Optimalizace

Celočíselné lineární programování

Tomáš Werner, Tomáš Kroupa

20. prosince 2024

FEL ČVUT

Úloha celočíselného LP a její LP relaxace

Celočíselný lineární program (integer LP, ILP):

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \,\}$$

kde $\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel.

Nejčastěji **0-1 lineární program**

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \{0,1\}^n \,\}$$

Věta

Úloha 0-1 lineárního programování je NP-těžká.

LP relaxace úlohy:

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \{0,1\}^n \,\} \quad \geq \quad \min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in [0,1]^n \,\}$$

Důkaz: Pro každé $X \subseteq Y$ a $f\colon Y \to \mathbb{R}$ platí $\min\limits_{x \in X} f(x) \geq \min\limits_{x \in Y} f(x)$.

Latinské čtverce

Latinský čtverec o straně n je matice $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \{1, \ldots, n\}^{n \times n}$, která v každém řádku a každém sloupci má různá čísla.

1	3	4	2
3	4	2	1
2	1	3	4
4	2	1	3

Popis pomocí soustavy rovnic s binárními proměnnými:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_i x_{ijk} &= 1 && \forall j, k \\ \textstyle\sum_j x_{ijk} &= 1 && \forall i, k \\ \textstyle\sum_k x_{ijk} &= 1 && \forall i, j \\ x_{ijk} &\in \{0, 1\} && \forall i, j, k \end{aligned}$$

kde $x_{ijk} = 1$ znamená $a_{ij} = k$.

Úloha na **doplnění latinského čtverce**:

- Jsou dány: číslo n a některá z čísel a_{ij}.
- Rozhodni, zda existují zbývající čísla a_{ij} tak, aby $\mathbf{A}$ byla latinský čtverec.

To vede na soustavu lineárních rovnic s 0-1 proměnnými.

Věta

Úloha na doplnění latinského čtverce je NP-úplná.

Přiřazovací úloha (Linear Assignment Problem)

- Jsou dána čísla c_{ij} pro $i, j = 1, \ldots, n$.
- Najdi permutaci π: $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, která minimalizuje $\sum_{i=1}^{n} c_{i,\pi(i)}$.

ILP formulace ($x_{ij} = 1$ znamená $\pi(i) = j$):

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} & \\ \text{za podm.} \quad & \sum_j x_{ij} = 1 & \forall i \\ & \sum_i x_{ij} = 1 & \forall j \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i, j \end{aligned}$$

LP relaxace nahradí omezení $x_{ij} \in \{0, 1\}$ omezeními $x_{ij} \geq 0$ ($\Rightarrow$ $x_{ij} \in [0, 1]$).

Věta (Birkhoff, von Neumann)

Původní úloha a relaxovaná úloha mají stejné optimální hodnoty.

Mezi optimálními řešeními relaxované úlohy je aspoň jedno celočíselné.

Vrcholové pokrytí

Vrcholové pokrytí (neorientovaného) grafu (V, E) je podmnožina vrcholů $X \subseteq V$ taková, že každá hrana má aspoň jeden vrchol v X.

Úloha na nejmenší vrcholové pokrytí: Najdi vrcholové pokrytí s nejmenším počtem vrcholů.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in V} x_i \\ \text{za podm.} \quad & x_i + x_j \geq 1 && \forall \{i, j\} \in E \\ & x_i \in \{0, 1\} && \forall i \in V \end{aligned}$$

Věta

Úloha na nejmenší vrcholové pokrytí je NP-těžká.

LP relaxace nahradí omezení $x_i \in \{0, 1\}$ omezeními $x_i \in [0, 1]$:

Věta (2-aproximace úlohy na nejmenší pokrytí)

Nechť $\mathbf{x}^*$ je optimální řešení původní (nerelaxované) úlohy.
Nechť $\mathbf{x}$ je optimální řešení relaxované úlohy.
Nechť $\bar{\mathbf{x}}$ je zaokrouhlené řešení relaxované úlohy, tj. $\bar{x}_i = \lfloor x_i + \frac{1}{2} \rfloor$ (je přípustné!).
Pro každý graf (V, E) platí $\sum_i \bar{x}_i \leq 2 \sum_i x_i^*$.

Důkaz: $\bar{\mathbf{x}}$ je přípustné, neboť pro $x_i + x_j \geq 1$ musí být $x_1 \geq \frac{1}{2}$ nebo $x_j \geq \frac{1}{2}$. Tedy $\bar{x}_i = 1$ nebo $\bar{x}_j = 1$.
Pro každé $x \geq 0$ je $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor \leq 2x$. Tedy $\sum_i \bar{x}_i \leq 2 \sum_i x_i \leq 2 \sum x_i^*$.

Největší nezávislá množina

Podmnožina $X \subseteq V$ vrcholů grafu (V, E) je **nezávislá**, nejsou-li žádné dva vrcholy z X spojeny hranou.

Úloha na největší nezávislou množinu: Najdi nezávislou množinu s největším počtem vrcholů.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} x_i \\ \text{za podm.} \quad & x_i + x_j \leq 1 && \forall \{i,j\} \in E \\ & x_i \in \{0,1\} && \forall i \in V \end{aligned}$$

LP relaxace nahradí omezení $x_i \in \{0,1\}$ omezeními $x_i \in [0,1]$.

- Relaxovaná úloha má triviální přípustné řešení $x_i = \frac{1}{2}$, $i \in V$, s hodnotou $\frac{1}{2}|V|$.
- Tedy optimální hodnota LP relaxace není menší než $\frac{1}{2}|V|$.
- Ovšem pro každý úplný graf je opt. hodnota nerelaxované úlohy rovna 1.

Věta (neaproximovatelnost úlohy na největší nezávislou množinu)

Pro každé $r > 0$ je NP-těžké najít přípustné řešení $\bar{x}_i \in \{0,1\}$, $i \in V$, splňující $\sum_i \bar{x}_i \geq r\, y^*$.