

# Afinní podprostory, ortogonalita: úvod

**Petr Olšák**  
**petr@olsak.net**

<http://petr.olsak.net/>

# Afinní kombinace a odvozené pojmy

- **Afinní kombinace** je lineární kombinace prvků z  $\mathbb{R}^n$ , jejíž koeficienty mají součet 1, tedy:

$$\text{AK}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k) = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k, \quad \text{kde } \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$$

- V kontextu afinních kombinací je užitečné si při geometrické interpretaci prvky z  $\mathbb{R}^n$  (vektory) představovat jako body v prostoru, ne jako orientované úsečky. AK totiž nezávisí na poloze počátku.
- **Afinní obal** zadaných bodů  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$  je množina všech afinních kombinací těchto bodů.
- **Afinní podprostor** je podmnožina  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  uzavřená na afinní kombinace. Tedy je-li  $\mathbf{x}_i \in M$ , pak také všechny  $\text{AK}(\mathbf{x}_i) \in M$ .
- **Afinní zobrazení** je zobrazení  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  zachovávající afinní kombinace, tedy pro  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$  platí

$$\mathbf{f}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k) = \alpha_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) + \dots + \alpha_k \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

- Analogie: lineární kombinace, lineární obal, podprostor, zobrazení.

# Afinní kombinace a podprostory: vlastnosti

- Afinní kombinace afinních kombinací je afinní kombinace.
- Afinní obal je afinní podprostor. Každý afinní podprostor lze zapsat jako afinní obal nějakých bodů.
- Je-li  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  množina řešení soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , pak  $M$  je prázdná nebo  $M$  je afinní podprostor (uzavřený na AK).
- Je-li  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  afinní podprostor (uzavřený na AK), pak existuje  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  a lineární podprostor  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  tak, že

$$M = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}; \mathbf{x} \in X\} = \mathbf{x}_0 + X. \quad (1)$$

- Splňuje-li  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  rovnost (1), pak existuje matice  $\mathbf{A}$  a vektor  $\mathbf{b}$  tak, že soustava  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  má množinu řešení rovnu  $M$ .
- **Závěr:** Tři vlastnosti množiny  $M$  uvedené výše jsou ekvivalentní.
- Afinní podprostor je z geometrického pohledu lineární podprostor plus posun.
- **Dimenze** afinního prostoru se definuje jako dimenze příslušného posunutého lineárního podprostoru.

# Afinní zobrazení: vlastnosti

- Zobrazení  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definované vztahem  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  je afinní (tj. AK vzorů je vždy rovna AK obrazů se stejnými koeficienty).
- Je-li  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  afinní zobrazení (AK vzorů je vždy rovna AK obrazů se stejnými koeficienty), pak existuje  $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  lineární a  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  tak, že  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- Splňuje-li zobrazení  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  vzorec  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  pro nějaké lineární zobrazení  $\mathbf{g}$  a vektor  $\mathbf{b}$ , pak existuje jednoznačně matice  $\mathbf{A}$  tak, že platí  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$ .
- **Závěr:** Tři vlastnosti zobrazení  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uvedené výše jsou ekvivalentní.
- Afinní zobrazení je z geometrického pohledu lineární zobrazení plus konstantní posun, například rotace a posun, zkosení a posun atd.
- Hodnota posunu je rovna  $\mathbf{f}(\mathbf{0})$ .
- Afinní zobrazení zobrazuje afinní podprostory na afinní podporostory.

# Příklad

Zkusíme si geometricky znázornit, jak „pracuje“ zobrazení  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definované předpisem:

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

# Různá vyjádření afinních prostorů

## Od rovnicového popisu k parametrickému

- Vyjádříme afinní podprostor  $A = \{\mathbf{x}; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$  parametricky, tedy jako  $A = \mathbf{x}_0 + \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\}$ .

# Různá vyjádření afinních prostorů

## Od rovnicového popisu k parametrickému

- Vyjádříme afinní podprostor  $A = \{\mathbf{x}; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$  parametricky, tedy jako  $A = \mathbf{x}_0 + \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\}$ .

Řešení: najdeme bázi  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  řešení přidružené homogenní soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  a jedno partikulární řešení  $\mathbf{x}_0$ .

# Různá vyjádření afinních prostorů

## Od rovnicového popisu k parametrickému

- Vyjádříme afinní podprostor  $A = \{\mathbf{x}; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$  parametricky, tedy jako  $A = \mathbf{x}_0 + \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\}$ .

Řešení: najdeme bázi  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  řešení přidružené homogenní soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  a jedno partikulární řešení  $\mathbf{x}_0$ .

## Od parametrického popisu k rovnicovému

- Pro afinní prostor zadaný parametricky  $A = \mathbf{x}_0 + \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\}$  najdeme matici  $\mathbf{A}$  a vektor  $\mathbf{b}$  tak, že  $A = \{\mathbf{x}; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$ .



# Různá vyjádření afinních prostorů

## Od rovnicového popisu k parametrickému

- Vyjádříme afinní podprostor  $A = \{\mathbf{x}; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$  parametricky, tedy jako  $A = \mathbf{x}_0 + \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\}$ .

Řešení: najdeme bázi  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  řešení přidružené homogenní soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  a jedno partikulární řešení  $\mathbf{x}_0$ .

## Od parametrického popisu k rovnicovému

- Pro afinní prostor zadaný parametricky  $A = \mathbf{x}_0 + \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\}$  najdeme matici  $\mathbf{A}$  a vektor  $\mathbf{b}$  tak, že  $A = \{\mathbf{x}; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$ .

Řešení: zapíšeme vektory  $\mathbf{b}_i$  do řádků matice  $\mathbf{B}$  a najdeme bázi prostoru řešení soustavy  $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ . Tyto bázevé vektory zapíšeme do řádků matice  $\mathbf{A}$ . Pak je  $\text{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\} = \{\mathbf{x}; \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}$ . Dále volíme  $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}_0$ .

# Skalární součin: úhly, velikosti

- Skalární součin  $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$  umožňuje měřit vzdálenosti a úhly:

$$\text{Euklidovská norma: } \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$$

$$\text{Euklidovská metrika (vzdálenost): } d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

$$\text{Úhel: } \cos \varphi = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

$$\text{Pravý úhel: } \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0 \quad (\text{pro } \mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0})$$

- Skalární součin geometricky: číslo  $\|\mathbf{x}\| \cos \varphi$  je orientovaná velikost průmětu vektoru  $\mathbf{x}$  na přímku generovanou vektorem  $\mathbf{y}$ . Vynásobíme-li toto číslo velikostí  $\|\mathbf{y}\|$ , máme skalární součin:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \varphi.$$

- Zakreslíme-li vektory korespondující s  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$  jako šipky na sebe kolmé a s jednotkovou velikostí, pak výše uvedené pojmy (úhel, velikost vektoru, vzdálenost) zavedené v  $\mathbb{R}^n$  „numericky“ mají přesně odpovídající geometrický význam.

# Připomenutí

- Schwartzova nerovnost:  $|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ , takže úhel je definován pro každé dva nenulové vektory. Rovnost nastává jen pro LZ vektory.
- Trojúhelníková nerovnost:  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ .
- Příklad odvození Pythagorovy věty (předpokládáme  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ ):

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

# Terminologie, základní vlastnosti

- Vektory jsou **ortogonální** (píšeme  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ ), když  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Vektory jsou **ortonormální**, jsou-li ortogonální a mají jednotkovou velikost.
- Matice je s **ortonormálními sloupci**, jsou-li každé dva různé sloupce této matice ortonormální.
- Matice je **ortogonální**, je-li čtvercová a s ortonormálními sloupci.
- **Tvrzení:** Skupina nenulových vektorů, kde je každý s každým ortogonální, je lineárně nezávislá.
- **Důsledek:** Matice s ortonormálními sloupci je úzká nebo čtvercová a vždy s plnou hodností. Ortogonální matice je regulární.
- **Tvrzení:** Nechť  $\mathbf{U}$  je s ortonormálními sloupci,  $\mathbf{x} \in \text{rng } \mathbf{U}$ . Tedy sloupce  $\mathbf{U}$  (označíme je  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ ) tvoří ortonormální bázi podprostoru  $\text{rng } \mathbf{U}$ . Pak souřadnice vektoru  $\mathbf{x}$  vzhledem k této bázi jsou  $\mathbf{u}_i^T \mathbf{x}$ , tedy

$$\mathbf{x} = (\mathbf{u}_1^T \mathbf{x}) \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2^T \mathbf{x}) \mathbf{u}_2 + \dots + (\mathbf{u}_k^T \mathbf{x}) \mathbf{u}_k.$$

- **Tvrzení:** Matice  $\mathbf{U}$  je s ortonormálními sloupci, právě když  $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$ .

# Vlastnosti ortogonální matice

- Následující vlastnosti jsou ekvivalentní.
  - $\mathbf{U}$  je ortogonální matice.
  - $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$
  - $\mathbf{U}^T$  je ortogonální matice.

Vidíme tedy, že jakmile je matice ortogonální, má ortonormální nejen sloupce, ale i řádky.

- **Tvrzení:** Součin ortogonálních matic je ortogonální matice.

## Příklady ortogonálních matic

- Rotační matice v  $\mathbb{R}^2$ .
- Matice  $\mathbf{P}$  obsahuje ve sloupcích báze vektory  $\mathbf{e}_j$  v libovolném pořadí: permutační matice. Pak vektor  $\mathbf{P}\mathbf{x}$  má stejné složky jako vektor  $\mathbf{x}$ , jen v permutovaném pořadí.
- Householderova matice je definována pro libovolný vektor  $\mathbf{u}$  jednotkové velikosti takto:  $\mathbf{H}_{\mathbf{u}} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ . Je ortogonální.

# Lineární isometrie

Nechť  $\mathbf{U}$  je matice s ortonormálními sloupci. Definujme lineární zobrazení  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  předpisem  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x}$ . Pak platí:

- $\mathbf{f}$  zachovává skalární součin, přesněji:  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{y})$ .
- $\mathbf{f}$  zachovává velikosti vektorů (velikost vzoru je rovna velikosti obrazu).
- $\mathbf{f}$  zachovává úhly (úhel mezi vzory je stejný jako mezi jejich obrazy).

Takové zobrazení  $\mathbf{f}$  se nazývá **isometrie**.

## Isometrie do stejného prostoru

- Je-li  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (tj. je to transformace), pak z geometrického pohledu je zřejmé, že  $\mathbf{f}$  může být pouze rotace nebo rotace složená se zrcadlením.
- Nechť  $\mathbf{U}$  je ortogonální matice,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x}$ . Pak  $\det \mathbf{U} = \pm 1$ . Podle znaménka determinantu poznáme, zda součástí této transformace je zrcadlení.

# Ortogonalita lineárních podprostorů

- Podprostory  $X$  a  $Y$  jsou na sebe **ortogonální** (píšeme  $X \perp Y$ ), když každý vektor  $\mathbf{x} \in X$  je kolmý na každý vektor  $\mathbf{y} \in Y$ , tedy pro ně platí  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Díky linearitě skalárního součinu stačí ověřit, že všechny báze vektory z  $X$  jsou kolmé na všechny báze vektory z  $Y$ .
- Pro  $X \perp Y$  zřejmě platí  $X \cap Y = \{\mathbf{0}\}$ .
- Jestliže  $X \perp Y$  a navíc  $X$  a  $Y$  generují celý prostor (jsou **komplementární**), pak říkáme, že  $X$  je **ortogonálním doplňkem**  $Y$  nebo též  $Y$  je ortogonálním doplňkem  $X$  a značíme  $X = Y^\perp$  nebo  $Y = X^\perp$ .
- Je-li dáno  $X$  svou bází, jak najdeme bázi  $X^\perp$ ?
- Je-li dáno  $X$  jako množina řešení soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ , tedy  $X = \{\mathbf{x}; \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}$ . Jak najdeme bázi  $X^\perp$ ?
- Povšimneme si, že  $(\text{rng } \mathbf{A})^\perp = \text{Null } \mathbf{A}^T$  a  $(\text{Null } \mathbf{A})^\perp = \text{rng } \mathbf{A}^T$ .
- Důsledek: Soustava  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  nemá řešení, právě když existuje řešení soustavy  $\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$ , pro které neplatí  $\mathbf{y} \perp \mathbf{b}$ .