejich projekcí do podprostoru X, což je sice *ztrátová komprese*, ale podprostor X stanovené dimenze d je volen tak, aby ztráta byla co nejmenší. Projekce výchozích bodů do X pak můžeme popsat jen souřadnicemi v bázi podprostoru X, což je typicky daleko méně čísel než původní souřadnice bodů v $\mathbb{R}^n$. Zabýváme se tedy jen těmi podstatnými (principal) souřadnicemi v nové bázi.

Poslední příbuznou úlohou je hledání matice, která má hodnost nejvýše k (kde k je zadané číslo) a od zadané matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ se liší co nejméně, tedy

$$\min\{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|;\ \operatorname{rank}\mathbf{B} \leq d\} \tag{6}$$

Předpokládáme $d < \operatorname{rank} \mathbf{A}$, protože jinak lze volit $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ a úloha je o ničem. Názorné řešení této úlohy plyne ze SVD rozkladu matice $\mathbf{A}$, tedy $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$, kde nyní v matici $\mathbf{S}$ odstraníme (pronulujeme) nejmenší singulární čísla, aby tam zbylo jen d největších čísel. Vzniklou matici $\mathbf{S}_1$ použijeme na sestavení hledané $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{S}_1\mathbf{V}^T$. Je pak jistě $\operatorname{rank} \mathbf{B} = d$ a dá se ukázat, že kvadrát Frobeniovy vzdálenosti $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2$ je opravdu nejmenší možný a je roven sumě kvadrátů odstraněných singulárních čísel.

Úlohu (6) lze řešit i převodem na úlohu (5): ve sloupcích dané matice $\mathbf{A}$ máme body $\mathbf{a}_i$ a provedeme jejich projekci na podprostor X, který je řešením úlohy (5). Souřadnice těchto projekcí zapíšeme do sloupců matice $\mathbf{B}$. Udělali jsme tedy nejmenší možné změny sloupců ve smyslu součtu čtverců velikostí těch změn. A protože sloupce $\mathbf{B}$ leží v prostoru dimenze d, je $\operatorname{rank} \mathbf{B} \leq d$. Máme-li $\mathbf{X}$ první blok matice $\mathbf{V}$ ze spektrálního rozkladu matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ (při řazení vlastních čísel setupně), pak $\mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{A}$, protože $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ je matice kolmého projektoru na podprostor X.

7.1 To je úloha $\min\{\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x};\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1\}$ zakuklená do jiného značení. Úloha najde minimum ve vlastním vektoru příslušejícímu nejmenšímu vlastnímu číslu matice $\frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T)$. Viz též cvičení 7.2

7.2 Matice $\mathbf{C}$ na vstupu do spektrálního rozkladu musí být symetrická. Ovšem každá kvadratická forma má symetrickou matici, kterou lze získat tak, že původní matici $\mathbf{C}$ nahradíte její symetrickou částí $\frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T)$. Pokud to neuděláte, dostanete chybný výsledek nebo dokonce vlastní čísla a vektory budou komplexní a matice ani nemusí mít diagonální rozklad.

7.3 Hledá se maximum $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ za podmínky $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1$. Eliminujeme y_1^2 z podmínky, tedy $y_1^2 = 1 - y_2^2 - \cdots - y_n^2$ a dosadíme do účelové funkce:

$$\lambda_1(1 - y_2^2 - \cdots - y_n^2) + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \;=\; \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\, y_2^2 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_1)\, y_n^2$$

Největší hodnota tohoto výrazu je λ_1 (tj. největší vlastní číslo), protože dále je ve výrazu nekladný součet: kvadráty jsou vždy nezáporné a jsou násobené závorkami, které jsou nekladné, protože λ_1 je největší. Největší hodnotu zajistíme při volbě $y_2 = y_3 = \cdots = y_n = 0$, pak tedy musí být $y_1 = \pm 1$.

7.4 Dokážeme, že množiny $P = \{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x};\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1\}$ a $Q = \{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x}/\mathbf{x}^T\mathbf{x};\ \mathbf{x} \neq \mathbf{o}\}$ se rovnají. Tím pádem se rovnají i jejich maxima a minima. Vezmeme nějaké $u \in P$, tj. existuje $\mathbf{x}$ tak, že $u = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x}$ a navíc $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$. Ovšem pak $u = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x}/\mathbf{x}^T\mathbf{x}$, protože jmenovatel v tomto výrazu je roven jedné. Takže $u \in Q$. Vezmeme nyní $v \in Q$, tedy $v = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x}/\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ pro nějaký nenulový vektor $\mathbf{x}$. Označme $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$, tj. $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|\,\mathbf{y}$. Je zřejmé, že $\mathbf{y}^T\mathbf{y} = 1$. A dosazením za $\mathbf{x}$ do vzorce vyjadřující v máme $v = \|\mathbf{x}\|\,\mathbf{y}^T\mathbf{A}\,\|\mathbf{x}\|\,\mathbf{y}/\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{A}\,\mathbf{y}$. Reálné číslo v tedy leží v množině P. Rovnost $P = Q$ je dokázána. Tudíž také $\max P = \max Q$ a $\min P = \min Q$.

7.5 Máme úlohu $\max\{\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x};\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1, \mathbf{v}_i^T\mathbf{x} = 0 \text{ pro } i = 1, \ldots, k\}$. Provedeme $\mathbf{C} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{V}^T$ a úloha po změně souřadnic $\mathbf{y} = \mathbf{V}^T\mathbf{x}$ přechází na $\max\{\mathbf{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{y};\ \mathbf{y}^T\mathbf{y} = 1, y_i = 0 \text{ pro } i = 1, \ldots, k\}$, protože požadavek $\mathbf{v}_i^T\mathbf{x} = 0$ pro $i = 1, \ldots, k$ je požadavek na nulový výsledek prvních k levých stran soustavy rovností $\mathbf{V}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$, takže $y_i = 0$ pro $i = 1, \ldots, k$. Dále $\mathbf{y}^T\mathbf{y} = 1$, takže $y_{k+1}^2 + \cdots + y_n^2 = 1$.

7.6 Připomínáme definici, $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij}$. Platí $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$, protože pro $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T\mathbf{B}$ je $c_{ij} = \sum_k a_{ki} b_{kj}$ a dále $\operatorname{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{C}) = \sum_j c_{jj} = \sum_j \sum_k a_{kj} b_{kj}$. Zřejmě také $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{A} \rangle$.

Takže pro čtvercovou $\mathbf{A}$ je $\langle \mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = \langle \mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{X} \rangle = \operatorname{tr}(\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X})$.

Rovněž $\langle \mathbf{A}, \mathbf{X}\mathbf{X}^T \rangle = \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^T, \mathbf{A} \rangle = \operatorname{tr}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{A})$. Zde jsme využili faktu, že $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ je symetrická.

K ověření poslední rovnosti je třeba si uvědomit, že při značení $\mathbf{C} = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ je $c_{ij} = \mathbf{x}_i^T\mathbf{A}\mathbf{x}_j$ a pro tuto matici počítáme stopu, tedy $\sum_j c_{jj}$.

7.7 Je řešeno ve skriptech s výjimkou úlohy b).

b) V prvním kroku hladového algoritmu použijeme jen první sloupec matice $\mathbf{A}$, tj. $\mathbf{A}_1$, a hledáme jednosloupcovou matici $\mathbf{X}$ v úloze $\max\{\langle \mathbf{A}_1, \mathbf{X} \rangle;\ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \mathbf{X}^T\mathbf{X} = 1\}$. Řešením je $\mathbf{X} = \mathbf{A}_1/\|\mathbf{A}_1\|$. Je to totiž známá úloha $\max\{\mathbf{A}_1^T\mathbf{x};\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1\}$. V dalším kroku hladového algoritmu uvažujeme další sloupec matice $\mathbf{A}$ a hledáme další sloupec matice $\mathbf{X}$ s tím, že předchozí sloupce už máme nalezeny. V každém kroku tedy řešíme jen $\max\{\mathbf{A}_i^T\mathbf{x};\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1\}$ a o SVD rozkladu nepotřebujeme nic vědět. Výsledná matice zapsána po sloupcích tedy je $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{A}_1}{\|\mathbf{A}_1\|} & \frac{\mathbf{A}_2}{\|\mathbf{A}_2\|} & \ldots & \frac{\mathbf{A}_k}{\|\mathbf{A}_k\|} \end{bmatrix}$.

7.8 Je to úloha (5). Je třeba provést spektrální rozklad matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, kde souřadnice zadaných bodů jsou ve sloupcích matice $\mathbf{A}$:

```
octave:1> A = [3 -3 4; -2 -3 -2; 1 0 -1; 3 1 0]'
A =

   3  -2   1   3
  -3  -3   0   1
   4  -2  -1   0

octave:2> [V D] = eig(A*A')
V =

  -0.616418   0.377131   0.691232
   0.319558   0.922118  -0.218130
   0.719661  -0.086429   0.688925

D =

Diagonal Matrix

    5.4877         0         0
         0   19.5624         0
         0         0   37.9500

octave:3>
```

báze přímky

báze roviny

největší vlastní číslo

Matlab srovná vlastní čísla od nejmenšího (na rozdíl od skript, kde jsou řazena od největšího), výsledek tedy čteme ve sloupcích matice $\mathbf{V}$ zprava. Potřebujeme totiž vlastní vektory příslušející k největším vlastním číslům (k je dimenze hledaného podprostoru).

Bázi přímky vložme do matice `X=V(:,3)`. Pak projekce daných bodů na přímku jsou `X*X'*A` a souřadnice těchto projekcí vzhledem k bázi přímky jsou `X'*A`. Nyní vložme do matice `X` bázi roviny, tedy `X=V(:,2:3)`. Pak projekce daných bodů na rovinu jsou `X*X'*A` a souřadnice těchto projekcí vzhledem k bázi roviny jsou `X'*A`.

Hledáme-li přímku neprocházející počátkem, je třeba od všech sloupců matice $\mathbf{A}$ odečíst těžiště $\mathbf{T}$ všech zadaných bodů, tedy sumu sloupců matice $\mathbf{A}$ dělenou počtem sloupců:

```
octave:3> T = A*[1 1 1 1]'*1/4
T =

   1.25000
  -1.25000
   0.25000

octave:4> B = A - T*[1 1 1 1]
B =

   1.75000  -3.25000  -0.25000   1.75000
  -1.75000  -1.75000   1.25000   2.25000
   3.75000  -2.25000  -1.25000  -0.25000

octave:5> [V D] = eig(B*B')
V =

   0.649075   0.378395  -0.659939
  -0.524571   0.850905  -0.028045
  -0.550933  -0.364388  -0.750796

D =

Diagonal Matrix

    0.027894          0          0
           0  17.563479          0
           0          0  32.658627

octave:6>
```

Báze přímky rovnoběžné s hledanou přímkou

Hledanou přímku parametricky zapíšeme jako $\mathbf{T} + \mathrm{Span}($výše vyznačená báze$)$.

V zadání byl ještě úkol dospět ke stejným výsledkům pomocí SVD. V tomto případě počítáme přímo SVD rozklad matice $\mathbf{A}$ resp. $\mathbf{B}$. (Nikoli $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ ani $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$.) Použijeme `[U S V] = svd(A)`. Výsledná matice $\mathbf{U}$ má ve sloupcích levé singulární vektory a to jsou vlastní vektory matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Kvadráty singulárních čísel matice $\mathbf{A}$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, kde je funkce `svd` seřadila od největšího singulárního čísla k nejmenšímu (tedy jako ve skriptech), takže výsledek pro přímku čteme v levém sloupci matice $\mathbf{U}$.

7.9 Protože je matice $\mathbf{A}$ symetrická, vlastní čísla jsou reálná. Jsou-li nezáporná, pak SVD rozklad $\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ je shodný se spektrálním rozkladem $\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T$, kde volíme $\mathbf{S} = \mathbf{\Lambda}$ a $\mathbf{V} = \mathbf{U}$. Vyjdeme z této volby obecně. Je-li nějaké vlastní číslo λ záporné, pak na jeho místo do $\mathbf{S}$ napíšeme $-\lambda$ a odpovídající řádek matice $\mathbf{V}^T$ vynásobíme -1. Tím se celkový součin nezmění. Toto provedeme se všemi zápornými vlastními čísly. Získali jsme $\mathbf{S} \geq \mathbf{O}$ a máme SVD rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$.

Pozor: tento příklad nemá nic společného se známým vztahem $\sigma_i^2 = \lambda_i$, protože tento vztah platí pro singulární čísla matice $\mathbf{A}$ a vlastní čísla matice $\mathbf{AA}^T$, což jsou různé matice.

7.10 Je to úloha (7). Je třeba najít SVD rozklad, pronulovat nejmenší diagonální prvek matice S (v tomto případě to je jednička) a najít novou matici s nejbližší hodnotou jako součin $\mathbf{US}_1\mathbf{V}^T$. Výpočet vidíme při pravém okraji.

```
>> A

A =

   -0.8667    0.1333   -1.4667
   -1.0667    0.9333   -0.2667

>> [U S V] = svd(A);
>> S

S =

    2.0000         0         0
         0    1.0000         0

>> S1 = [2 0 0; 0 0 0];
>> U*S1*V'

ans =

   -1.0667    0.5333   -1.0667
   -0.8000    0.4000   -0.8000

>> ans*15

ans =

  -16.0000    8.0000  -16.0000
  -12.0000    6.0000  -12.0000

>>
```

7.11 V rovnosti $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$, kde $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ jsou ortogonální a $\mathbf{S}$ je diagonální s nezápornými prvky, je dána matice $\mathbf{A}$ a dále je známá marice $\mathbf{U}$. Hledáme $\mathbf{S}$ a $\mathbf{V}$. Rovnost vynásobíme zleva maticí $\mathbf{U}^T$ a dostáváme $\mathbf{U}^T\mathbf{A} = \mathbf{SV}^T$. V i-tém řádku této rovnosti máme na levé straně známý vektor (označme jej $\mathbf{w}_i$) a na pravé straně máe $s_i\mathbf{v}_i$ kde $\mathbf{v}_i$ je i-tý sloupec matice $\mathbf{V}$ (neboli i-tý řádek matice $\mathbf{V}^T$). Je-li $\mathbf{w}_i$ nenulový vektor, pak volíme $s_i = \|\mathbf{w}_i\|$ a $\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i/s_i$. Tím je rovnost $\mathbf{w}_i = s_i\mathbf{v}_i$ navíc s požadavkem $s_i > 0$ zajištěna. Ostatní s_i volíme nulové a k nim příslušející $\mathbf{v}_i$ najdeme jako zbylé vektory báze po doplnění už spočítaných $\mathbf{v}_i$ na ortonormální bázi v $\mathbb{R}^m$.

7.12 Problém je, že $\mathbf{AA}^T$ má rozměr $10^6 \times 10^6$, takže raději spočítáme $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, což je rozměru 100×100 a do počítače se nám vejde. Obě matice mají stejná nenulová vlastní čísla. Je-li $\mathbf{v}$ vlastní vektor matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, pak $\mathbf{u} = \mathbf{Av}$ je vlastní vektor matice $\mathbf{AA}^T$. Ta se nám sice nevejde do počítače, ale její vlastní vektory příslušející nenulovým vlastním číslům umíme tedy spočítat z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Vzorec pro $\mathbf{u}$ lze odvodit z definice vlastních čísel a vektorů: Je-li $\mathbf{v}$ vlastní vektor $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, pak je $\mathbf{A}^T\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$. Vynásobením zleva maticí $\mathbf{A}$ a přezávorkováním máme $(\mathbf{AA}^T)(\mathbf{Av}) = \lambda(\mathbf{Av})$. Z toho jednak vidíme, že λ je také vlastní číslo matice $\mathbf{AA}^T$, a dále ve druhé a třetí závorce vidíme její vlastní vektor.

7.13 Zahrňme souřadnice všech m bodů do sloupců matice $\mathbf{A}$. Jejich projekce $P(\mathbf{A})$ získáme maticovým násobením $\mathbf{PA}$. Jejich těžiště najdeme maticovým násobením $\frac{1}{m}\mathbf{A}\,\mathbf{1}$. Tyto dvě operace skutečně komutují: $\mathbf{P}(\frac{1}{m}\mathbf{A}\,\mathbf{1}) = \frac{1}{m}(\mathbf{PA})\mathbf{1}$.

7.14 a) Vzdálenost bodu $\mathbf{z}$ od přímky (nadroviny v $\mathbb{R}^2$) zadané vzorcem $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = \beta$ jsme spočítali v Cvičení 5.16(d), tato vzdálenost je $|\mathbf{a}^T\mathbf{z} - \beta|/\|\mathbf{a}\|$. V terminologii našeho příkladu je $\mathbf{a} = (a, b)$, $\beta = -c$, takže vzdálenost bodu (x_i, y_i) od naší přímky je $|ax_i + by_i + c|/\sqrt{a^2 + b^2}$. Suma čtverců těchto vzdáleností tedy je $1/(a^2+b^2)\sum_i(ax_i+by_i+c)^2$, což je něco jiného než $\sum_i(ax_i+bx_i+c)^2$. Takže úloha neminimalizuje součet čtverců vzdáleností.

b) Platí-li $a^2 + b^2 = 1$, je suma čtverců vzdáleností přímo rovna $\sum_i(ax_i + bx_i + c)^2$, což je účelová funkce naší úlohy. Prokládáme tedy zadanými body přímku, abychom minimalizovali sumu čtverců vzdáleností, což je úloha (5) při volbě $k = 1$. Není to ale přímo úloha (5): nehledá se lineární podprostor ale afinní, je tedy třeba zadané body nejprve posunout proti těžišti, najít podprostor a nakonec posunout podprostor zpět o těžiště, viz třeba Cvičení 7.8 c.

c) Vzdálenost bodu (x_i, y_i) od kuželosečky se rozhodně ne vždy rovná vzorci $|Q(x_i, y_i)|$, takže úloha s účelovou funkcí $\sum_i Q^2(x_i, y_i)$ neminimalizuje součet čtverců vzdáleností. Například parabola $x^2 - y = 0$ (tedy $a = 1, e = -1$, ostatní jsou nuly) vyhovuje podmínce $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ a ze Cvičení 1.1 (i) o ni víme, že je od bodu $(3, 0)$ vzdálená $\sqrt{5}$, zatímco $Q(3, 0) = 9$.

7.15 Nechť máme SVD rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$. Po označení $\mathbf{v} = \mathbf{U}^T\mathbf{x}$ a $\mathbf{w} = \mathbf{V}^T\mathbf{y}$ přechází zadaná úloha na $\max\{\mathbf{x}^T\mathbf{USV}^T\mathbf{y};\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{y} = 1\} = \max\{\mathbf{vSw};\ \mathbf{v}^T\mathbf{v} = \mathbf{w}^T\mathbf{w} = 1\}$. Účelová funkce této úlohy je $\sum_{i=1}^k s_i v_i w_i$, kde $k = \min(m, n)$. Maximum tato funkce nabývá (při seřazení singulárních čísel s_i sestupně) pro $v_1 = w_1 = 1$, ostatní $v_i = w_1 = 0$. To plyne z toho, že úloha přechází na $\max\{\sum s_i z_i;\ |z_i| \le 1, |\sum z_i| \le 1\}$ při značení $z_i = v_i w_i$. To vysvětlíme podrobněji: $|z_i| \le |v_i||w_i| \le 1 \cdot 1 = 1$. Také $|\sum v_i w_i|$ je absolutní hodnota skalárního součinu dvou jednotkových vektorů, takže musí být menší než 1 (je to velikost kolmého průmětu jednoho vektoru do druhého). Konečně úloha $\max\{\sum s_i z_i;\ |z_i| \le 1, |\sum z_i| \le 1\}$ má své maximum pro $z_1 = 1$, ostatní $z_i = 0$, je-li s_1 největší (viz úlohu „zlatník“ 12.3c). Po převedení výsledku $v_1 = w_1 = 1$, $v_i = w_i = 0$ pro $i \neq 1$ do původních proměnných $\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{v}$ a $\mathbf{y} = \mathbf{V}\mathbf{w}$ máme $\mathbf{x} = \mathbf{U}_1$, $\mathbf{y} = \mathbf{V}_1$ a hodnota maxima je s_1.

7.16 Dokázáno ve skriptech.

7.17 V Matlabu je funkce `null` implementována pomocí SVD, přičemž je vrácena matice $\mathbf{V}^T$.

7.18 Připomeneme, že $\mathbf{A}^+$ je definovaná vztahem $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}^T$, kde $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ je rank minimální SVD rozklad, což znamená, že z matice $\mathbf{S}$ jsou odstraněny případné bloky nul z její pravé a spodní části a tomu odpovídající řádky matice $\mathbf{V}^T$ a sloupce matice $\mathbf{U}$ jsou odstraněny rovněž. Matice $\mathbf{S}$ je pak čtvercová diagonální regulární a rozměry matic jsou $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\mathbf{V}^T \in \mathbb{R}^{r\times n}$, kde r je rank matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matice $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ mají ortonormální sloupce, takže $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$.

a) Z faktu $\mathbf{V}(\mathbf{S}^2 + \mu\mathbf{I}) = \mathbf{V}\mathbf{S}^2 + \mu\mathbf{V}\mathbf{I} = \mathbf{V}\mathbf{S}^2\mathbf{V}^T\mathbf{V} + \mu\mathbf{I}\mathbf{V} = (\mathbf{V}\mathbf{S}^2\mathbf{V}^T + \mu\mathbf{I})\mathbf{V}$ plyne po vynásobení inverzemi $(\mathbf{V}\mathbf{S}^2\mathbf{V}^T + \mu\mathbf{I})^{-1}$ zleva a $(\mathbf{S}^2 + \mu\mathbf{I})^{-1}$ zprava rovnost $(\mathbf{V}\mathbf{S}^2\mathbf{V}^T + \mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{S}^2 + \mu\mathbf{I})^{-1}$. Po vynásobení maticí $\mathbf{S}\mathbf{U}^T$ zprava máme $(\mathbf{V}\mathbf{S}\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T + \mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{V}\mathbf{S}\mathbf{U}^T = \mathbf{V}(\mathbf{S}^2 + \mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{S}\mathbf{U}^T$ (využili jsme, že $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$). Poslední rovnost ve skutečnosti je $(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{V}\mathbf{S}_\mu^+\mathbf{U}^T$, tedy dokazovaná rovnost $\mathbf{A}_\mu^+ = \mathbf{V}\mathbf{S}_\mu^+\mathbf{U}^T$.

b) Pro regulární matici $\mathbf{A}$ platí, že $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$, protože rank minimální SVD rozklad matice $\mathbf{A}$ vede na čtvercové regulární matice $\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ a inverze tohoto součinu je $\mathbf{V}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}^T$. Mějme nyní libovolnou matici $\mathbf{A}$ a její rank minimální rozklad $\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$. Protože $\mathbf{S}$ je regulární, platí $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^+$. Konečně $\lim_{\mu\to 0} \mathbf{S}_\mu^+ = \lim_{\mu\to 0}(\mathbf{S}^2 + \mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{S} = \lim_{\mu\to 0} \operatorname{diag}(s_1^2 + \mu, \dots, s_r^2 + \mu)^{-1}\mathbf{S} = \operatorname{diag}(s_1^2, \dots, s_r^2)^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-2}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}$.

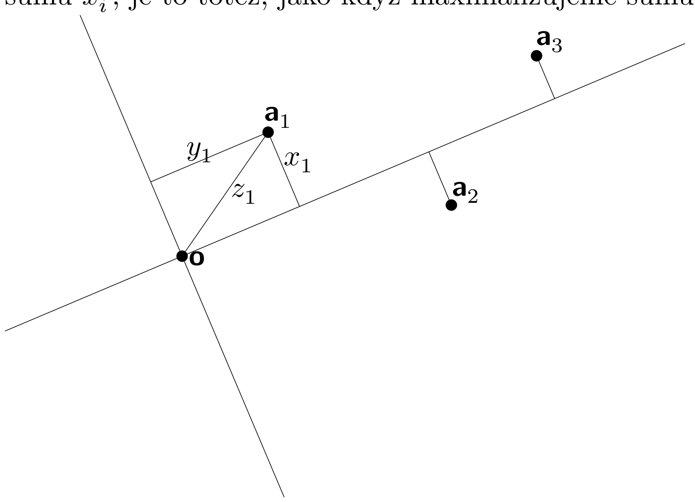
7.19 https://netlib.org/lapack/lug/,
https://public.dhe.ibm.com/software/dw/cell/BLAS_Prog_Guide_API_v3.1.pdf.

7.20 Je řešeno ve skriptech.

7.21 Je řešeno ve skriptech.

7.?? V některé z minulých verzí skript bylo toto cvičení: Dokažte, že následující optimalizační úlohy jsou ekvivalentní: Najdi podprostor P, že součet čtverců vzdáleností P od daných bodů $\mathbf{a}_i$ je minimální. Najdi podprostor P' takový, že součet čtverců vzdáleností P' od daných bodů $\mathbf{a}_i$ je maximální.

Klíčové heslo v odpovědi na toto cvičení zní: „Pythagorova věta“. Vlastně jsme to zde již zmínili, když jsme odvodili úlohu (6). Body v prostoru i jeho nulový vektor (počátek) jsou pevně dány, tj. velikosti z_i jsou dány. Hledáme x_i (vzdálenosti od podprostoru) aby součet jejich kvadrátů byl minimální, nebo hledáme y_i (délky jejich ortogonálních projekcí) aby součet těchto kvadrátů byl maximální. Přitom je $x_i^2 + y_i^2 = z_i^2 = \text{const.}$, takže když minimalizujeme sumu x_i^2, je to totéž, jako když maximalizujeme sumu y_i^2.



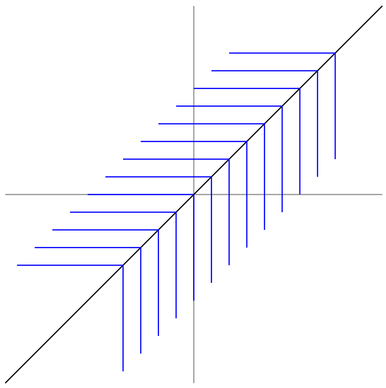
Kapitola 8

8.1 a) Rovnoběžné přímky se směrnicí $(-1,2)$. b) Rovnoběžné přímky se smernicí $(1,1/3)$. c) Rovnoběžné přímky společně s osou x_2. d) Do sebe vnořené elipsy. e) Hyperboly s osami x_1 a x_2. f) Hyperboly jež jsou grafy funkcí $y = c/x$. g) Do sebe vnořené kružnice.

8.2 $\mathbf{f}(\varphi, t) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, t)$, kde $r > 0$ je poloměr válce.

8.3 a) až f): vyřešeno ve skriptech. g) $f''(x,y) = \frac{1}{(1+xy)^2}\begin{bmatrix} -y^2 & 1 \\ 1 & -x^2 \end{bmatrix}$, $f''(1,2) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

8.4 Funkce $\max(x,y)$ se chová jako x při $x > y$, chová se jako y při $x < y$. V těchto případech je možné najít okolí bodu (x,y) ve kterém se funkce chová pořád jako x (v prvním případě) nebo jako y ve druhém. Takže v těchto případech je funkce diferencovatelná, protože $f(x,y) = x$ je diferencovatelná a stejně tak $f(x,y) = y$. Ovšem v případě, když $x = y$, pak tímto bodem (x_0, x_0) můžeme proložit třeba přímku rovnoběžnou s osou x a sledovat funkční hodnoty na této přímce, tedy hodnoty $\max(x, x_0)$. Ty jsou konstantní a rovny x_0 pro $x \le x_0$, ale pro $x > x_0$ je $\max(x, x_0) = x$. Takže parciální derivace v bodě (x_0, x_0) zleva je nula a zprava je rovna jedné, tedy celkově $\frac{\partial}{\partial x}$ neexistuje. V bodech $y = x$ tedy funkce není diferencovatelná. V náčrtku jsou vyznačeny vrstevnice grafu této funkce. Na hraně $y = x$ je „údolí“, například (je-li to mapa něčeho), tak tam může téct potůček směrem jihozápadním.



Kdybychom vyšetřovali naopak $\min(x,y)$, pak v místech $y = x$ máme „ostrý horský hřeben“. Zkuste si načrtnout vrstevnice této funkce.

8.5 Obecně Jacobiho matice f' pro funkci f je rovna jednořádkové matici $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$ Je-li $\mathbf{f}$ zobrazení, pak je $\mathbf{f}'$ rovna matici obsahující v řádcích Jacobiho matice jednotlivých složek zobrazení. Při výpočtech derivací se zbytečně nenořte do jednotlivých parciálních derivací a využijte pravidla shrnutá v tabulkách v §8.5.2 ve skriptech. Výsledné Jacobiho matice:
1. $f(x) = x^2,\ f'(x) = [2x]$. 2. $f(x,y) = x - y,\ f'(x,y) = [2x, -2y]$. 3. $f(\mathbf{x}) = a,\ f'(\mathbf{x}) = \mathbf{o}^T$.
4. $f(\mathbf{x}) = x_1,\ f'(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_1^T$. 5. $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x},\ f'(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T$. 6. $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x} + b,\ f'(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T$.
7. $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c,\ f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \mathbf{b}^T$. 8. $f(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{x}^T\mathbf{x}},\ f'(\mathbf{x}) = -2e^{-\mathbf{x}^T\mathbf{x}}\mathbf{x}^T$.
9. $f(\mathbf{x}) = \max x_i,\ f'(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_k^T$, kde k je index největšího x_i ve vektoru $\mathbf{x}$. Je-li takových indexů více, derivace neexistuje. Viz též cvičení 8.4. 10. $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix},\ \mathbf{f}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$.
11. $\mathbf{f}(t) = [\cos t,\ \sin t,\ at]^T,\ \mathbf{f}'(t) = [-\sin t,\ \cos t,\ a]^T$. 12. $\mathbf{f}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v},\ f'(t) = \mathbf{v}$.
13. Není vzorec, není co derivovat. 14. $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x},\ \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$. 15. $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a},\ \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{O}$.
16. $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$. 17. $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},\ \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$.
18. $\mathbf{f}(u,v) = ((R + r\cos v)\cos u,\ (R + r\cos v)\sin u,\ r\sin v)$,

$$\mathbf{f}'(u,v) = \begin{bmatrix} -(R + r\cos v)\sin u & -r\sin v\cos u \\ (R + r\cos v)\cos u & -r\sin v\sin u \\ 0 & r\cos v \end{bmatrix}$$

19, 20. Jde o matici parciálních derivací funkce f nebo zobrazení $\mathbf{f}$ daných rozměrů.

8.6 a) Hledaná derivace je

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},\quad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\varphi,\quad -\frac{\partial f}{\partial x}\cdot r\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot r\cos\varphi\right]$$

Ve vzorci není uvedeno, ve kterém bodě se parciální derivace funkce f vyhodnocuje. Měli bychom to uvést za každým výrazem typu $\frac{\partial f}{\partial x}$ ještě před tím, než následuje násobení. Vyhodnocovaným bodem je bod $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, takže například první sčítanec výsledku kompletně zapsaný v nových proměnných zní $\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\cos\varphi$. Protože se to stává docela nepřehledným, vyhodnocovaný bod se ve výpočtech často vynechává (ale musíme vždy vědět, že tam je).

Když označíme $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takové zobrazení, že $\mathbf{g}(r,\varphi) = [r\ \cos\varphi\ \ r\ \sin\varphi]^T$, pak $f' \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, $\mathbf{g}' \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ a derivace složené funkce v proměnných r, φ je součinem těchto matic $f'\,\mathbf{g}'$.

8.7 $F(\mathbf{u}) = f(\mathbf{a}^T\mathbf{u}, \|\mathbf{u}\|)$, $F'(\mathbf{u}) = f'(\mathbf{a}^T\mathbf{u}, \|\mathbf{u}\|)\,(\mathbf{a}^T + \mathbf{u}^T/\|\mathbf{u}\|)$.

8.8 Nejprve odvodíme třetí vzorec z první tabulky a poslední vzorec druhé tabulky v §8.5.2 ve skriptech. Můžete těm vzorcům věřit a ušetřit si dost značné intelektuální úsilí, tj. přeskočit následující text až po symbol ▶ při levém okraji. Nebo naopak se můžete ponořit do jednotlivých parciálních derivací při odvozování těch vzorců, ale to bývá dost namáhavé.

Třetí vzorec z první tabulky skript si odvodíme tak, že si jej nejprve zjednodušíme. Nechť má v tom vzorci zobrazení $\mathbf{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$ jedinou proměnou t. Chceme dokázat, že $(\mathbf{A}\,\mathbf{g}(t))' = \mathbf{A}\,\mathbf{g}'(t)$. Matici $\mathbf{A}$ rozepíšeme do sloupců $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\ \ \ldots\ \ \mathbf{a}_l]$. Pak

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{g}(t))' = (\mathbf{a}_1\,g_1(t) + \mathbf{a}_2\,g_2(t) + \cdots + \mathbf{a}_l\,g_l(t))' = \mathbf{a}_1\,g_1'(t) + \mathbf{a}_2\,g_2'(t) + \cdots + \mathbf{a}_l\,g_l'(t) = (\mathbf{A}\,\mathbf{g}'(t))$$

V případě, že má funkce $\mathbf{g}$ více proměnných, pak místo výrazů $g_i'(t)$ (což jsou čísla) je třeba psát $g_i'(\mathbf{x})$ (což jsou jednořádkové matice délky n) a součin $\mathbf{a}_i\,g_i'(\mathbf{x})$ je nyní součin jednosloupcové matice s jednořádkovou maticí. Tento součin je matice z $\mathbb{R}^{m\times n}$. Jinak vše z předchozího výpočtu funguje stejně. Tím je ten vzorec dokázán.

Poslední vzorec druhé tabulky je ve skriptech dokázán. Nechávám zde svůj starší důkaz. Pro $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{h}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dokážeme, že platí

$$\left((\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T\mathbf{h}(\mathbf{x})\right)' = (\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T\mathbf{h}'(\mathbf{x}) + (\mathbf{h}(\mathbf{x}))^T\mathbf{g}'(\mathbf{x})$$

Z analýzy jedné proměnné víme, že vzorec pro derivaci součinu se odvodí tak, že nejprve se celý součin derivuje, jakoby byl první činitel konstantní. To se sečte s derivací výrazu, ve kterém je jakoby druhý činitel konstantní. To provedeme i zde, tedy nejprve $\mathbf{h}$ derivujeme a na $(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T$ se dívejme jako na konstantní matici $\mathbf{A}$ a použijme třetí vzorec z první tabulky. Dostaneme $(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T(\mathbf{h}(\mathbf{x}))'$. Nyní si všimneme, že $(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (\mathbf{h}(\mathbf{x}))^T\mathbf{g}(\mathbf{x})$ a ponechme $(\mathbf{h}(\mathbf{x}))^T$ konstantní. Po zderivování (znovu s využitím třetího vzorce první tabulky) dostáváme druhý sčítanec výsledku v posledním vzorci tabulky.

▶ Podúkoly (a) a (d) můžeme počítat takto:

a) $(\mathbf{x}^T\mathbf{x})' = \mathbf{x}^T\mathbf{I} + \mathbf{x}^T\mathbf{I} = 2\,\mathbf{x}^T$

d) $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|' = \frac{1}{2\sqrt{\left(\mathbf{g}(\mathbf{x})\right)^T\mathbf{g}(\mathbf{x})}}\left((\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T\mathbf{g}(\mathbf{x})\right)' = \frac{(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T\mathbf{g}'(\mathbf{x})}{\|\mathbf{g}(x)\|}$

V obou případech je využito posledního vzorce ze zmíněné druhé tabulky skript a v případě (a) také faktu, že $\mathbf{x}' = \mathbf{I}$. V případě (d) je pak použit ještě vzorec na derivaci složené funkce: odmocniny jako funkce jedné proměné a součinu $(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

8.9 Derivujeme $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$. Volíme $\mathbf{x}^T = \mathbf{g}^T(\mathbf{x})$, tedy $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, a dále $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$. Máme $(\mathbf{x}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}))' = \mathbf{x}^T\mathbf{A} + (\mathbf{A}\mathbf{x})^T\mathbf{I} = \mathbf{x}^T(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$.

8.10 Je $h'(d,s) = [-2d + 3s,\ 3d + 4s]$, takže konkrétně v bodě $(-1,1)$ je $h'(-1,1) = [5,1]$. Gradient v tomto bodě je tedy $[5,1]^T$ (derivace a gradient je totéž, jen derivace je zapsaná v řádku, gradient ve sloupci). a) směr největšího růstu je $[5,1]^T/\sqrt{26}$. Normujeme, protože nás zajímá jen směr, ne velikost. Pro doplnění: vrstevnice je kolmá na směr největšího růstu, tedy má tečnu ve směru $[1,-5]/\sqrt{26}$.

Strmost terénu (jak moc stoupá) v daném směru je rovna směrové derivaci. Ta se spočítá jako $h'(d,s)\,\mathbf{v}$, kde $\mathbf{v}$ je normovaný vektor směru. V našem případě $[5,1]\,[1,-1]^T/\sqrt{2} = 4/\sqrt{2}$.

8.11 Aby nás asi zmátli, použili v zadání úlohy stejné písmeno α, jaké je použito v definici směrové derivace. Abychom se v tom vyznali, budeme dokazovat, že $\mathbf{f}_{t\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = t\,\mathbf{f}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$. Podle definice je

$$\mathbf{f}_{t\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+\alpha t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{t\,\mathbf{f}(\mathbf{x}+\alpha t\mathbf{v}) - t\,\mathbf{f}(\mathbf{x})}{t\alpha} = t\lim_{\beta\to 0^+}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+\beta\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\beta} = t\,\mathbf{f}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}).$$

Při substutuci $\beta = t\alpha$ musíme předpokládat, že $t > 0$, jinak by neplatilo $\beta \to 0^+$.

Že vzorec $\mathbf{f}_{t\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = t\,\mathbf{f}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ neplatí vždy pro záporná t plyne například ze směrových derivací normy v bodě $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, kde norma není diferencovatelná:

$$\|\mathbf{x}\|_{t\mathbf{v}} \text{ (pro } \mathbf{x} = \mathbf{o}) \;=\; \lim_{\alpha\to 0+} \frac{\|\mathbf{o} + \alpha t\mathbf{v}\| - \|\mathbf{o}\|}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\alpha\,|t|\,\|\mathbf{v}\|}{\alpha} = |t|\,\|\mathbf{v}\|$$

Toto natane právě tehdy, když v daném bodě je derivace řezu zleva odlišná od derivace zprava.

8.12 Hessián je matice druhých parciálních derivací. Je symetrická, takže si můžete ušetřit námahu a spočítat jen derivace na diagonále a nad diagonálou.

a) Spočítejte si sami, ve skriptech je řešení.

c) $(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x})' = \mathbf{x}^T(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$, $\quad(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x})'' = ((\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\,\mathbf{x})' = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$.

Použili jsme třetí vzoreček druhé tabulky a pak druhý vzoreček z první tabulky z §8.5.2 ve skriptech. Dále jsme před druhým derivováním řádek převedli do sloupce, protože derivování se aplikuje na sloupcové vektory. Platí $f'' = ((f')^T)'$.

Třetí vzoreček ze zmíněné druhé tabulky skript odvodíme pomocí posledního vzorečku téže tabulky, kde volíme $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ a $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$:

$$(\mathbf{x}^T(\mathbf{A}\,\mathbf{x}))' = \mathbf{x}^T\mathbf{A} + (\mathbf{A}\,\mathbf{x})^T\mathbf{I} = \mathbf{x}^T\mathbf{A} + \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{x}^T(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T).$$

8.13 Toto byste měli zkusit sami a zkontrolovat si jen výsledek s výsledkem ve skriptech. Kdyby Vám to nevycházelo, tady jsou mezivýpočty:

$$T_{2,f(1,-2)}(x,y) = f(1,-2) \;+\; \frac{f'(1,-2)}{1!}\begin{bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{bmatrix} \;+\; \begin{bmatrix} x-1 & y+2 \end{bmatrix}\frac{f''(1,-2)}{2!}\begin{bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{bmatrix}$$

$$f(1,-2) = 46$$

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} 6y^2 - 6x^2 & 12xy - 9y^2 \end{bmatrix}, \qquad f'(1,-2) = \begin{bmatrix} 18 & -60 \end{bmatrix}$$

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} -12x & 12y \\ 12y & 12x - 18y \end{bmatrix}, \qquad f''(1,-2) = \begin{bmatrix} -12 & -24 \\ -24 & 48 \end{bmatrix}$$

$$T_{2,f(1,-2)}(x,y) = 46 \;+\; \begin{bmatrix} 18 & -60 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{bmatrix} \;+\; \begin{bmatrix} x-1 & y+2 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -12 & -24 \\ -24 & 48 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{bmatrix} =$$

$$= -6x^2 - 24xy + 24y^2 - 18x + 60y + 46$$

Všechny členy polynomu ve výsledku se počítají z předposledního řádku výpočtu relativně pohodlně, jen ta závěrečná konstanta 46 dá zabrat. Můžete na ni jít taky tak, že dosadíte do výsledného polynomu bez konstanty hodnoty $(1,-2)$ a vyjde nula. Víme, že $f(1,-2) = 46$, takže ta konstanta musí být rovna 46.

8.14 Taylorův polynom je roven zadanému polynomu, protože mezi polynomy nejvýše daného stupně vybírá takový, který nejlépe aproximuje zadanou funkci. Je-li zadaná funkce v množině možných polynomů, Taylor vybere pochopitelně tento polynom ajo nejlepší aproximaci sebe sama. Uvědomte si, že pokud bychom chtělo takový polynom (třeba druhého stupně) počítat třeba v bodě $(13, 113)$ a třeba pro funkci $f(x,y) = x^2 + xy + 18x - 1$, dost bychom se nadřeli.

8.17 Je $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)$ (je to kvadratická forma). Funkce g je maticová funkce, viz sekci „Maticový kalkulus“ ve skriptech, zejména její část „Zobrazení z/do prostoru matic“. Tam je v tabulce na řádku šestém řečeno, že $(\operatorname{tr}\mathbf{AXB})' = \mathbf{AB}$. V zadané funkci g hraje roli $\mathbf{A}$ vektor $\mathbf{x}^T$ a roli $\mathbf{B}$ vektor $\mathbf{x}$. Dále je $g(\mathbf{A}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \operatorname{tr}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, protože stopa matice z $\mathbb{R}^{1\times 1}$ je rovna přímo prvku té matice. Je tedy možné použít řádek šestý tabulky s výsledkem $g'(\mathbf{A}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$.

8.18 Podrobně řešeno ve skriptech.

8.19 To neplatí. Uvedeme jednoduchý protipříklad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$. Tato funkce je na přímce $\{\alpha\,(1,1);\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ nulová, tedy konstantní, přitom její Hessova matice je rovna $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right]$, tedy je regulární.

Kapitola 9

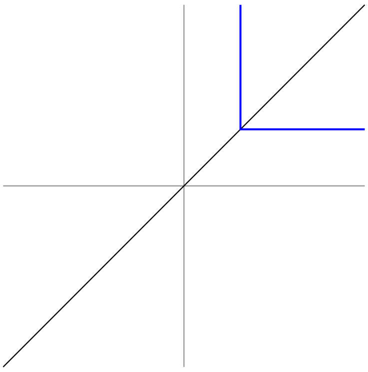
9.1 a) Nakreslete ovál, který má vzdálenost 1 od úsečky $\langle 1, 1\rangle$ a vniřek tohoto oválu včetně jeho hranice je hledaná množina.

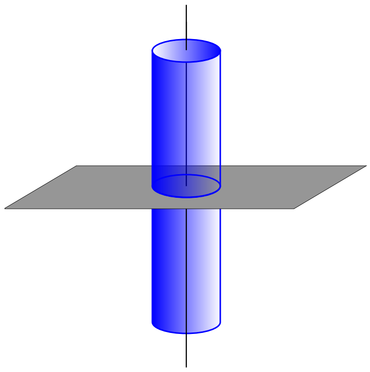
b) Nakreslete dva kruhy o poloměru 2, jeden má střed v bodě $(1, 0)$ a druhý v bodě $(-1, 0)$. Průnik těchto kruhů je hledaná množina.

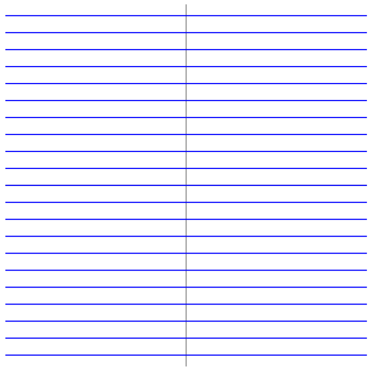
c) Kde je minimální vzdálenost od čtverce Y rovna jedné. Na křivce, která obepíná tento čtverec ve vzdálenosti 1 a vypadá jako obvod většího čtverce, ovšem s oblými rohy.

d) Hledaná množina obsahuje jediný bod (0.0). Všude jinde je maximální vzdálenost od nějakého bodu na čtverci veší než $\sqrt{2}$.

9.2 Toto je poměrně snadné cvičení, takové množiny byste měli umět si představit bez větší námahy. Některé z nich jsem zde uvedl, ale zahrajeme si takovou hru. Neprozradím, které náčrtky souvisí s kterou podotázkou tohoto cvičení a dále jsem nenakreslil obrázky ke všem podotázkám.







9.3 a) Všechny body jsou uvnitř $\mathbb{R}$ vnitřní, je to celý prostor.

b) Body a, b jsou hraniční, ostatní prvky množiny jsou vnitřní.

c) Všechny prvky množiny jsou hraniční, žádný vnitřní (do množiny se nevejde žádné okolí žádného bodu množiny).

d) Všechny prvky množiny jsou vnitřní, hranice je sféra $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \varepsilon$.

e) Je to „půlkružnice“ v $\mathbb{R}^2$, všechny její prvky jsou hraniční.

f) Je to část paraboly v $\mathbb{R}^2$, všechny prvky jsou hraniční (jako v e).

g) Množina je v prvním kvadrantu vymezena osami a hyperbolou. Ani osy ani hyperbola v ní neleží (to je její hranice). Všechny její prvky jsou vnitřní.

h) Je to množina v $\mathbb{R}^n$, pro kterou $x_i \leq 1$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$. Body, pro které je aspoň jedna rovnost nabývána, jsou hraniční, ostatní jsou vnitřní. V $\mathbb{R}^2$ si množinu asi dovedete představit, je to průnik dvou polorovin, jejich hranice se protínají v bodě $(1, 1)$. V $\mathbb{R}^3$ je to průnik tří poloprostorů, jejich hranice se protínají se v bodě $(1, 1, 1)$.

i) Pro nenulovou matici $\mathbf{A}$ jsou všechny body hraniční. Množina ovšem může být i prázdná. Pro nulovou matici je množina buď prázdná (při nenulovém $\mathbf{b}$) nebo je to celý prostor (při nulovém $\mathbf{b}$). Jen poslední případ odpovídá množině rovné celému prostoru, tj. všechny její body jsou vnitřní.

j) Hranice (dva rovnoběžné afinní prostory) odpovídají místu, kde nastává jedna nebo druhá rovnost. Mezi těmito afinními prostory jsou vnitřní body množiny.

k) Ukážeme, že všechny prvky dané množiny singulárních matic jsou hraniční při použití Frobeniovy normy. Máme $\mathbf{X}$ singulární matici a budeme sledovat, co se děje v jejím okolí. Pokud má

$\mathbf{X}$ kladná vlastní čísla, označme M nejmenší z nich, jinak volme $M = 1$. Uvažujme množinu matic $U = \{\mathbf{X} - \alpha\,\mathbf{I};\ \alpha \in (0, M)\}$. Všechny tyto matice jsou regulární, protože kdyby měly být singulární, pak je $\det(\mathbf{X} - \alpha\,\mathbf{I}) = 0$ a tedy α je vlastní číslo matice $\mathbf{X}$, ale to není pravda. Přitom mnoina U tvoří z geometrického pohledu vnitřek úsečky v prostoru $\mathbb{R}^{n^2}$ s jedním krajním bodem $\mathbf{X}$. Všechna okolí bodu $\mathbf{X}$ tuto úsečku obsahují, tedy obsahují regulární matice a tudíž žádné okolí bodu $\mathbf{X}$ neleží celé uvnitř zadané množiny singulárních matic.

l) Všechny body jsou hraniční. Vytvoříme matici $\mathbf{V}$ jenž je celá nulová s výjimkou jediné jedničky na pozici 1,1 (v levém horním rohu). Množina matic $U = \{\mathbf{X} + \alpha\mathbf{V};\ \alpha \in (0, 1)\}$ nesplňuje podmínku $\mathbf{Y}^T\mathbf{Y} = \mathbf{I}$, protože v prvním sloupci je modifikované jen první číslo, takže po modifikaci už takový sloupec nemá jednotkovou velikost. Přitom množina U je z geometrického pohledu vnitřek úsečky s krajním bodem $\mathbf{X}$. Další argumentace je stejná, jako v případě úlohy k).

9.4, 9.5, 9.6, 9.7, 9.8 Podrobné řešení je ve skritpech.

9.9 Může se to stát. Např. funkce $f(x) = |x^2 - 1|$ má v bodě $x = 0$ lokální maximum, ale nemá na $\mathbb{R}$ globální maximum. Pro funkci $-f$ pak platí, že má v bodě $x = 0$ lokální minimum ale nemá na $\mathbb{R}$ globální minimum.

9.10 Nemůže nabývat extrému. Vnitřní bod $\mathbf{x}$ má kolem sebe okolí, které celé leží v množině. Vydáme-li se uvnitř tohoto okolí ve směru gradientu funkce (který je pro lineární funkci ve všech bodech stejný), dostaneme se do bodu s větší funkční hodnotou než je $f(\mathbf{x})$. Takže v bodě $\mathbf{x}$ nemůže být maximum. Vydáme-li se ve směru mínus gradientu, prokážeme, že v bodě $\mathbf{x}$ nemůže být ani minimum.

9.11 Platí jen jedna ekvivalence. Je-li $\mathbf{x}$ globálním minimem na X pak nemusí být globálním minimem na $\mathbb{R}^n$, prptpže toto globální minimum může být mimo množinu X. Obrácené tvrzení je pravdivé. Je.li v bodě $\mathbf{x} \in X$ globální inimum na $\mathbb{R}^n$ pak ja to i globální minimum na X.

9.12 Pro nekonstantní lineární funkci se stačí podívat na cvičení 9.10. Vidíme, že taková funkce nemůže mít extrém (jakýkoli, lokální nebo globální) ve vnitřním bodě množiny. Má-li tedy funkce extrém, musí to být v hraničním bodě. Naopak konstantní funkce má extrém (globální i lokální, minimum i maximum) ve všech bodech množiny, nejen tedy v hraničních bodech.

9.13 a) Viz řešení ve skriptech.

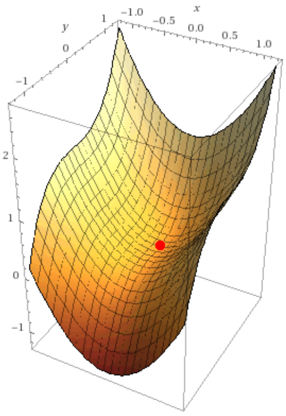
b) Při dvou bodech například $\mathbf{a}_1 = (1, 0),\ \mathbf{a}_2 = (-1, 0)$ máme dvě globální maxima na jednotkovém kruhu v bodech $(0, \pm 1)$. Při třech bodech například $\mathbf{a}_1 = (1, 0),\ \mathbf{a}_2 = (-1, 0), \mathbf{a}_3 = (0, 1)$ máme globální maximum v bodě $(0, -1)$ a dvě lokální maxima v bodech $(\pm\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)$. Když odstraníme např. bod $\mathbf{a}_1$ a ponecháe jen $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, pak je lokální maximum v bodě $(-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)$ a globální maximum je v bodě $(\sqrt{2}/2,\ -\sqrt{2}/2)$.

c) Pro kružnici s poloměrem menším než 1 a středem v počátku máme maximum v počátku a dále maxima na obvodu jednotkového kruhu. Které z nich je větší, pak to je globální maximum. Při kružnici se středem např v bodě $(1/2, 0)$ a spoloměrem menším než $3/2$ je jedno maximum v tomto bodě a druhé v bodě $(-1, 0)$. Dále si hrajte sami.

Kapitola 10

10.1 **c)** Hessián má kladná vlastní čísla, je tedy pozitivně definitní a funkce má v daném bodě minimum.

a) Hessián je indefinitní, tj. v daném bodě je sedlo. Ve směrech prvních dvou vlastních vektorů se funkce v daném bodě chová řádově jako x^2 v nule a ve směru posledního vlastního vektoru jako $-x^2$ v nule.

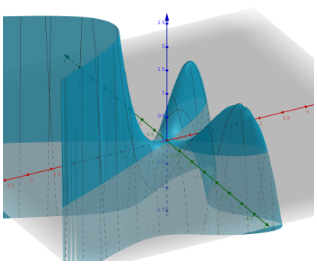


b) Nelze o extrému nic říci, protože je jedno vlastní číslo nula. Ve směru vlastního vektoru příslušného tomuto nulovému vlastnímu číslu se funkce může chovat jako x^3 v nule, pak tam je „skluzavka“, ale ne minimum ani maximum. Nebo se tam může chovat řádově jako x^4, pak v daném bodě je minimum, nebo se tam může chovat jako $-x^4$ a pak je v daném bodě sedlo. To by se dalo vyšetřit tak, že bychom redukovali vyšetřování funkce jen v daném směru, měli bychom tím pádem funkci jedné proměnné, která má první i druhou derivaci v daném bodě nulovou. Při nenulové třetí derivaci máme „skluzavku“, při nulové třetí derivaci a nenulové čtvrté máme minimum nebo sedlo. Je-li i tato derivace nulová, pak záleží na tom, který řád derivace je poprvé nenulový (lichý nebo sudý). Jak vypadá skluzavka zjistíte prohlídkou dětských hřišť nebo pohledem na obrázek vlevo. Bod, ve kterém jsou první derivace ve všech směrech nulové (tj. tečny tam jsou vodorovné), je vyznačen červeným puntíkem.

10.2 **e)** $f' = [6y^2 - 6x^2, 12xy - 12y^3]$. Stacionární body jsou body, kde $f' = [0\ 0]$, takže je třeba řešit soustavu $6y^2 - 6x^2 = 0,\ 12xy - 12y^3 = 0$. Jedno řešení je $(0,0)$. Dále z první rovnice vidíme, že $x = \pm y$. Dosadíme-li $x = y$ do druhé rovnice, máme řešení $(1,1)$. Dosadíme-li $x = -y$, máme řešení $(1,-1)$. Jiná řešení soustava nemá. Máme tedy tři stacionární body. Hessián:

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} -12x & 12y \\ 12y & 12x - 36y^2 \end{bmatrix},$$

$$f''(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f''(1,1) = 12\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad f''(1,-1) = 12\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$



Pro oba případy $f''(1,1)$ i $f''(1,-1)$ je příslušný Hessián negativně definitní (má záporná vlastní čísla, spočtěte si je), takže v bodech $(1,1)$ a $(1,-1)$ má funkce lokální maximum. V bodě (0,0) a ve směru osy x se zadaná funkce $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$ chová jako $-2x^3$ (dosaďte $y = 0$) a ve směru osy y se chová jako $-3y^4$ (dosaďte $x = 0$). Takže v tomto bodě to je „skluzavka“ (ve směry osy x) navíc orientovaná „vzhůru dnem“, protože ve směru osy y se chová jako $-3y^4$ (podstatné je, že ten koeficient u sudé mocniny je záporný).

Poznámka. Protože jen v ojedinělých případech se daří najít analyticky řešení příslušné nelineární soustavy rovnic sestavené z požadavku na stacionární body $f' = \mathbf{o}$, máme za úkol se v tomto týdnu zabývat numerickými metodami, které umožní najít řešení takové soustavy rovnic aspoň přibližně a za předpokladu, že metodě nabídneme „dostatečně rozumnou“ výchozí aproximaci. Metody pak vezmou tuto hodnotu, udělají jeden *iterační krok* a vytvoří další aproximaci. Tu pak mohou vzít znovu a vytvořit (obvykle stejným) iteračním krokem další aproximaci. Za ideálního stavu věcí se tyto jednotlivé aproximace stále zlepšují a výsledek se (rozumnou rychlostí) zpřesňuje.

V tomto textu značím výchozí aproximaci (i postupnou další) jako $\mathbf{a}$ (ve skriptech značeno obvykle $\mathbf{x}_k$) a nově počítanou aproximaci značím jako $\mathbf{x}$ (ve skriptech značeno $\mathbf{x}_{k+1}$).

Přehled numerických metod zmíněných v tomto kurzu je v následující tabulce

Tabulka shrnující numerické metody tohoto týdne

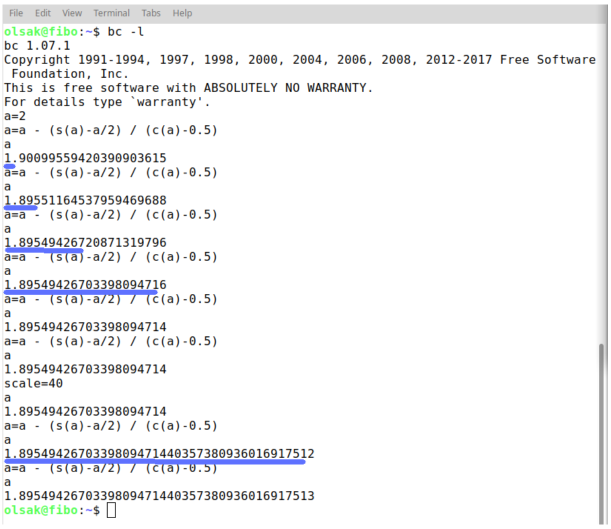
Název metody	co počítá	iterační vzorec	poznámka
Gradientní	$\min f(\mathbf{x})$ pro $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	$\mathbf{x} = \mathbf{a} - f'(\mathbf{a})^T$	směr největšího spádu
Newtonova	$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ pro $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$	$\mathbf{x} = \mathbf{a} - (\mathbf{g}'(\mathbf{a}))^{-1}\,\mathbf{g}(\mathbf{a})$	$\mathbf{g}'(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regul.
Newtonova	$\min f(\mathbf{x})$ pro $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	$\mathbf{x} = \mathbf{a} - (f''(\mathbf{a}))^{-1}\,(f'(\mathbf{a}))^T$	$(f')^T = \mathbf{g}$
Gauss-Newtonova	$\min \lVert\mathbf{g}(\mathbf{x})\rVert^2$ pro $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	$\mathbf{x} = \mathbf{a} - (\mathbf{g}'(\mathbf{a}))^{+}\,\mathbf{g}(\mathbf{a})$	$(\mathbf{g}')^+ = ((\mathbf{g}')^T\mathbf{g}')^{-1}(\mathbf{g}')^T$
Levenberg-Marq.	$\min \lVert\mathbf{g}(\mathbf{x})\rVert^2$ pro $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	$\mathbf{x} = \mathbf{a} - (\mathbf{g}'(\mathbf{a}))^{*}\,\mathbf{g}(\mathbf{a})$	$(\mathbf{g}')^* = ((\mathbf{g}')^T\mathbf{g}' + \mu_k\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{g}')^T$

Newtonova metoda najde obecně stacionární bod, ne nutně minimum.

Všechny metody mají iterační vzorec ve tvaru $\mathbf{a}$ – „směr“. Je-li ten „směr“ použit bez další multiplikativní konstanty, mluví se o *čisté* metodě. Někdy se „směr“ nejprve násobí nějakým koeficientem α_k, pak mluvíme o zobecněné metodě.

Doporučuji se neučit vzorečky metod nazpaměť, ale spíše je umět odvodit. Např. Newtonovu metodu odvodíme z obrázku v §10.4.1 ve skriptech s nakreslenou tečnou, Gauss-Newtonovu metodu odvodíme z normální rovnice přeurčené soustavy $\mathbf{g}^T\mathbf{g} = 0$ (kde $\mathbf{g}$ lokálně aproximujeme jako $\mathbf{Ax} - \mathbf{b}$, takže $\mathbf{A} = \mathbf{g}'$) atd. Toto vše bylo jistě podrobně ukázáno na přednášce.

10.5 V úloze máme $g(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$, tedy $g\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ a hledáme x tak, že $g(x) = 0$. Iterační předpis Newtonovy metody je $x = a - (g'(a))^{-1}g(a) = a - \frac{1}{\cos a - 1/2}(\sin a - \frac{1}{2}a)$. V zadání úlohy byl požadavek použít kalkulačku a zkusit na ni najít výsledné x s největší přesností, jakou dokážeme. Moje oblíbená kalkulačka se jmenuje `bc` (pradávný unixový program „big calculator“). Ta umožňuje výpočty s libovolnou přesností. Z toho plyne, že nemohu výsledek napsat s největší přesností, jakou dokážu, protože tato přesnost není omezena (až na můj čas a strojovou paměť, což nejsou jednoznačně dané veličiny). Modře jsem podtrhnul, kolik cifer už je v dané iteraci vyhodnoceno přesně. Pro Newtonovu metodu jedné proměnné platí, že když se funkce chová „normálně“ a je nalezena dobrá výchozí iterace, pak každou další iterací se zhruba zdvojnásobí počet cifer s přesným výsledkem. To je ve výpočtu (který byl původně počítán na 20 míst) krásně vidět. Při přechodu na vyšší přesnost výpočtu stačila jedna další iterace, a měl jsem přesnost na 39 míst.



```
File  Edit  View  Terminal  Tabs  Help
olsak@fibo:~$ bc -l
bc 1.07.1
Copyright 1991-1994, 1997, 1998, 2000, 2004, 2006, 2008, 2012-2017 Free Software
 Foundation, Inc.
This is free software with ABSOLUTELY NO WARRANTY.
For details type `warranty'.
a=2
a=a - (s(a)-a/2) / (c(a)-0.5)
a
1.90099559420390903615
a=a - (s(a)-a/2) / (c(a)-0.5)
a
1.89551164537959469688
a=a - (s(a)-a/2) / (c(a)-0.5)
a
1.89549426720871319796
a=a - (s(a)-a/2) / (c(a)-0.5)
a
1.89549426703398094716
a=a - (s(a)-a/2) / (c(a)-0.5)
a
1.89549426703398094714
a=a - (s(a)-a/2) / (c(a)-0.5)
a
1.89549426703398094714
scale=40
a
1.89549426703398094714
a=a - (s(a)-a/2) / (c(a)-0.5)
a
1.8954942670339809471440357380936016917512
a=a - (s(a)-a/2) / (c(a)-0.5)
a
1.8954942670339809471440357380936016917513
olsak@fibo:~$
```

10.6 $f'(x,y) = [2x - 2\cos(y^2 - 2x),\ 2y\cos(y^2 - 2x) - 1]$, Hessián:

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2 - 4\sin(y^2-2x) & 4y\sin(y^2-2x) \\ 4y\sin(y^2-2x) & -4y^2\sin(y^2-2x) + 2\cos(y^2-2x) \end{bmatrix}$$

Iterační krok:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 - 4\sin(b^2-2a) & 4b\sin(b^2-2a) \\ 4b\sin(b^2-2a) & -4b^2\sin(b^2-2a) + 2\cos(b^2-2a) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2a - 2\cos(b^2-2a) \\ 2b\cos(b^2-2a) - 1 \end{bmatrix}$$

Výchozí iterační krok pro $(a,b) = (1,1)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 - 4\sin(-1) & 4\sin(-1) \\ 4\sin(-1) & -4\sin(-1) + 2\cos(-1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 - 2\cos(-1) \\ 2\cos(-1) - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6521 \\ 0.7185 \end{bmatrix}$$

Nyní bychom dosadili $(a,b) = (0.6521, 0.7185)$ a iterační krok opakovali. Stroj typicky necháme opakovaně počítat inverzní matici (pokaždé s jinými konstantami). Druhá možnost je nechat stroj vypočítat inverzní matici symbolicky a pak jen v iteračních krocích dosazovat konkrétní (a,b). V tomto příkladě jednotlivé iterace vypadají takto: $(1,1) \to (0.6521, 0.7185) \to (0.6778, 0.7272) \to (0.6794, 0.7313) \to (0.6802, 0.7331) \to 15\times \to (0.68074537, 0.73448902)$. Po 20 iteracích máme výsledek s přesností na 8 desetinných míst.

10.9 Soustava není pochopitelně lineární (jsou tam monomy druhého stupně). Proč soustava nemá řešení je vysvětleno ve skriptech. Dále počítáme iterační vzorce, což bude *dřina*. Hledáme minimum funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = (x+y-2xy-1)^2 + (-x+y+xy+3)^2 + (x-y+xy-1)^2.$$

$$(f'(x,y))^T = \begin{bmatrix} 2(x+y-2xy-1)(1-2y) + 2(-x+y+xy+3)(-1+y) + 2(x-y+xy-1)(1+y) \\ 2(x+y-2xy-1)(1-2x) + 2(-x+y+xy+3)(1+x) + 2(x-y+xy-1)(-1+x) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 12xy^2 - 8xy + 6x - 4y^2 + 6y - 10 \\ 12x^2y - 4x^2 + 6x - 8xy + 6y + 6 \end{bmatrix}.$$

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 12y^2 - 8y + 6 & 24xy - 8x - 8y + 6 \\ 24xy - 8x - 8y + 6 & 12x^2 - 8x + 6 \end{bmatrix}.$$

Gradientní metoda:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12ab^2 - 8ab + 6a - 4b^2 + 6b - 10 \\ 12a^2b - 4a^2 + 6a - 8ab + 6b + 6 \end{bmatrix}.$$

Newtonova metoda:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12b^2 - 8b + 6 & 24ab - 8a - 8b + 6 \\ 24ab - 8a - 8b + 6 & 12a^2 - 8a + 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 12ab^2 - 8ab + 6a - 4b^2 + 6b - 10 \\ 12a^2b - 4a^2 + 6a - 8ab + 6b + 6 \end{bmatrix}.$$

Gauss-Newtonova metoda:

$$\mathbf{g}(x,y) = \begin{bmatrix} x+y-2xy-1 \\ -x+y+xy+3 \\ x-y+xy-1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}'(x,y) = \begin{bmatrix} 1-2y & 1-2x \\ -1+y & 1+x \\ 1+y & -1+x \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1-2b & -1+b & 1+b \\ 1-2a & 1+a & -1+a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-2b & 1-2a \\ -1+b & 1+a \\ 1+b & -1+a \end{bmatrix} \right)^{-1}$$
$$\begin{bmatrix} 1-2b & -1+b & 1+b \\ 1-2a & 1+a & -1+a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+b-2ab-1 \\ -a+b+ab+3 \\ a-b+ab-1 \end{bmatrix}.$$

Levenberg-Marquardtova metoda:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1-2b & -1+b & 1+b \\ 1-2a & 1+a & -1+a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-2b & 1-2a \\ -1+b & 1+a \\ 1+b & -1+a \end{bmatrix} + \mu_k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$
$$\begin{bmatrix} 1-2b & -1+b & 1+b \\ 1-2a & 1+a & -1+a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+b-2ab-1 \\ -a+b+ab+3 \\ a-b+ab-1 \end{bmatrix}.$$

10.10 Obecně minimální vzdálenost dvou křivek řeší optimalizační úloha

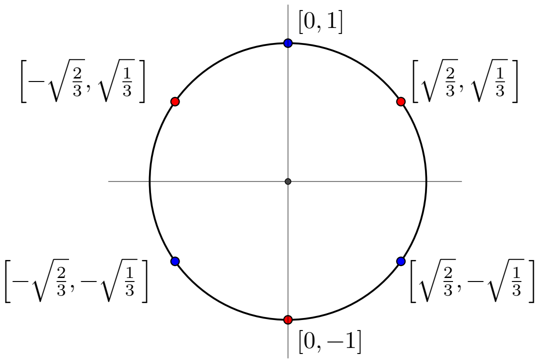
$$\min\{\|(x,y)-(u,v)\|^2;\ (x,y) \text{ leží na první křivce a } (u,v) \text{ leží na druhé křivce}\} =$$
$$= \min\{(x-u)^2 - (y-v)^2;\ x^2 = y,\ (u-2)^2 + v^2 = 1\},$$

což s metodou nejmenších čtverců $\min\{(x^2-y)^2 + ((x-2)^2 + y - 1)^2\}$ (viz úlohu zmíněnou v zadání) nemá nic společného. Protože poloha bodu na parabole minimalizující vzdálenost od kružnice je stejná, jako poloha bodu na parabole minimalizující vzdálenost od středu této kružnice, stačí řešit úlohu $\min\{(x-2)^2+(y-0)^2, y=x^2\}$, což po převedení na jednu proměnou vyřešíme jako $\min\{(x-2)^2 + (x^2)^2\}$. To se dá zderivovat a najít minimum. Řešení kubické rovnice $4x^3 + 2x - 4 = 0$ je třeba spočítat strojem (třeba Newtonovou metodou), výsledek je přibližně 0.83512. Přímý vzorec pro kořeny této kubické rovnice dává *obludný* výsledek se čtyřmi do sebe vzájemně vnořenými druhými a třetími odmocninami a konstantami 330, 18 atd.

10.11 Máme odvodit vzorec Newtonovy metody $\mathbf{x} = \mathbf{a} - (f''(\mathbf{a}))^{-1}(f'(\mathbf{a}))^T$. Taylorův polynom druhého řádu funkce f v bodě $\mathbf{a}$ je $T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})\,(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + (\mathbf{x}-\mathbf{a})^T\,(f''(\mathbf{a})/2)\,(\mathbf{x}-\mathbf{a})$. Minimum polynomu druhého řádu je v bodě, kde má polynom první derivaci nulovou, tedy v bodě $\mathbf{x}$, pro který je $T'(\mathbf{x}) = 0$. Funkci T derivujeme podle $\mathbf{x}$, tj. na objekty $f'(\mathbf{a})$ a $f''(\mathbf{a})$ se díváme jako na konstantní matice. Při derivování nám pomohou první a třetí vzorec v tabulce v §8.5.2 ve skriptech. $T'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{a}) + (\mathbf{x}-\mathbf{a})^T(f''(\mathbf{a})/2 + (f''(\mathbf{a}))^T/2) = f'(\mathbf{a}) + (\mathbf{x}-\mathbf{a})^T f''(\mathbf{a}) = 0$. Přejdeme k transponované rovnici: $f''(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = -(f'(\mathbf{a}))^T$. Vynásobíme zleva maticí inverzní: $\mathbf{x}-\mathbf{a} = -(f''(\mathbf{a}))^{-1}(f'(\mathbf{a}))^T$. a požadovaný vzorec je odvozen.

Kapitola 11

11.1 d) Úlohu můžeme vyřešit třemi způsoby a porovnat efektivitu práce.
1. Převedením do polárních souřadnic máme $(x, y) = (\cos t, \sin t)$, takže hledáme extrémy funkce $\cos^2 t \, \sin t$, derivace rovná nule: $-2\cos t \, \sin^2 t + \cos^2 t \, \cos t = \cos t\,(\cos^2 - 2\sin^2 t) = 0$. Takže $\cos t = 0$, tj. $t = \pm\frac{\pi}{2}$ nebo $\cos^2 t - 2\sin^2 t = 0$, tj. $1 - 3\sin^2 t = 0$. Z první části řešení máme $x = 0, y = \pm 1$. Z druhé části řešení sice nevyjádříme přesně t, ale víme, že $\sin^2 t = \frac{1}{3}$, takže $y^2 = \frac{1}{3}$ a tedy $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Na kružnici tedy máme šest bodů $(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(0, 1)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(0, -1)$, $(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. Jak plyne z funkčních hodnot, v těchto bodech je po řadě max (kladná hodnota), min (nula) max (kladná hodnota) min (záporná hodnota) max (nula) min (záporná hodnota). Na obrázku jsou maxima vyznačena červeně a minima modře, přirozeně se na kružnici střídají.



2. Vyjádříme-li z podmínky $x^2 = 1 - y^2$ funkci f, máme $f = (1 - y^2)y$, na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, což po zderivování a položení rovno nule dává $y^2 = \frac{1}{3}$, a to dává čtyři z šesti bodů. Dále musíme nezapomenout, že lokálními extrémy této funkce jedné proměnné jsou i krajní body intervalu, tedy $y = \pm 1$, což dává zbylé dva body.
3. Lagrangeova funkce $L(x, y, \lambda) = x^2 y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Po jejím zderivování postupně podle všech třech proměnných a položením rovno nule máme $2xy + 2x\lambda = 0$, $x^2 + 2y\lambda = 0$ a třetí rovnice je okrajová podmínka $x^2 + y^2 = 1$. Z první rovnice po vytknutí x máme $x = 0$ nebo $y = -\lambda$. První možnost dává dva body $(0, 1)$, $(0, -1)$ a druhou možnost dosadíme do druhé rovnice a s využitím třetí opět máme $y^2 = \frac{1}{3}$ což dává zbylé čtyři body s extrémy.

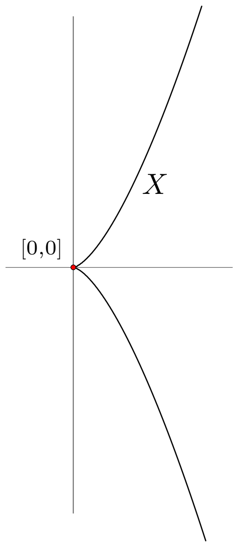
11.4 c) **1.** Z okrajové podmínky plyne $x^2 = \frac{1}{y}$, takže funkci $x^2 + y^2$, kterou minimalizujeme, máme převedenu do jedné proměnné $f(y) = \frac{1}{y} + y^2$. Zderivování a položení rovno nule dává $-\frac{1}{y^2} + 2y = 0$, tedy $y^3 = \frac{1}{2}$, $y = 1/\sqrt[3]{2}$ a zpětné dosazení pro x dává $x^2 = \sqrt[3]{2}$, tedy $x = \pm\sqrt[6]{2}$.
2. Ještě jednou jinak. $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 y - 1)$. Zderivování této funkce postupně podle všech tří proměnných a položení rovno nule dává $2x + 2\lambda xy = 0$, $x(1 + \lambda y) = 0$ a třetí rovnice je okrajová podmínka. Z první rovnice je $x = 0$ nebo $\lambda y = -1$. První možnost nepřipadá v úvahu, protože z ní a z druhé rovnice plyne, že také $y = 0$, ale dvojice $(0, 0)$ nevyhovuje okrajové podmínce. Druhá možnost dává $\lambda = -\frac{1}{y}$ a když k tomu přidáme fakt z okrajové podmínky $x^2 = \frac{1}{y}$ a oba mezivýsledky dosadíme do druhé rovnice, máme $2y + \frac{-1}{y}\frac{1}{y} = 0$, což vede na $y = \frac{1}{2y^2}$ a to vede na stejný výsledek, jako v případě 1.

11.5 d) Pokud mě paměť neklame, tak půllitr jsem na cvičení dělal v době, kdy jsme se mohli fyzicky vídat. Budu komentovat tedy něco jiného, třeba podúkol (b).

b) Hledá se minimum $ab + 2ac + 2bc$ za podmínky $abc = 1$. Strany a, b značí základnu a c výšku krabice bez víka. Okrajovou podmínku $c = 1/(ab)$ zaneseme do účelové funkce a máme z ní funkci bez podmínky se dvěma proměnnými $f(a, b) = ab + 2/b + 2/a$. Hledáme stacionární body zderivováním v obou proměnných a položením nule: $b = 2/a^2 = 0$, $a - 2/b^2 = 0$, tedy $a^2 b = 2$ a taky $ab^2 = 2$, tj. $a^2 b - ab^2 = 0$. Po vytknutí a máme $a = 0$ což zamítneme, neboť se to neslučuje s okrajovou podmínkou. Druhá možnost vede na nepřekvapivý výsledek $ab = b^2$ a tedy $a = b$. Takže z $a^2 b = 2$ plyne $a^3 = 2$, což vede na výsledek $a = b = \sqrt[3]{2}$ a z okrajové podmínky pak $c = 1/\sqrt[3]{4}$. Protože ale nás nezajímal konkrétně objem=1, výsledek určuje pouze poměry stran, tedy $a = b$, $c = 1/(ab)$ a $a/c = \sqrt[3]{8} = 2$. Všechny strany je třeba pronásobit takovým koeficientem, aby abc bylo rovno požadovanému objemu.
2. Metoda Lagrangeových multiplikátorů dá po menší námaze stejný objevný výsledek, že totiž $a = b$. Zkuste si to spočítat sami.
3. Asi nejrychleji jsme hotovi při použití „selského rozumu". Ta krabice nemůže být „asymetrická" ve směru stran a a b, protože žádná z těch stran není v účelové funkci nijak preferovaná.

Takže $a = b$ a z okrajové podmínky $c = 1/(ab)$. Nyní po využití okrajové podmínky je účelová funkce jen v jedné proměnné a její minimum najedeme v bodě $a = \sqrt[3]{2}$.

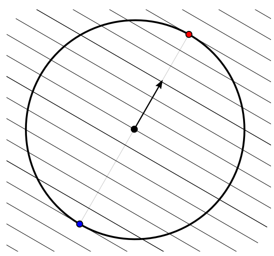
11.8 Metoda Lagrangeových multiplikátorů kolabuje obdobně jako státní rozpočet po koronavirové pandémii kvůli tomu, že množina X z okrajové podmínky nemá v bodě minima $(0, 0)$ tečný prostor. Je tam hrot. Množina $X = \{(x, y);\ x^3 = y^2\}$ se skládá z grafů funkcí $y = \pm\sqrt{x^3}$. Zkusíme si v tomto příkladě zahájit metodu Lagrangeových multiplikátorů a uvidíme, co to udělá...



$L = x + \lambda(x^3 - y^2)$. Zderivováním a položením rovno nule dostáváme $1 + 3\lambda x^2 = 0$ a $-2\lambda y = 0$ a okrajová podmínka. Z druhé rovnice plyne, že musí být $y = 0$ nebo $\lambda = 0$. První případ společně s okrajovou podmínkou $x^3 = y^2$ vede na $x = 0$, ale to nevyhovuje první rovnici. Druhý případ přímo nevyhovuje první rovnici. Takže soustava sestavená metodou Lagranegeových multiplikátorů nemá řešení.

11.12 a) Bez té pohádky o entropii hledáme maximum funkce $f(\mathbf{p}) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$ za podmínky $\sum p_i = 1$. Lagrangeova funkce je $L(\mathbf{p}, \lambda) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right)$ a její derivace podle každé proměnné p_i položíme rovny nule: $\frac{\partial L}{\partial p_i} = L'_i = -(\log p_i + p_i \frac{1}{p_i}) + \lambda = 0$, tedy $\lambda = \log p_i + 1$. Protože pravá strana naposledy zapsané rovnosti je prostá v p_i a máme zde n takových rovností rovných stále stejnému λ, musí se všechny p_i vzájemně rovnat. Nebo jinak: aplikujeme prostou exp na obě strany rovnosti (po přesunutí jedničky nalevo) a máme $e^{\lambda-1} = p_i$. Podstatné tedy je, že $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$. Ta poslední rovnost plyne z okrajové podmínky. (Pozn: metoda „selského rozumu“ nám taky říká, že se proměnné musejí rovnat, když žádná není ve vzorcích preferovaná.) To je stacionární bod. Hodnota je v tomto bodě kladná, protože logaritmy jsou záporné a před vzorečkem pro f je jedno mínus. Jdeme-li limitně ke kraji definičního oboru (který už není součástí definičního oboru), tj. jedno z $p_i = 1$ a ostatní jsou nulové, pak $\lim f(\mathbf{p}) = 0$, protože $1 \log 1 = 0$ a $\lim_{t\to 0} t \log t = 0$ z L'Hospitalova pravidla. Takže v bodě $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ jsme našli maximum funkce f.

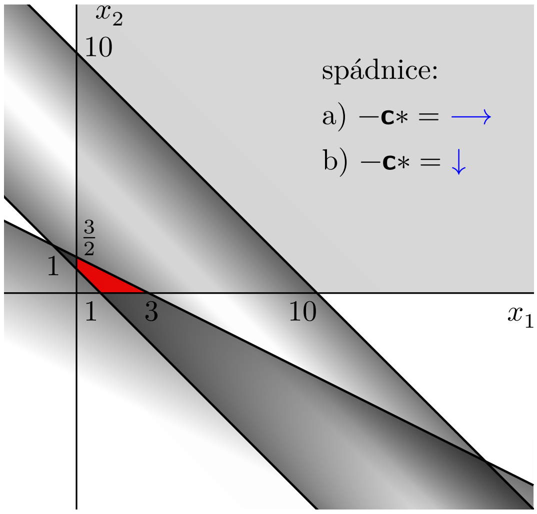
11.? Toto cvičení bylo v aktuální verzi skript změněno na řešený příklad 11.16, ve kterém maximalizujeme $\mathbf{a}^T\mathbf{x}$ za podmínky $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$. Dáváme sem přesto řešení. $L = \mathbf{a}^T\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{x}^T\mathbf{x} - 1)$. Nyní naráz zderivujeme dle všech n proměnných a příslušných n rovnic položíme rovno nule: $L' = \mathbf{a}^T + \lambda(2\mathbf{x}^T) = \mathbf{0}^T$. K tomu ještě přidáme okrajovou podmínku $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$. Systém rovnic transponuji a spočítám z něj $\mathbf{a} = -2\lambda\mathbf{x}$, takže $\mathbf{x} = \mathbf{a}/(-2\lambda)$. Tento výsledek dosadím do okrajové podmínky $(\mathbf{a}/(-2\lambda))^T(\mathbf{a}/(-2\lambda)) = \|\mathbf{a}\|^2/(4\lambda^2) = 1$, takže $\|\mathbf{a}\|^2 = 4\lambda^2$ a máme spočítáno $\lambda = \pm\|\mathbf{a}\|/2$. Když tento poznatek uplatníme v systému rovnic $(L')^T = \mathbf{0}$, dostáváme $\mathbf{a} \pm (\|\mathbf{a}\|/2)\,(2\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ a z toho plyne $\mathbf{x} = \mp\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$, což je normalizovaný gradient funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}$. Protože funkce roste ve směru gradientu, je maximum v bodě $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ a minimum v bodě $-\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$. Geometricky: hledáme na sféře místo, které maximalizuje lineární funkci plynule rostoucí ve směru gradientu. Na obrázku pro případ 2D jsou nakresleny její vrstevnice a její gradient. Maximum je přirozeně v místě normovaného gradientu.



11.18 $L = \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$. Tentokrát (poprvé v tomto cvičení) máme více než jednu proměnou λ. Je jich obecně m a jsou sdruženy do vektoru $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, kde m je počet řádků matice $\mathbf{A}$. Okrajová podmínka má totiž m lineárních rovnic, každá je reprezentovaná jedním řádkem matice $\mathbf{A}$ a jedním prvkem z vektoru $\mathbf{b}$. Maticovým derivováním podle $\mathbf{x}$ a položením nulovému vektoru dostáváme $L' = 2\mathbf{x}^T\mathbf{C} + \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}^T$. Tento systém rovnic zapíšeme transponovaně $-2\,\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}$ a přihodíme okrajovou podmínku $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Máme systém $m + n$ rovnic s n neznámými x_i a m neznámými λ_j. První podsystém násobíme zleva maticí $\mathbf{C}^{-1}$ ($\mathbf{C}$ je regulární, protože je pozitivně definitní) a máme $-2\,\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}$. Dále zleva přihodíme $\mathbf{A}$ a vzpomeneme si na systém okrajových podmínek $-2\,\mathbf{b} = -2\,\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}$. Z tohoto zápisu lze vyjádřit $\boldsymbol{\lambda}$ jako $\boldsymbol{\lambda} = -2\,(\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}$ což zpětně uplatníme v prvním podsystému rovnic $-2\,\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T(-2\,(\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b})$. Po vykrácení konstantou -2 a vynásobení maticí $\mathbf{C}^{-1}$ zleva máme konečný výsledek $\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}$.

Kapitola 12

12.1 Máme tři proměnné, první dvě jsou použity v nerovnostech, jejich vymezení lze nakreslit do 2D obrázku. Průnik všech pěti polorovin vymezených nerovnostmi (tři zapsané zvlášť a dále první kvadrant $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) je na obrázku vyznačen červeně. Pokud by někoho zajímalo, jak pohodlně přijít na polohu těch přímek: v každé nerovnosti nejprve položím $x_1 = 0$ a spočítám x_2 jakoby to byla rovnost. Dostanu průsečík s osou x_2. Pak položím $x_2 = 0$ a spočítám x_1 a dostanu průsečík s osou x_1. Mám dva body, proložím je přímkou. Příslušná polorovina (nahoru nebo dolu od přímky) vyplyne z orientace menšítka v nerovnosti.



Nyní si do obrázku nakreslíme $-\mathbf{c}*$, kde $\mathbf{c}*$ přebírá jen první dvě souřadnice vektoru $\mathbf{c}$. Vektor $-\mathbf{c}*$ je směr největšího klesání účelové funkce v prvních dvou souřadnicích, neboť to je mínus gradient. Vydáme-li se v červené oblasti tímto směrem největšího klesání, narazíme v případě a) na bod $[3, 0]$. Dobrá je představa sáňkaře na oplocené sjezdovce, který má dány mantinely sjezdovky a její spádnici. Kam dosáňkuje? Protože třetí souřadnice vektoru $-\mathbf{c}$ je v případě a) záporná, v rámci 3D obrázku je minimum pro případ $x_3 = 0$. V případě b) sáňkař dosáňkuje do nějakého bodu k mantinelu $x_1 \in \langle 1, 3\rangle$ a $x_2 = 0$. Protože třetí souřadnice vektoru $-\mathbf{c}$ je v případě b) nulová, minimum je stejné pro všechny body $x_1 \in \langle 1, 3\rangle, x_2 = 0, x_3 \in \langle 0, \infty)$. V případě c) na poloze bodu (sáněk) v červené oblasti nezáleží a ve směru x_3 se celkové minimum vylepšuje, kdykoli zvětšíme x_3, takže úloha je neomezená.

12.2 **a)** Pro odstranění nerovností přidáme slackové proměnné $u \geq 0, v \geq 0$:

$$\begin{aligned} \min\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 & \\ x_1 - \ x_2 - \ x_3 - \ u \ &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + \ v \ &= 5 \\ 2x_1 - \ x_2 - \ x_3 + 2x_4 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, u, v &\geq 0 \end{aligned}$$

a tuto soustavu podmínek zapíšeme maticově:

$$\min\,[2 \ \ 0 \ \ -3 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \\ v \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

b) Lineární program (12.11) je dopravní úloha. Proměnné jsou soustředěny do matice s m řádky a n sloupci, jejich součet se má minimalizovat, ale ne přímo: každá proměnná je v tomto součtu pronásobena vahou c_{ij}. Ve formulaci úlohy indexy i značí řádky uvedené matice a indexy j sloupce. Podmínka (12.11b) říká, že přímý součet (bez váhy) proměnných x_{ij} v každém řádku matice proměnných se má rovnat číslu a_i. Podmínka (12.11c) říká, že přímý součet proměnných v každém sloupci se má rovnat b_j. Pro přepsání úlohy do maticového vyjádření zahrneme všechny proměnné do jednoho vektoru $\mathbf{u}$ tak, že je postupně všechny přečteme po řádcích a výsledný vektor napíšeme do sloupce: $\mathbf{u} = [x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}]^T$. Nyní se zamyslíme nad tím, co přesně dělá první podmínka: součet proměnných v prvním řádku se má rovnat a_1. Tj. je třeba nashromáždit jedničky k proměnným prvního řádku a k ostatním nuly. To zařídí první řádek matice uvedené v rovnici (A). Druhý řádek zařídí splnění druhé z podmínek z (12.11b), atd., až (vizuálně) předposlední řádek zařídí splnění poslední podmínky z (12.11b). Ovšem (vizuálně) poslední řádek matice v rovnici (A) se fakticky skládá z dalších n řádků a když si pořádně rozmyslíte, co dělají jednotlivé řádky (rozepište si aspoň myšlenkově ty jednotkové matice do sady jedniček na diagonálách), tak zjistíte, že tyto řádky přesně korespondují s n podmínkami z (12.11c).

$$\begin{array}{c} \\ m\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ n\{ \end{array} \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{1}^T}^{n} & \overbrace{\mathbf{0}^T}^{n} & \dots & \overbrace{\mathbf{0}^T}^{n} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1}^T & \dots & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n & \dots & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \\ \\ \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \tag{A}$$

Řešení úlohy tedy zní: $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{u};$ za podmínky (A)$\}$.

12.3 c) Představme si, že máme hmotu o celkové hmotnosti 1 rozdělit do n proměnných x_i, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, tak, abychom navážili co nejvíce. Přitom každá proměnná má svůj koeficient váhy c_i, který tu hmotu násobí. Z představy vyplývá, že stačí nashromáždit veškerou hmotu do takové proměnné, která má největší koeficient váhy, a ostatní proměnné utřou nos, tj. zůstanou nulové. Nebo nabídnu představu ještě více ze života: máte n obchodníků, kteří vám nabízejí za jednotku Vaši hmoty c_i peněz. Co říká zákon trhu, ke kterému obchodníkovi půjdete svou hmotu prodat? Kdyby existovalo více indexů s největším c_i, pak odpovídajícím proměnným s těmito indexy můžeme rozdělit celkovou hmotu libovolně, celkový výsledek účelové funkce se v takovém případě nemění. Podmínka na sumu x_i v této úloze obsahuje nerovnost, tedy hmotu nemusíme spotřebovat celou. To uděláme právě tehdy, když všechna c_i jsou záporná, pak volíme všechna x_i nulová a hmotu nespotřebujeme vůbec. Pokud ale aspoň jedno c_i je kladné, veškerou hmotu soustředíme k největšímu c_i.

e) Jsou-li si vzájemně všechna c_i rovna, pak účelová funkce je rovna $c_1 \sum_{i=1}^n x_i$ a tu sumu máme v podmínce omezenu rozsahem $\langle -1, 1\rangle$. Tj. při $c_1 > 0$ je maximum v libovolném bodě $\mathbf{x}$, pro který je ta suma rovna jedné a hodnota maxima je c_1. Při $c_1 < 0$ je maximum v libovolném bodě, pro který je ta suma rovna -1 a hodnota maxima je rovna $|c_1|$. Zamyslíme se nad posledním případem. Nechť se c_i vzájemně nerovnají, tj. aspoň ve dvou indexech se liší. BÚNO (bez újmy na obecnosti) předpokládejme $c_1 > c_2$. Volme $x_1 = t, x_2 = -t$ pro $t \in \mathbb{R}$, $x_j = 0$ pro $j > 2$. To vyhovuje podmínkám úlohy. V těchto bodech má účelová funkce hodnotu $c_1 t + c_2(-t) = (c_1 - c_2)t$. Vidíme, že pro $t \to \infty$ je hodnota účelové funkce neomezená. Úloha je tedy neomezená.

f) Jako (c) jen s tím rozdílem, že vždy spotřebujeme hmotu o celkové hmotnosti k.

12.4 a) V souladu s §12.1.1 skript zavedeme proměnou z (kterou tam nazývají y) s vlastností, že $z \geq f$, kde f je konvexní po částech lineární účelová funkce původní úlohy, která se má minimalizovat. Místo účelové funkce pak minimalizujeme z. Požadavek minima zajistí, že nebude v bodě minima $z > f$, protože by se očividně dalo zmenšit. Nastane tedy rovnost $z = f$. Pointa tohoto triku je v tom, že nová účelová funkce je lineární (v proměnné z), zatímco původní účelová funkce lineární nebyla a nedala se přímo použít v algoritmech na řešení úloh lineárního programování. Jednotlivé „body zlomu“ původní účelové funkce jsme přestěhovali do okrajových podmínek úlohy. V naší konkrétní úloze máme součet dvou konvexních funkcí $|x_1|$ a $|x_2|$, použijeme tedy součet dvou proměnných $z_1 \geq |x_1|$ a $z_2 \geq |x_2|$. Dostáváme

$$\min\{z_1 + z_2;\ x_1, x_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}; z_1 \geq x_1; z_1 \geq -x_1; z_2 \geq x_2; z_2 \geq -x_2; 2x_1 - x_2 \geq 1; -x_1 + 2x_2 \geq 1\}$$

Je třeba si uvědomit, že když $z_1 \geq |x_1|$, pak je to to ekvivalentní s $z_1 \geq \max\{x_1, -x_1\}$ a to je ekvivalentní s $z_1 \geq x_1, z_1 \geq -x_1$. Analogicky to platí i pro z_2.

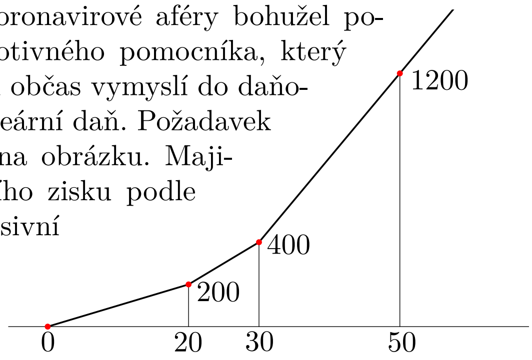
c) Tady jde jen o to rozepsat absolutní hodnotu do dvou sad nerovností:

$$\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x};\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}; -1 \leq \mathbf{d}^T\mathbf{x} \leq 1; \mathbf{x} \geq 0\}$$

f) Protože je $\|\mathbf{u}\|_\infty = \max_i |u_i|$, je $\|\mathbf{u}\|_\infty \leq 1$ ekvivalentní s $|u_i| \leq 1$ pro všechna i, tj. $-1 \leq u_i \leq 1$ pro všechna i, neboli $-\mathbf{1} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{1}$. Zadanou úlohu tedy přepíšeme snadno:

$$\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x};\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ -\mathbf{1} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{1}\}.$$

12.8 Podíváme se na kioskáře, který má nyní v období koronavirové aféry bohužel poněkud omezený svůj byznys. Přesto má v kiosku protivného pomocníka, který žádá progresivní mzdu, podobně jako naši zákonodárci občas vymyslí do daňového zákona č. 586/1992 Sb. progresivní po částech lineární daň. Požadavek pomocníka je vyjádřen po částech lineární funkcí f na obrázku. Majitel kiosku chce maximalizovat zisk ve tvaru původního zisku podle řešeného příkladu 1.10 mínus ztráty způsobené progresivní mzdou pomocníkovi. Takže jeho úloha zní:



$$\max \{ 120\, l + 76\, h - f \}$$

kde f je na obrázku vyjádřená v proměnné $x = l + h$, tedy

$$f(l+h) = \max\{10\,(l+h), 20\,(l+h) - 200, 40\,(l+h) - 800\}$$

Je třeba zavést pomocnou proměnou z jako v Cvičení 12.4(a), abychom měli účelovou funkci lineární a po částech lineární požadavky pomocníka převedli do okrajových podmínek. Je

$$z \geq f, \quad \text{tj.} \quad z \geq 10\,(l+h);\ z \geq 20\,(l+h) - 200;\ z \geq 40\,(l+h) - 800.$$

Úloha lineárního programování i s přidáním podmínek z řešené části tedy zní:

$$\max \{ 120\, l + 76\, h - z;\ z \geq 10\,(l+h);\ z \geq 20\,(l+h) - 200;\ z \geq 40\,(l+h) - 800;$$
$$2\,l + 1{,}5\,h \leq 100;\ 0{,}4\,l + 0{,}2\,h \leq 16;\ l, h \geq 0 \}$$

Je třeba si uvědomit, že **max**imalizujeme účelovou funkci, ve které se vyskytuje $-z$, takže v rámci toho se z **min**imalizuje. To znamená, že při $z > f$ ještě není dosaženo minima z a tedy v optimálním řešení bude $z = f$.

12.10 Armáda má svá množství střeliva a požadavky střelnic zanesené do tabulky, ve které x_i značí jednotlivý převoz od příslušného skladu k příslušné střelnici.

střelnice:	1	2	3
(6) sklad A	x_1	x_2	x_3
(5) sklad B	x_4	x_5	x_6
požadavek:	(3)	(2)	(2)

Mentálně trošičku náročnější může být reformulace úlohy ze slovního vyjádření „je nutné minimalizovat maximální množství převáženého střeliva“ do optimalizační úlohy, která tedy zní:

$$\min \{ \max x_i;\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 6;\ x_4 + x_5 + x_6 \leq 5;\ x_1 + x_4 = 3;\ x_2 + x_5 = 2;\ x_3 + x_6 = 2 \}$$

Toto převedeme trikem popsaným v řešení Cvičení 12.4(a) na úlohu LP:

$$\min \{ z;\ z \geq x_i\ \forall i;\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 6;\ x_4 + x_5 + x_6 \leq 5;\ x_1 + x_4 = 3;\ x_2 + x_5 = 2;\ x_3 + x_6 = 2 \}$$

$$= \min \left\{ z;\ z\mathbf{1} \geq \mathbf{x};\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6; z \in \mathbb{R}; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Kapitola 13

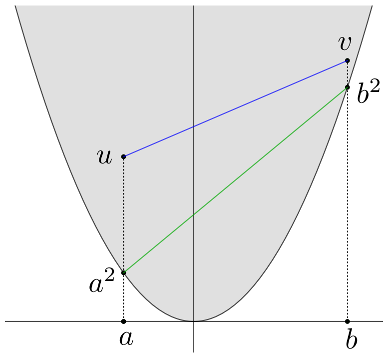
13.1 a) Množina M je konvexní, když $\forall u, v \in M$, $\forall t \in \langle 0, 1\rangle$ leží $t\,u + (1-t)\,v$ také v množině M. V případě $M = \langle a, b\rangle$ máme v předpokladech definice $a \le u \le b$, $a \le v \le b$. Platí:

$$a = t\,a + (1-t)\,a \le t\,u + (1-t)\,v \le t\,b + (1-t)\,b = b$$

takže prvek $t\,u + (1-t)\,v$ je vždy mezi a a b, tedy leží v M. Množina je konvexní.

b) Množina není konvexní, Načrtněte si parabolu a na ní nějaké dva body, které spojíte úsečkou. V případě konvexní množiny musí celá úsečka v množině ležet, v tomto případě v té parabole úsečka neleží. Nyní to formalizujeme podle definice. Stačí najít dva prvky v M a jeden prvek na spojnici těch dvou, který v M neleží. Takže třeba $[1, 1], [-1, 1] \in M$, $t = \frac{1}{2} \in \langle 0, 1\rangle$. Bod $\frac{1}{2}[1, 1] + \frac{1}{2}[-1, 1] = [0, 1] \notin M$.

c) Množina je konvexní, jak plyne z náčrtku. Vezměte si libovolné dva body nad parabolou a shledáte, že jejich spojnice (modrá úsečka mezi nimi) leží také celá nad parabolou. Dokázat to exaktně z definice bez využití derivací dá bohužel hodně zabrat, takže je otázka, zda má smysl se tím vůbec zabývat, protože při použití derivací máme výsledek rovnou. Ale v zadání je požadavek na přímé odvození z definice, tak tedy do toho. Začneme se dvěma body ležícími přímo na parabole $[a, a^2]$ a $[b, b^2]$. Jakýkoli bod na zelené spojnici $t\,[a, a^2] + (1-t)\,[b, b^2]$ má mít svou y souřadnici větší než kvadrát jeho x-ové souřadnice. Má-li se dokázat, že je první číslo větší než druhé, stačí ověřit, že rozdíl „první číslo mínus druhé“ je větší než nula:



$$t\,a^2 + (1-t)\,b^2 - (t\,a + (1-t)\,b)^2 = ta^2 + b^2 - tb^2 - t^2a^2 - 2t(1-t)\,ab - (1 - 2t + t^2)\,b^2 =$$
$$= \text{uff, je to dřina} = \cdots = (t - t^2)\,(a^2 - 2ab + b^2) = (t - t^2)\,(a-b)^2 \ge 0$$

Dále je třeba dokázat, že obecná úsečka (modrá) s koncovými body v M vždy leží „nad“ případně jinou úsečkou s koncovými body přímo na parabole (zelenou) a tudíž i modrá úsečka leží celá v M. Z obrázku to je zase vidět rovnou, matematická argumentace vypadá následovně: Je-li $u \ge a^2$ a $v \ge b^2$ pak pro každé $t \in \langle 0, 1\rangle$ je $t\,u + (1-t)\,v \ge t\,a^2 + (1-t)\,b^2$.

e) Vezmeme $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M$, tedy $\mathbf{Au} \le \mathbf{b}, \mathbf{Cu} = \mathbf{d}$, $\mathbf{Av} \le \mathbf{b}, \mathbf{Cv} = \mathbf{d}$. O vektoru $\mathbf{w} = t\,\mathbf{u} + (1-t)\,\mathbf{v}$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ máme dokázat, že leží v M, tedy splňuje sledované dvě podmínky:

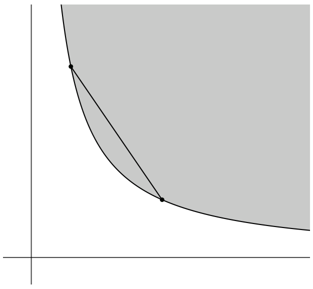
$$\mathbf{Aw} = \mathbf{A}\,(t\,\mathbf{u} + (1-t)\,\mathbf{v}) = t\,\mathbf{Au} + (1-t)\,\mathbf{Av} \le t\,\mathbf{b} + (1-t)\,\mathbf{b} = \mathbf{b},$$
$$\mathbf{Cw} = \mathbf{C}\,(t\,\mathbf{u} + (1-t)\,\mathbf{v}) = t\,\mathbf{Cu} + (1-t)\,\mathbf{Cv} = t\,\mathbf{d} + (1-t)\,\mathbf{d} = \mathbf{d}.$$

g) Množina $\mathbb{Z}$ není konvexní. Protipříklad je v řešení ve skriptech a jistě každý vymyslí další. Připomínám při té příležitosti známý fakt, že pokud chceme definici použít k ověření konvexity, pak kvůli třem obecným kvantifikátorům v ní použitých ($\forall\mathbf{u}, \forall\mathbf{v}, \forall t$) je třeba v argumentaci zůstat u neurčených těchto třech proměnných, lidově řečeno „postupovat obecně“. Když naopak chceme dle definice konvexitu vyvrátit, tak díky logické negaci těch tří kvantifikátorů ($\exists\,\mathbf{u}, \exists\,\mathbf{v}, \exists\,t$) stačí najít jeden konkrétní příklad, pro který tvrzení z definice neplatí.

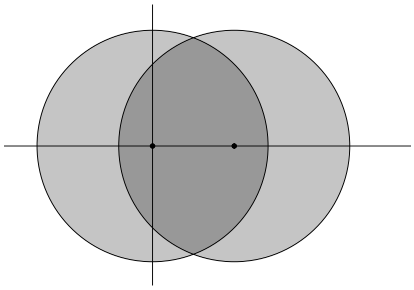
13.2 a) Je to konvexní množina. Je to totiž dokonce konvexní mnohostěn: proměnné se vyskytují v lineárních (neostrých) nerovnostech. Každou rovnost můžeme nahradit dvěma nerovnostmi, takže i tady je $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ ekvivalentní s $\sum_{i=1}^{n} x_i \ge 1$ a $\sum_{i=1}^{n} x_i \le 1$.

b) Povrch n-rozměrné koule (sféra) není konvexní, dva protilehlé body ležící na sféře mají spojnici procházející počátkem, přitom počátek není na sféře. Dokonce žádná spojnice dvou různých bodů uvnitř sféry neleží. Konvexním obalem je jednotková koule, tj. množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x}\| \le 1\}$.

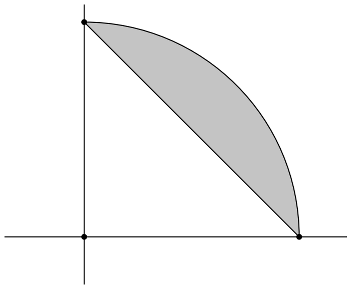
e) Zkoumaná množina je hyperbola (graf funkce $y = 1/x$) v prvním kvadrantu, protože $xy = 1$ je totéž jako $y = 1/x$. Tento graf není konvexní, např. střed spojnice bodů $[2, \frac{1}{2}]$ a $[\frac{1}{2}, 2]$ je $[\frac{5}{4}, \frac{5}{4}]$ a ten neleží na zadané hyperbole. Obrázek je asi názornější než počítání čtvrtin. Konvexním obalem je množina $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ y \geq 1/x,\ x > 0\}$.



12.2 e)



12.2 f)



12.2 g)

f) Množina je zadaná jako průnik dvou kruhů o poloměru $\sqrt{2}$ s různými středy. Kruhy samotné jsou konvexní množiny a obecně platí, že průnik konvexních množin je konvexní.

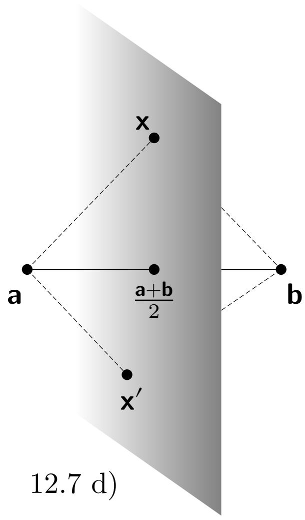
g) Množina je čtvrtkružnicí v prvním kvadrantu. Není konvexní, protože např. střed spojnice bodů $[1, 0]$ a $[0, 1]$ je $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a ten neleží v zadané množině. Pozor, konvexní obal není „čtvrtkruh“, jak by možná mohlo někoho bez většího přemýšlení napadnout, ale množina uvedená v řešení skript.

h,i,j) Řešení ve skriptech je dostatečně podrobné.

13.7 a) Protože je $\mathbf{C}$ pozitivně definitní, je zkoumaná množina elipsoid, tedy něco jako ragbyový míč, takže je konvexní. Není to ale konvexní mnohostěn, protože její hranice se neskládá z „rovných ploch“, jež by se daly vymezit pomocí konečně mnoha lineárních nerovnic. Výjimkou je případ dimenze 1, kdy množina $\{x;\ cx^2 \leq 1\} = \langle -1/\sqrt{c}, 1/\sqrt{c} \rangle$ se dá zapsat dvěma lineárními nerovnostmi $-1/\sqrt{c} \leq x \leq 1/\sqrt{c}$.

b) Přímka procházející počátkem ve směru vektoru $\mathbf{v}$ je konvexní mnohostěn. Její (ne)rovnicové vyjádření získáme tak, že najdeme všech $n-1$ lineárně nezávislých kolmic $\mathbf{k}_i$ na tuto přímku (tedy bázi řešení homogenní soustavy s jednou rovnicí $\mathbf{v}^T\mathbf{x} = 0$) a přímku vyjádříme jako průnik $n-1$ nadrovin procházejících přímkou s normálovým vektorem $\mathbf{k}_i$. První nadrovina má rovnici $\mathbf{k}_1^T\mathbf{x} = 0$ což se dá dále rozepsat na dvě nerovnosti $\mathbf{k}_1^T\mathbf{x} \leq 0$, $\mathbf{k}_1^T\mathbf{x} \geq 0$. Podobně pro ostatní nadroviny. Přímka je tedy vyjádřitelná pomocí $2(n-1)$ nerovností.

d) Zkusme se nejprve zamyslet, jak vypadá hranice zkoumané množiny, tedy množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|\}$. Je to množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodu $\mathbf{a}$ jako od bodu $\mathbf{b}$, je to tedy nadrovina procházející středem spojnice bodů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a je na tuto spojnici kolmá. Dá se vyjádřit rovnicí $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T\mathbf{x} = c$, protože je kolmá na $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$. Konstantu c je nutno dopočítat z faktu, že nadrovina prochází bodem $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$, takže $c = (\mathbf{a}-\mathbf{b})^T(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2 = (\|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2)/2$. Zkoumanou množinu (s nerovností) lze tedy vyjádřit jako $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T\mathbf{x} \geq (\|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2)/2$ a je to tedy konvexní mnohostěn.



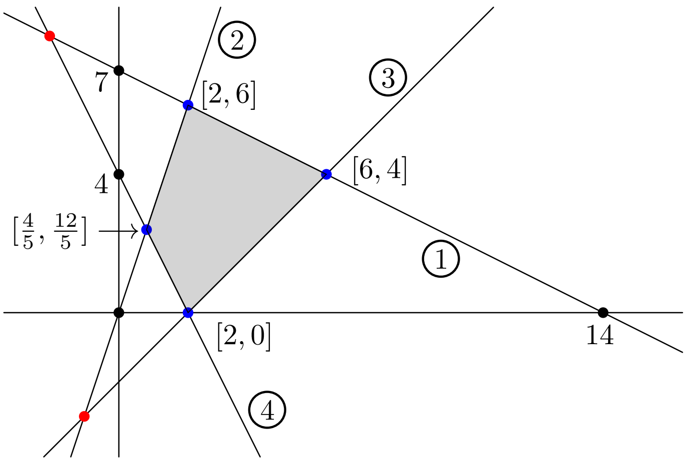
12.7 d)

13.9 Vzdálenost středu koule $\mathbf{c}$ od i-té nadroviny dané rovnicí $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i$ je rovna $|\mathbf{a}_i^T\mathbf{c} - b_i|/\|\mathbf{a}_i\|$, jak plyne z výsledku Cvičení 5.16(c). Přitom $\mathbf{a}_i^T$ je i-tý řádek matice $\mathbf{A}$ v zadání úlohy. Nechť $\mathbf{c}$ vyhovuje všem nerovnicím $\mathbf{Ac} > \mathbf{b}$. Když je r dostatečně malé, aby koule neprotla žádnou nadrovinu, pak máme vzdálenost koule od i-té nadroviny danou vzorcem $|\mathbf{a}_i^T\mathbf{c} - b_i|/\|\mathbf{a}_i\| - r$. Platí $\mathbf{a}_i^T\mathbf{c} - b_i > 0$, takže není třeba psát absolutní hodnotu a máme pro kouli s poloměrem $r > 0$ uvnitř průniku poloprostorů podmínku

$$\forall i\ (\mathbf{a}_i^T\mathbf{c} - b_i)/\|\mathbf{a}_i\| - r \geq 0, \quad \text{tj.} \quad \forall i\ \mathbf{a}_i^T\mathbf{c} - b_i \geq \|\mathbf{a}_i\|\, r.$$

Proměnné optimalizační úlohy jsou $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ a $r \in \mathbb{R}$. Maximalizujeme poloměr r za podmínek, že koule leží uvnitř průniku poloprostorů, tedy $\max\{r;\ r \geq 0;\ \mathbf{a}_i^T\mathbf{c} - b_i \geq \|\mathbf{a}_i\|\, r\}$. Maticový zápis vyžaduje nejprve sestavit vektor $\mathbf{z}$ tak, aby $\mathbf{z}_i = \|\mathbf{a}_i\|$. Pak hledáme $\max\{r;\ r \geq 0;\ \mathbf{Ac} \geq r\,\mathbf{z}\}$.

13.10 **a)** V úloze máme 4 nerovnosti, které vymezují 4 poloroviny podle obrázku. V kroužku u hranice poloroviny je uvedeno číslo nerovnosti, které polorovinu vymezuje a kroužek je umístěn ve směru „do“ poloroviny. Všechny průsečíky těch přímek jsou potenciálními extremálními body. Takže je třeba hledat průsečík přímek odpovídající každé rovnici s každou. Pro případ první rovnice ① s druhou ② máme:



$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & -14 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -42 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & \mathbf{6} \end{array}\right]$$

Toto provedeme s každou dvojicí rovnic. Máme tedy 6 průsečíků. Z obrázku je vidět, že z těch 6 průsečíků dva (červené) nejsou vůbec ve zkoumané množině, tj. máme 4 extremální body (modré).

b) Je-li dáno m nerovnic s n proměnnými, $m \geq n$, pak je potřeba najít kandidáty všech extremálních bodů, tj. vybrat všechny n-tice odpovídajících rovnic ze zadané množiny m rovnic. Těch je dohromady $\binom{m}{n}$. Pro každou takovou n-tici rovnic je třeba nalézt řešení jako potencionální extremální bod. Když řešení neexistuje, pak daná n-tice negeneruje potenciální extremální bod. Ze všech potenciálních bodů je pak třeba vybrat jen ty, které navíc leží v zadané množině, tj. splňují soustavu $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$. Omlouvám se, ale program realizující tento algoritmus jsem nesesmolil.

Doplním k tomuto příkladu ještě jedno pozorování. Člověk, má-li málo rovnic a úloha je v $\mathbb{R}^2$ (jako v podúloze (a)), může po vytvoření náčrtku rovnou vyloučit body, které jsou „očividně“ mimo množinu (červené body) a nemusí ani počítat hodnoty takových průsečíků. Stroj tuto „očividnou“ intuici obvykle nemá naprogramovánu a musí tedy vypočítat opravdu všechny potenciální extremální body a pak z nich vyloučit ty, které nevyhovují zadané soustavě rovnic. Na druhé straně je stroj poněkud rychlejší než člověk a zvládne i větší dimenze než jen $\mathbb{R}^2$.

13.11 **a)** 1. nemá přímku ani extremální bod (dále jen „e. bod“)
2. jakákoli přímka v množině leží, tj. bez e. bodu
3. e. bod je a nebo a a b
4. při dim > 0 (tj. afinní podprostor není jen samotný bod) obsahuje přímku, tj. nemá e. body
5. e. bod je $\mathbf{x}$
6. obsahuje přímky, je bez e. bodu
7. je to vícedimenzionální „první kvadrant“, e. bod je $\mathbf{0}$
8. neprázdný panel obsahuje přímku (např. na hranici $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = b_2$) a je bez e. bodů
9. vrcholy hyperkrychle jsou e. body
10. vrcholy hyperkvádru jsou e. body
11. vrcholy simplexu jsou e. body
12. e. bod je např. $[1, 0, 0, \ldots, 0]$
13. např. $[1, 0, 0, \ldots, 0]$ nebo $[-1, 0, 0, \ldots, 0]$ jsou e. body.

b) Množina je nekonečný hranol (ve směru osy z) s průřezem tvaru trojúhelníka. Například přímka $\mathbf{0} + t\,[0, 0, 1]^T$ v něm celá leží, tedy množina nemá e. bod.

c) Je to panel, který obsahuje přímku (např. $y = -x$), tj. neobsahuje e. bod, jak jsme o tom už v obecnějším případě **hovořili** u podúkolu (a), puntík osmý. Následuje citát z klasické divadelní hry. Král: „Vy jste spolu **nehovořili**?“ Pseudo-princezna: „**Hovořili**.“ Princ Jasoň: „**Nehovořili**, za současné výjimečné situace a vládních opatřeních se nám spolu obtížně **hovoří**.“ Do řešení, které budete zasílat, můžete připojit název citované hry, ale není to nutné.

Kapitola 15

15.1 Přechod na duální úlohu je docela názorný, pokud úlohu zapíšeme v maticovém tvaru. Řádky matice $\mathbf{A}$ rozdělíme na tři skupiny (každá může být prázdná) v závislosti na znaménku rovnosti či nerovnosti v daném řádku použitém. Podmínky (korespondující s řádky matice $\mathbf{A}$), musíme tedy seskupit do tří skupin podle typu (ne)rovnítka, třebaže jsou v zadání úlohy jinak zamíchány. Indexy těchto skupin řádků jsou ve skriptech označeny I_0, I_+, a I_-. Dále rozdělíme všechny proměnné do tří skupin podle toho, jaké na ně klademe další podmínky. Indexy těchto skupin jsou označeny J_0, J_+, J_-. Věc vypadá schematicky takto:

$$
\begin{array}{lccccc}
 & \text{Primární úloha} & & & \text{Duální úloha} & \\
 & \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} & & & \max \mathbf{b}^T\mathbf{y} & \\
\begin{array}{l} I_0: \\ I_+: \\ I_-: \end{array} & \begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{A} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathbf{x} \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{array}{c} = \\ \geq \\ \leq \end{array} & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{b} \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{y} \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \in \mathbb{R} \\ \geq \mathbf{0} \\ \leq \mathbf{0} \end{array} \\
\begin{array}{l} J_0: \\ J_+: \\ J_-: \end{array} & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{x} \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \in \mathbb{R} \\ \geq \mathbf{0} \\ \leq \mathbf{0} \end{array} & \begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{A}^T & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathbf{y} \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{array}{c} = \\ \leq \\ \geq \end{array} & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{c} \\ \\ \end{bmatrix}
\end{array}
\tag{1}
$$

Modře je zakroužkovaná jistá komplikace při přechodu k duální úloze: při tomto přechodu od $\mathbf{x}$ k $\mathbf{A}^T\mathbf{y}$ se překlápějí nerovnítka, ale při přechodu od $\mathbf{Ax}$ k $\mathbf{y}$ nikoli. Dále zelenými čarami je vyznačen „přesun dat“ mezi pravými stranami podmínek a vektory účelové funkce jednotlivých úloh. Povšimněte si, že matice $\mathbf{A}$ je rozdělena na tři „sektory“ podél řádků I_0, I_+, I_- a taky na tři „sektory“ podél jejích sloupců J_0, J_+, J_-. Každý z těchto sektorů může být prázdný, ale v obecném případě tedy je matice rozdělena do devíti bloků. Schéma (1) budu dále zapisovat poněkud stručněji:

$$\text{úloha: } \min \mathbf{c}^T\mathbf{x},\ \mathbf{Ax} \overset{=}{\underset{\leq}{\geq}} \mathbf{b},\ \mathbf{x} \overset{\circ}{\underset{\leq}{\geq}} \mathbf{0} \text{ přechází na duální } \max \mathbf{b}^T\mathbf{y},\ \mathbf{y} \overset{\circ}{\underset{\leq}{\geq}} \mathbf{0},\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} \overset{=}{\underset{\geq}{\leq}} \mathbf{c}.$$

V zadání po nás chtějí aplikovat přechod k duální úloze ještě jednou a ukázat, že se tím vrátíme k původní úloze. Zatím máme ale zaveden jen přechod od min k max a ne obráceně. Musíme tedy nejprve duální úlohu vyjádřit pomocí min a dvojího mínus. Pak můžeme aplikovat přechod:

$$\text{duální úloha: } -\min -\mathbf{b}^T\mathbf{y},\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} \overset{=}{\underset{\geq}{\leq}} \mathbf{c},\ \mathbf{y} \overset{\circ}{\underset{\leq}{\geq}} \mathbf{0} \text{ přechází na dvojí duální: } -\max \mathbf{c}^T\mathbf{z},\ \mathbf{z} \overset{\circ}{\underset{\geq}{\leq}} \mathbf{0},\ \mathbf{Az} \overset{=}{\underset{\geq}{\leq}} -\mathbf{b}.$$

Nyní si stačí všimnout, že naposledy zapsaná úloha je při $-\mathbf{z} = \mathbf{x}$ shodná s úlohou původní, protože:

$$-\max \mathbf{c}^T\mathbf{z} \ \Leftrightarrow\ \min \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \qquad \mathbf{z} \overset{\circ}{\underset{\geq}{\leq}} \mathbf{0},\ \Leftrightarrow\ -\mathbf{z} = \mathbf{x} \overset{\circ}{\underset{\leq}{\geq}} \mathbf{0}, \qquad \mathbf{Az} = -\mathbf{Ax} \overset{=}{\underset{\geq}{\leq}} -\mathbf{b} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{Ax} \overset{=}{\underset{\leq}{\geq}} \mathbf{b}.$$

Tím jsme dokázali tvrzení o „duálu k duálu“ zcela obecně, takže podúkoly (a) a (b) z toho přímo plynou jako speciální případy.

Po tomto důkazu je zřejmé, že proces dualizace můžeme v úvodním schématu (1) dělat i „zprava doleva“, tedy od max k min. Jen je třeba si uvědomit, že pravidlo překlápění nebo nepřeklápění nerovnítek je v tomto případě přesně obrácené. Kdo na to vymyslí nějakou snadno zapamatovatelnou mnemotechnickou pomůcku, co se kdy překlápí či nepřeklápí při přechodu od min k max nebo obráceně, dostane pochvalu před nastoupenou jednotkou. Já si většinou pamatuji jen schéma (1) a dále si uvědomím, zda chci dualizovat zleva doprava (min → max) nebo zprava doleva (max → min).

15.2 **a)** Hledáme maximum $\sum c_i\, x_i$ pro $\mathbf{x}$ ležící v hyperkrychli $\langle -1, 1\rangle^n$. Maxima dosáhneme tak, že pro $c_i < 0$ volíme $x_i = -1$ a pro $c_i > 0$ volíme $x_i = 1$. Když je náhodou $c_i = 0$, je možné volit x_i libovolně v intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Stručně: $x_i = \operatorname{sgn} c_i$, maximální hodnota je $\sum c_i \operatorname{sgn} c_i = \sum |c_i|$.

b) Převedeme úlohu na maticové vyjádření a provedeme dualizaci dle schématu (1) zprava doleva.

$$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x} \qquad\qquad \min \mathbf{1}^T\mathbf{y} - \mathbf{1}^T\mathbf{z}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \begin{matrix} \le \\ \\ \ge \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{matrix} \mathbf{y} \ge \mathbf{0} \\ \mathbf{z} \le \mathbf{0} \end{matrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & & 0 & 1 & & 0 \\ & 1 & & & 1 & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ 0 & & 1 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

Abychom se zbavili znaménka „mínus“ v účelové funkci duální úlohy a dvěma různým nerovnostem v podmínkách, přejmenujeme v duální úloze $\mathbf{v} = \mathbf{y}$ a $\mathbf{u} = -\mathbf{z}$ [Pozn.: pokud někoho zajímá, proč jsem zrovna teď prohodil pořadí písmen v abecedě, nechť se podívá na řešení této úlohy do skript; chci zachovat stejné značení.]. Lidsky zapsáno, máme tedy duální úlohu ve tvaru

$$\min \left\{ \sum v_i + \sum u_i;\ v_i \ge 0, u_i \ge 0, v_i - u_i = c_i \right\}. \tag{3}$$

Nyní provedeme požadovanou úvahu pro řešení duální úlohy (3). Ta se rozpadá na n samostatných úloh (4), protože jednotlivé proměnné s různými indexy spolu nejsou provázány.

$$\min \{v_i + u_i;\ v_i \ge 0, u_i \ge 0, v_i - u_i = c_i\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \tag{4}$$

Pro každé i je minimum nabýváno ve $v_i = c_i, u_i = 0$ (hodnota je c_i) nebo v $u_i = -c_i, v_i = 0$, (hodnota je $-c_i$), tedy souhrnně hodnota minima je vždy $|c_i|$ a a tuto hodnotu dosáhne buď u_i nebo v_i (v závislosti na znaménku c_i a druhá z uvedených proměnných je pak nulová. Zbývá dodat, že duální úloha (3) má optimální hodnotu rovnu $\sum |c_i|$.

c) Podmínky komplementarity přečteme z jednotlivých řádků schématu (2) s vědomím toho, že máme jiné značení $\mathbf{v} = \mathbf{y}$ a $\mathbf{u} = -\mathbf{z}$. Dostáváme: ($x_i = 1$ nebo $v_i = 0$); ($x_i = -1$ nebo $u_i = 0$). Řádky v druhém bloku schématu (2) žádné další podmínky nepřinášejí.

d) Pro $\mathbf{c} = (-2, 3, 4)$ je primární úloha vyřešena v bodě $\mathbf{x} = (-1, 1, 1)$ a duální úloha v bodě $\mathbf{v} = (0, 3, 4), \mathbf{u} = (2, 0, 0)$, jak plyne z předchozích úvah o řešení primární úlohy (a) a duální úlohy (b). Můžeme ověřit, že podmínky komplementarity jsou splněny: ($x_1 \ne 1$, takže musí $v_1 = 0$); ($x_2 \ne -1$, takže musí $u_2 = 0$) a ($x_3 \ne -1$, takže musí $u_3 = 0$). Nebo obrácený pohled: ($v_2 \ne 0$, takže musí $x_2 = 1$); ($v_3 \ne 0$, takže musí $x_3 = 1$) a ($u_1 \ne 0$, takže musí $x_1 = -1$). Je tedy zřejmé, že ze znalosti řešení duální úlohy dostáváme přímo z podmínek komplementarity řešení primární úlohy. Obráceně: z řešení primární úlohy dostáváme v duální úloze částečný výsledek ve formě tří nul. Zbylé hodnoty lze dopočítat z podmínek duální úlohy $v_i - u_i = c_i$.

15.3 **a)**

Primární úloha:	Duální úloha:	Podmínky komplementarity:
$\min 2x_1 - 3x_3 + x_4$	$\max 0y_1 + 5y_2 + 6y_3$	
$x_1 - x_2 - x_3 \ge 0$	$y_1 \ge 0$	$y_1\,(x_1 - x_2 - x_3) = 0$
$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 5$	$y_2 \le 0$	$y_2\,(-x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5) = 0$
$2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$	$y_3 \in \mathbb{R}$	$---$
$x_1 \ge 0$	$y_1 - y_2 + 2y_3 \le 2$	$x_1\,(y_1 - y_2 + 2y_3 - 2) = 0$
$x_2 \ge 0$	$-y_1 + 2y_2 - y_3 \le 0$	$x_2\,(-y_1 + 2y_2 - y_3) = 0$
$x_3 \ge 0$	$-y_1 - 3y_2 - y_3 \le -3$	$x_3\,(-y_1 - 3y_2 - y_3 + 3) = 0$
$x_4 \ge 0$	$2y_3 \le 1$	$x_4\,(2y_3 - 1) = 0$

b) Úlohu $\min_x\{\max_i |a_i - x|\}$ převedeme známým trikem s proměnnou z na úlohu LP:

$$\min\{z;\ z \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, z \geq a_i - x, z \geq x - a_i\}.$$

V posledních dvou nerovnostech převedeme proměnné na levou stranu: $z+x \geq a_i$, $z-x \geq -a_i$. Přeformulujeme úlohu do maticového vyjádření a najdeme úlohu duální.

primární úloha

$$\min 0x + 1z$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}$$

$$z \in \mathbb{R}$$
$$x \in \mathbb{R}$$

duální úloha

$$\max \mathbf{a}^T\mathbf{u} - \mathbf{a}^T\mathbf{v}$$

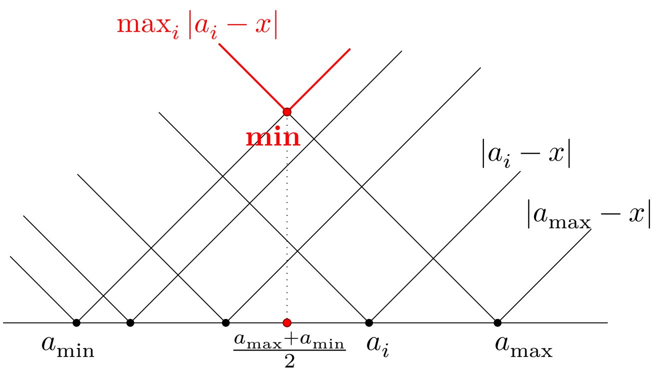
$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lidsky řečeno, duální úloha zní: $\max\{\mathbf{a}^T\mathbf{u} - \mathbf{a}^T\mathbf{v};\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{v} \geq \mathbf{0},\ \sum u_i + \sum v_i = 1,\ \sum u_i = \sum v_i\}$. Povšimněte si, že z posledních dvou podmínek plyne také rovnou, že $\sum u_i = \sum v_i = \frac{1}{2}$.

Podmínky komplementarity jsou: ($z = a_i - x$ nebo $u_i = 0$); ($z = x - a_i$ nebo $v_i = 0$).

Duální úloha nám připomíná úlohu ze Cvičení 12.3(k). Je-li I index, pro který je a_I maximální a J index, pro který je a_J minimální, pak volme $u_I = \frac{1}{2}$ a ostatní nulové, dále $v_J = \frac{1}{2}$ a ostatní nulové. To maximalizuje účelovou funkci duální úlohy za splnění všech podmínek. Účelová funkce má hodnotu $(a_I - a_J)/2$. Ilustrovat to můžeme situací, že potřebujeme nakoupit a prodat zboží o celkovém množství 1 (nákup v množství $\frac{1}{2}$, prodej také v množství $\frac{1}{2}$). Jednotliví obchodníci nabízejí své výkupní/prodejní ceny a_i. Prodáme u obchodníka s cenou a_I celou povolenou polovinu a nakoupíme taktéž polovinu u obchodníka s cenou a_J. To maximalizuje náš zisk. Z podmínek komplementarity pak plyne, že $z = a_I - x$ a současně $z = x - a_J$, sečtením těchto dvou rovností znovu dostáváme optimální hodnotu účelové funkce $z = (a_I - a_J)/2$. Optimální hodnota proměnné x je v této úloze $(a_I + a_J)/2$, tedy střed nejmenšího intervalu v $\mathbb{R}$, který obsahuje všechny a_i.



Toto cvičení ukazuje, že vzájemně duální úlohy popisují zcela jiný charakter problému, u každé z nich je třeba vést naprosto odlišnou úvahu (v případě řešení úvahou). V prvém případě hledáme střed intervalu na reálné ose (viz obrázek) a v druhém maximální zisk při prodeji a zároveň koupi stejného množství zboží. Obrázek ukazuje, jakou úvahou lze k výsledku primární úlohy přijít bez přechodu k duální. Na obrázku máme reálnou osu a na ní jednotlivé body a_i. Dále tam jsou grafy jednotlivých funkcí $|a_i - x|$ a červeně je vyznačen graf funkce $\max|a_i - x|$. Této funkce se hledá minimum, jehož x-ová souřadnice je skutečně ve středu intervalu $\langle a_{\min}, a_{\max}\rangle$.

e) Ukážu jen Cvičení 12.3(c), (d) a (e). Nebudu už vykreslovat schémátka přechodu na duální úlohu, protože je to v TEXu přeci jen poněkud náročné a vy už přechody k duální úloze jistě umíte (z předchozích cvičení). Všimněte si, že se ve Cvičení 12.3 přechází od maxima k minimu, takže je třeba použít arabský způsob čtení schématu (1), tj. zprava doleva.

Duální úloha k **12.3(c)** zní $\min\{y;\ y \in \mathbb{R},\ y\mathbf{1} \geq \mathbf{c}\}$, tedy $y \geq c_i\ \forall i$. Z toho je okamžitě vidět, že nejlepší řešení je $y = \max c_i$. Podmínky komplementarity: $x_i = 0$ nebo $y = c_i$. Je to n podmínek, pro každé i je vyslovena jedna podmínka komplementarity.

Duální úloha k **12.3(d)** zní $\min\{y;\ y \geq 0,\ y\mathbf{1} \geq \mathbf{c}\}$, tedy k úloze z předchozího cvičení je přidáno $y \geq 0$. Vidíme, že jsou-li všechna c_i záporná, je nejlepší řešení $y = 0$, jinak je nejlepší řešení $y = \max c_i$. Podmínky komplementarity: $x_i = 0$ nebo $y = c_i$ a dále $\sum x_i = 1$ nebo $y = 0$.

Duální úloha k **12.3(e)** zní $\min\{y - z;\ y \geq 0,\ z \leq 0, y\mathbf{1} + z\mathbf{1} = \mathbf{c}\}$. Poslední podmínka rozepsána do složek říká $y + z = c_i\ \forall i$. Takovou soustavu je možné splnit jen když se všechny c_i

rovnají. Nerovnají-li se, pak máme prázdnou množinu přípustných řešení, což odpovídá neomezenému řešení primární úlohy. Podmínky komplementarity: ($\sum x_i = 1$ nebo $y = 0$); ($\sum x_i = -1$ nebo $z = 0$).

15.4 Zapíšu primární a sestavím duální úlohu:

$$\min \begin{bmatrix} 47 & 93 & 17 & -93 \end{bmatrix} \mathbf{x} \qquad\qquad \max \begin{bmatrix} -3 & 5 & -8 & -7 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -10 & -1 \\ -6 & -11 & -2 & 12 \\ 1 & 6 & -1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \le \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathbf{y} \le 0$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \qquad\qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -6 & 1 \\ -6 & -2 & 3 & -11 & 6 \\ 1 & 7 & -10 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 12 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 47 \\ 93 \\ 17 \\ -93 \end{bmatrix}$$

Podmínky komplementarity napíšu a rovnou ověřím, která z nich platí pro $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)$. Ty, které jsou splněny, obarvím zeleně. K ověření mi stačí počítání na prstech (součet čísel).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = -3 \quad &\text{nebo} \quad y_1 = 0, \\ \begin{bmatrix} -1 & -2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 5 \quad &\text{nebo} \quad y_2 = 0, \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & -10 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = -8 \quad &\text{nebo} \quad y_3 = 0, \\ \begin{bmatrix} -6 & -11 & -2 & 12 \end{bmatrix} \mathbf{x} = -7 \quad &\text{nebo} \quad y_4 = 0, \\ \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 4 \quad &\text{nebo} \quad y_5 = 0. \end{aligned}$$

Je vidět, že pro $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)$ není splněna jen levá část poslední podmínky, takže musí nutně být $y_5 = 0$. Po dosazení této skutečnosti do soustavy rovnic s proměnnými y_i v duální úloze máme soustavu se čtvercovou maticí a s proměnnými y_1, y_2, y_3, y_4. Řešení této soustavy se na prstech počítá už poněkud hůře, osobně jsem použil komp: $\mathbf{y} = (-3, -2, -2, -7, 0)$.

Jak vypadají hodnoty účelové funkce v těchto bodech?

$$\begin{bmatrix} 47 & 93 & 17 & -93 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 64, \qquad \begin{bmatrix} -3 & 5 & -8 & -7 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y} = 64.$$

Jsou stejné, tj. oba vektory $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)$ a $\mathbf{y} = (-3, -2, -2, -7, 0)$ jsou argumenty optima své úlohy a optimální hodnota obou úloh je 2^6. „Certifikát optimality“ je ověřen.

Kapitola 16

16.3 **e)**

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= (\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b})^T(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{b}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{b},\\
f'(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T(2\mathbf{A}^T\mathbf{A}) - 2\mathbf{b}^T\mathbf{A},\\
f''(\mathbf{x}) &= 2\mathbf{A}^T\mathbf{A}.
\end{aligned}
$$

Hessova matice $2\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je pozitivně definitní, podle podmínky 2. řádu je f konvexní funkce.

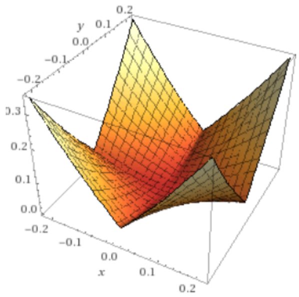
16.11 **a)** Funkce $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n) = \max_{i=1}^m \min_{j=1}^n \|\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_j\|$ s proměnnými $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^k$ pro danou m-tici vektorů $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^k$ není obecně konvexní. Je určitě konvexní pro $n = 1$, protože pak to je maximum norem posunutých do bodu $\mathbf{a}_i$, přitom norma je konvexní a maximum konvexní funkce je konvexní. Pro protipříklad tedy volme $n = 2$, $m = 1$, $\mathbf{a}_1 = (0, 0)$ a dimenzi prostoru $k = 1$. Funkce f pro tento případ je ve tvaru $f(x_1, x_2) = \min\{|x_1|, |x_2|\}$. Podle dovětku ke komentáři k Cvičení 8.4 víme, že tato funkce není konvexní.

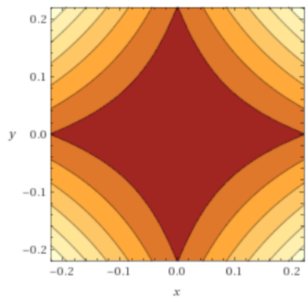
Kapitola 17

17.4 a) Např. funkce $f(x) = \sqrt{|x|}$ má jediné (tj. globální) minimum v bodě 0, ale není konvexní.

b) V jedné proměnné se příklad nepodaří najít, protože spojitá funkce má v okolí svého globálního minima subkontury ve tvaru intervalu.

Ve dvou proměnných už taková funkce existuje, například $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5|xy|$. Ta má globální minimum v nule a všechny své subkontury má ve tvaru znaku čokoládoven Orion. Tento znak pochopitelně není konvexní, protože se dají spojit úsečkou jeho dva sousední vrcholy a zjevně tato úsečka celá leží mimo tento znak.





Když matematik prezentuje svůj výsledek (typicky v článku ve formátu DVD[1]), tak potřebuje prokázat, že důkazy neobsahují chyby a skutečně dokazují vyslovená tvrzení. V našem případě by tedy bylo potřebné sestavit vzorec pro obecnou subkonturu této funkce ve výšce $a > 0$, dále spojit dva vrcholy této subkontury (třeba v prvním kvadrantu) úsečkou, dále zvolit jeden bod na této úsečce (například střed) a ukázat, že leží mimo subkonturu, tedy nad hranicí subkontury, vyjádřené v prvním kvadrantu konkrétním vzorcem $y = (-5x + \sqrt{25x^2 - 4x^2 + 4a})/2$.

Jenže zvídavého člověka spíše zajímá, jak ten matematik na vzorec přišel, protože ověřování skutečností nad daným vzorcem je už docela nuda a někdy (jako v tomto případě) i dřina, přestože vše je rovnou patrné z obrázku. Matematik si svůj nápad ale často nechává pro sebe, protože to do publikovaného článku není potřeba. Já se s vámi ale o ten nápad podělím.

Subkontury funkce $x^2 + y^2$ jsou kružnice. Subkontury funkce $|x| + |y|$ jsou čtverce otočené o 45° z „normální“ polohy (manhattanská norma, viz skripta). Přitom tento vzorec se dá napsat taky ve tvaru $\sqrt{(|x| + |y|)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2|xy|}$. Takže i subkontury funkce $x^2 + y^2 + 2|xy|$ jsou čtverce otočené o 45°. Podařilo se mi přejít od kružnice k vepsanému čtverci přidáním členu $2|xy|$ k původnímu vzorci $x^2 + y^2$ pro kružnice. Když přidám „víc“ než jen $2|xy|$, dostanu znak čokoládoven Orion.

[1] Definice-věta-důkaz