Optimalizace

12. Konvexní funkce a konvexní optimalizace

Tomáš Werner, Tomáš Kroupa

7. ledna 2025

FEL ČVUT

Konvexní funkce

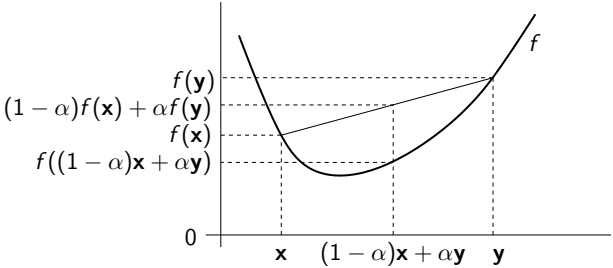
Konvexní funkce

Definice: Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina.

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je **konvexní** na X, jestliže pro každá $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ a $\alpha \in [0, 1]$ je

$$f((1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) \leq (1-\alpha)f(\mathbf{x}) + \alpha f(\mathbf{y}).$$

Funkce f je **konkávní**, jestliže $-f$ je konvexní.



Ekvivalentní podmínka (**Jensenova nerovnost**):

Pro každé $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in X$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$ kde $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$ platí

$$f(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) \leq \alpha_1 f(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k f(\mathbf{x}_k).$$

Příklady konvexních funkcí

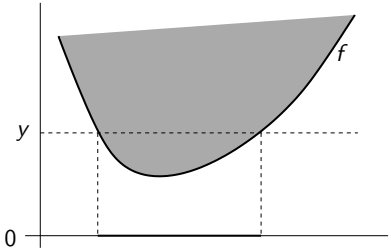
- $f(x) = e^{ax}$ pro $a \in \mathbb{R}$
- $f(x) = |x|^a$ pro $a \geq 1$
- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ pro $\mathbf{A}$ pozitivně semidefinitní
- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b$
- $f(\mathbf{x}) = \max \{x_1, \ldots, x_n\}$
- libovolná norma

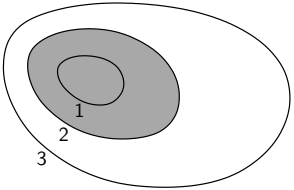
Vztah konvexní funkce a konvexní množiny

- **Epigraf** funkce $f\colon X \to \mathbb{R}$ je množina $\{\,(\mathbf{x}, y) \in X \times \mathbb{R} \mid f(\mathbf{x}) \leq y\,\}$.
- **Subkontura** výšky y funkce f je množina $\{\,\mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) \leq y\,\}$.

Tvrzení

- Funkce je konvexní, právě když její epigraf je konvexní množina.
- Každá subkontura konvexní funkce je konvexní množina.

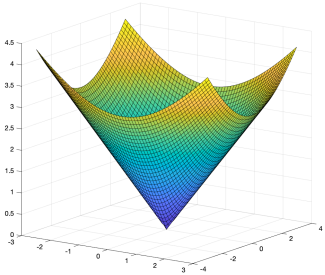


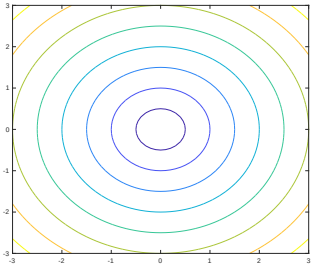


Pozor: Jsou-li všechny subkontury funkce konvexní množiny, funkce nemusí být konvexní.

Příklad: Epigraf a subkontury pro kužel druhého řádu v $\mathbb{R}^2$

- Epigraf eukleidovské normy v $\mathbb{R}^2$ je $K_2^2 = \{\, (\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq y \,\}$
- Subkontury jsou kruhy



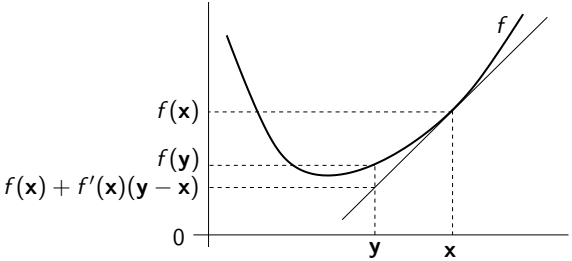


Podmínky na konvexitu pro diferencovatelné funkce

Věta (podmínka prvního řádu)

Diferencovatelná funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní, právě když pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$



Důsledek: Je-li f konvexní diferencovatelná a $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, pak $\mathbf{x}$ je volné globální minimum funkce f.

Věta (podmínka druhého řádu)

Dvakrát diferencovatelná funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní,
právě když pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je Hessián $f''(\mathbf{x})$ pozitivně semidefinitní.

Některé operace zachovávající konvexitu funkcí

Nezáporné lineární kombinace:

Jsou-li $f_1, \ldots, f_k$ konvexní funkce a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$, pak funkce $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_k f_k$ je konvexní.

Skládání:

- Jestliže $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konvexní a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konvexní a neklesající, pak $g \circ f$ je konvexní.
- Jestliže $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je konvexní, pak $f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$ je konvexní.

Maximum: Nechť $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou konvexní funkce pro všechna $i \in I$. Pak

$$f(\mathbf{x}) = \max_{i \in I} f_i(\mathbf{x})$$

je konvexní funkce (předpokládáme, že pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ maximum existuje).

Důkaz: Epigraf funkce f je průnik epigrafů funkcí f_i (není těžké dokázat).
Z toho plyne, že epigraf funkce f je konvexní množina. Tedy f je konvexní funkce.

Příklady:

- $f(\mathbf{x}) = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$
- $f(\mathbf{x}) = \max_{i=1}^{k}(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + b_i)$
- $f(\mathbf{c}) = \max_{\mathbf{x} \in X} \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|$ nebo $f(\mathbf{c}) = \max_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, kde $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená a omezená

Věta platí i když maximum nahradíme supremem.

Konvexní optimalizační úlohy

Konvexní optimalizační úloha

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})$$

kde $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce na množině X.

Věta

Každé lokální minimum funkce f na množině X je globální.

Tvrzení: Optimalizační úloha ve **standardním tvaru**

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{za podmínek} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, m \\ & h_i(\mathbf{x}) = 0 \qquad i = 1, \ldots, \ell \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

je konvexní, jestliže funkce $f, g_1, \ldots, g_m$ jsou konvexní a funkce $h_1, \ldots, h_\ell$ jsou afinní.

Tato podmínka je postačující ale ne nutná pro konvexitu úlohy. Např. množina

$$X = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - y)^2 = 0 \}$$

je konvexní, ale funkce $h(x, y) = (x - y)^2$ není afinní.

Třídy konvexních optimalizačních úloh

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(\mathbf{x}) \\
\text{za podmínek} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, m \\
& h_i(\mathbf{x}) = 0 \qquad i = 1, \ldots, \ell \\
& \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

- Lineární programování (**LP**): f, g_i, h_i afinní
- Kvadratické programování (**QP**): f kvadratická konvexní, g_i, h_i afinní
- Kvadratické programování s kvadratickými omezeními (**QCQP**): f, g_i kvadratické konvexní, h_i afinní
- Programování na kuželu druhého řádu (**SOCP**):
  $f, h_1, \ldots, h_\ell$ afinní, každá funkce g_i má tvar $\|\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\|_2 - (\mathbf{c}^T\mathbf{x} + d)$
- Semidefinitní programování (**SDP**)
- Geometrické programování (**GP**): h_i afinní, každá z funkci f, g_i má tvar $\sum_k \exp(\mathbf{a}_k^T\mathbf{x} + b_k) - c$

Kvadratické programování (QP)

Funkce f je kvadratická, funkce g_i, h_i jsou afinní.

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{C}\mathbf{x} \geq \mathbf{d} \\ & \mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{f} \end{aligned}$$

Úloha je konvexní, když $\mathbf{A}$ je pozitivně semidefinitní.

Příklady:

- Chybí-li podmínky typu nerovnosti, podmínka optimality je soustava lineárních rovnic (to známe!).
- Řešení přeurčené soustavy s omezeními typu lineárních rovností:

$$\min\{\, \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \mid \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\}$$

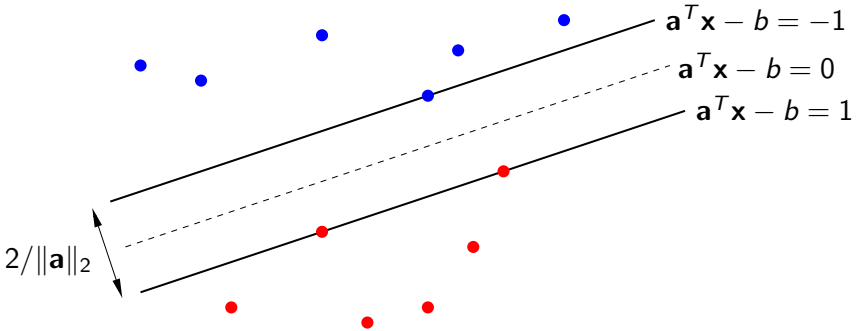
- Řešení přeurčené lineární soustavy s intervalovými omezeními ('box constraints'):

$$\min\{\, \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \mid \boldsymbol{\ell} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\}$$

- Řešení soustavy lineárních nerovnic s nejmenší normou:

$$\min\{\, \|\mathbf{x}\|_2^2 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\}$$

Příklad: Support Vector Machine (SVM)



Dány dvojice $(\mathbf{x}_1, y_1), \ldots, (\mathbf{x}_m, y_m)$, kde $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ a $y_i \in \{-1, +1\}$.
Hledáme **oddělující nadrovinu**: hledáme $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $b \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$y_i(\mathbf{a}^T\mathbf{x}_i - b) > 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

Po vydělení $(\mathbf{a}, b)$ vhodným kladným číslem je toto ekvivalentní

$$y_i(\mathbf{a}^T\mathbf{x}_i - b) \geq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

Úloha SVM hledá oddělující nadrovinu **maximalizující šířku pásu**, tj. minimalizující $\|\mathbf{a}\|_2^2 = \mathbf{a}^T\mathbf{a}$.

Kvadratické programování s kvadratickými omezeními (QCQP)

Funkce f, g_i jsou kvadratické, h_i jsou afinní.

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{x}^T\mathbf{C}_i\mathbf{x} + \mathbf{d}_i^T\mathbf{x} \leq e_i, \qquad i = 1, \ldots, m \\ & \mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{g} \end{aligned}$$

Úloha je konvexní, když matice $\mathbf{A}, \mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_m$ jsou positivně semidefinitní.

Příklad: Nejmenší koule obsahující zadané body $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \max_{i=1}^{m} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|_2$$

To je ekvivalentní QCQP úloze

$$\begin{aligned} \min \quad & y \\ \text{za podm.} \quad & \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|_2^2 \leq y \end{aligned}$$

Programování na kuželu druhého řádu (SOCP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{g}^T\mathbf{x} \\ \text{za podm.} \quad & \|\mathbf{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_2 \leq \mathbf{c}_i^T\mathbf{x} + d_i, \qquad i = 1, \ldots, m \\ & \mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{f} \end{aligned}$$

SOCP podmínky jdou napsat jako

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{c}_i \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i \\ d_i \end{bmatrix} \in K_2^{m_i}$$

kde $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$ a

$$K_2^{m_i} = \{\, (\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{m_i} \times \mathbb{R} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq y \,\}$$

je epigraf eukleidovské normy $\|\cdot\|_2$ (**kužel druhého řádu, Lorentzův kužel**) na $\mathbb{R}^{m_i}$.

- Když $\mathbf{A}_i = \mathbf{0}$ pro všechna i, SOCP se redukuje na LP.
- Když $\mathbf{c}_i = \mathbf{0}$ pro všechna i, SOCP se redukuje na QCQP.

Příklad: Geometrický medián (Fermat-Weberův problém)

Pro zadané body $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ najděte minimum funkce

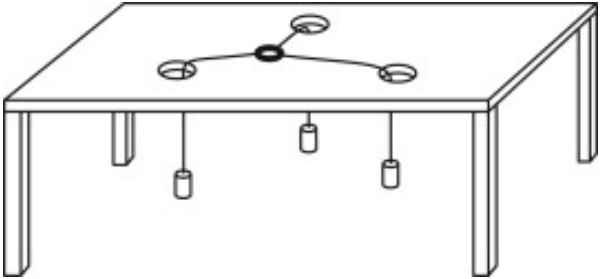
$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|_2$$

SOCP formulace:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + \cdots + y_m \\ \text{za podmínek} \quad & \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|_2 \leq y_i, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Speciální algoritmus (Weiszfeldův): rychlejší než obecný SOCP algoritmus.

Varignon frame: mechanický počítač na hledání geometrického mediánu v rovině (tj. pro $n = 2$)



Semidefinitní programování (SDP)

Věta

Množina všech positivně semidefinitních matic pevného rozměru $n \times n$ je konvexní kužel.

Důkaz: Pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha, \beta \geq 0$ platí $\mathbf{x}^T(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B})\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} \geq 0$.

Úloha SDP:

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle \mathbf{C}, \mathbf{X} \rangle \\ \text{za podmínek} \quad & \langle \mathbf{A}_i, \mathbf{X} \rangle = b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ & \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ je positivně semidefinitní} \end{aligned}$$

Tedy minimalizujeme lineární funkci p.s.d. matice za podmínek lineárních rovností.

- Pro diagonální matice $\mathbf{A}_i, \mathbf{C}$ se SDP redukuje na LP.
- SOCP lze reprezentovat pomocí SDP (neuvádíme).
- Souhrn:

$$\text{LP} \subset \text{QP} \subset \text{QCQP} \subset \text{SOCP} \subset \text{SDP}$$

Conic Optimization

Dány konvexní kužel $K \subseteq \mathbb{R}^n$, matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, vektory $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in K \end{aligned}$$

Speciální případy:

- LP: $K = \mathbb{R}^n_+$ je 'nezáporný kužel'
- SOCP: K je kartézský součin $\mathbb{R}^k$ a kuželů druhého řádu
- SDP: K je semidefinitní kužel ($\mathbf{x}$ je tedy čtvercová matice přerovnaná do vektoru)

Algoritmy vnitřního bodu (Interior Point Algorithms, IPM)

Chceme minimalizovat konvexní funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na konvexní množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Pro množinu X zvolíme **bariérovou funkci** $B(\mathbf{x})$ s těmito vlastnostmi:

- konvexní a hladká na vnitřku množiny X
- konečná uvnitř X, směrem k hranici X se blíží $+\infty$

Pro postupně se zmenšující $\mu > 0$ řešíme posloupnost úloh

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \; f(\mathbf{x}) + \mu B(\mathbf{x})$$

- úloha bez omezení, řešíme (přibližně) Newtonovou metodou, omezení $\mathbf{x} \in X$ je vynuceno 'implicitně'
- pro $\mu \to 0$ je ekvivalentní původní úloze

Tento naivní algoritmus má špatné numerické vlastnosti, praktické implementace jsou o mnoho složitější.

Příklad: Pro lineární program

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\}$$

použijeme logaritmickou bariérovou funkci

$$B(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^{m} \log(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i)$$

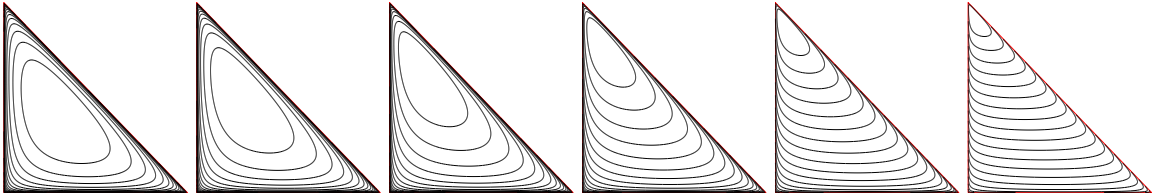
Grafická ilustrace pro lineární program

$$\begin{aligned} \min \quad & -y \\ \text{za podmínek} \quad & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \\ & 1 - x - y \geq 0 \end{aligned}$$

Vrstevnice účelové funkce

$$f(x, y) + \mu B(x, y) = -y + \mu(-\log x - \log y - \log(1 - x - y))$$

pro zmenšující se μ:



$\mu = 1$ $\mu = 1/2$ $\mu = 1/4$ $\mu = 1/8$ $\mu = 1/16$ $\mu = 1/32$

Příklad: Interface solveru SEDUMI na řešení LP, SOCP, SDP

```
% X = SEDUMI(A,b,c,K) minimizes c'*x subject to A*x = b and x is restricted to
%   a self-dual cone, defined by structure K. The fields of K can be
%   K.f, K.l, K.q, K.s (Free, Linear, Quadratic, Semi-definite).
%
%   (1) K.f is the number of FREE, i.e. UNRESTRICTED primal components.
%       These are ALWAYS the first components in x.
%
%   (2) K.l is the number of NONNEGATIVE components. E.g. if K.f=2, K.l=8
%       then x(3:10) >=0.
%
%   (3) K.q lists the dimensions of LORENTZ (quadratic, second-order cone)
%       constraints. E.g. if K.l=10 and K.q = [3 7] then
%           x(11) >= norm(x(12:13)),
%           x(14) >= norm(x(15:20)).
%       These components ALWAYS immediately follow the K.l nonnegative ones.
%
%   (4) K.s lists the dimensions of POSITIVE SEMI-DEFINITE (PSD) constraints
%       E.g. if K.l=10, K.q = [3 7] and K.s = [4 3], then
%           mat( x(21:36),4 ) is PSD,
%           mat( x(37:45),3 ) is PSD.
%       These components are ALWAYS the last entries in x.
```

Modelovací jazyky pro optimalizaci (příklady)

CVX:

- Pouze konvexní úlohy (*disciplined convex programming, DCP*)
- Verze pro Matlab, Python, ...
- Příklad: úloha

$$\min\{\, \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d},\ \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1 \,\}$$

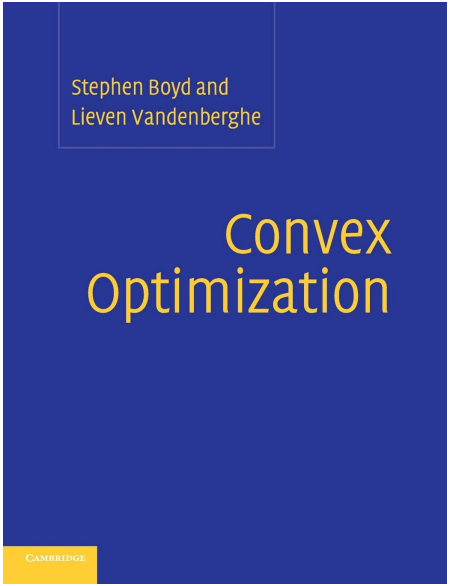
  se v CVX (Matlab) modeluje takto:

```
cvx_begin
    variable x(n);
    minimize( norm(A*x-b) );
    subject to
        C*x == d;
        norm(x,Inf) <= 1;
cvx_end
```

YALMIP:

- Konvexní i nekonvexní úlohy (mnohem víc možností než CVX), ale (samozřejmě) jen lokální optima.
- V Matlabu

Kniha o konvexní optimalizaci vhodná pro inženýry



Convex optimization problems arise frequently in many different fields. This book provides a comprehensive introduction to the subject, covering the theory, many applications and examples, and numerical methods. The book begins with the basic elements of convex sets and functions, describes various classes of convex optimization problems, and then treats duality theory. The second part covers a wide variety of applications, in estimation, approximation, statistics, computational geometry, and other areas. The last part of the book presents numerical methods for convex optimization problems, moving from basic methods for unconstrained problems to interior-point methods.

The focus of the book is on recognizing and formulating convex optimization problems, and then solving them efficiently. It contains many worked examples and homework exercises and will appeal to students, researchers, and practitioners in fields such as engineering, computer science, mathematics, finance, and economics.

Stephen Boyd received his Ph.D. from the University of California, Berkeley. Since 1985 he has been a member of the Electrical Engineering Department at Stanford University, where he is now the Samsung Professor of Engineering and Director of the Information Systems Laboratory. He has won numerous awards for research and teaching, and is a Fellow of the IEEE. He is the co-author of two previous books, *Linear Controller Design: Limits of Performance* and *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*.

Lieven Vandenberghe received his Ph.D. from the Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, and is Professor of Electrical Engineering at the University of California, Los Angeles. He has published widely in the field of optimization, and is co-editor of the *Handbook of Semidefinite Programming*.

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS
www.cambridge.org

ISBN 978-0-521-83378-3

Zdarma ke stažení, spolu se slajdy atd.

Co s nekonvexními úlohami?

Některé nekonvexní úlohy jsou ‘snadné’ ...

Příklad: Minimalizace (ne nutně p.s.d.) kvadratické formy na sféře:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \text{za podmínky} \quad & \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1 \end{aligned}$$

Příklad: QCQP s jediným omezením:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{za podmínky} \quad & g(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{příp. } g(\mathbf{x}) \leq 0) \end{aligned}$$

kde $f, g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou dané (ne nutně konvexní) kvadratické funkce.

... ale většina ne

Příklad: Minimalizace (ne nutně p.s.d.) kvadratické formy na hyperkrychli:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \text{za podmínky} \quad & \mathbf{x} \in [-1, 1]^n \end{aligned}$$

Pro $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$ má úloha 2^n lokálních minim (vrcholy hyperkrychle).
Pro obecné $\mathbf{A}$ je úloha NP-těžká (důkaz neuvádíme).

Příklad: Celočíselné lineární programování

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

Pozn.: Podmínky $x_i \in \{0, 1\}$ lze napsat jako nekonvexní kvadratické rovnosti $x_i(1 - x_i) = 0$.

Konvexní relaxace nekonvexní úlohy

Je-li $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^n$, pak

$$\underbrace{\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X \,\}}_{\text{původní úloha}} \quad \geq \quad \underbrace{\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in Y \,\}}_{\text{relaxovaná úloha}}$$

Nahradíme původní (složitou, nekonvexní) množinu X její (jednoduchou, konvexní) nadmnožinou Y.

Viděli jsme dříve pro 0-1 LP, kde

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \{0,1\}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \,\}$$
$$Y = \{\, \mathbf{x} \in [0,1]^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \,\}$$

Užitečnost:

- Poskytne dolní mez na hodnotu globálního minima nerelaxované úlohy.
- Poud lze pro relaxované řešení (prvek Y) levně najít 'blízké' nerelaxované řešení (prvek X), dá nám aproximací opt. řešení nerelaxované úlohy.

Co s nekonvexními úlohami?

Obecně jsou dva přístupy:

- **Globální optimalizace:** nalezení globálního optima, obecně (worst-case) v exponenciálním čase
  - hierarchie stále těsnějších konvexních relaxací (Sherali-Adams hierarchy pro 0-1 LP)
  - metoda sečných nadrovin (cutting-plane method)
  - metoda větví a mezí (branch-and-bound)

- Nalezení přibližného optima (tzv. sub-optima) v krátkém čase.
  Heuristiky (každá použitelná jen na určitý typ úloh):
  - **Lokální optimalizace:** najde lokální (v nějakém smyslu) optimum
    (gradientní sestup, optimalizace po blocích souřadnic, majorize-minimize methods, ...)
  - konv. relaxace + projekce na původní přípustnou množinu
  - přírodou inspirované heuristiky (evoluční/genetické algoritmy, simulované žíhání, kolonie mravenců, ...)
  - continuation/homotopy methods
  - stochastické metody