OPT midterm 17.5.2023 | Příjmení: Jméno: | 000

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. (6 b) Do koule o jednotkovém poloměru vepište válec s poloměrem r a výškou h tak, aby měl maximální objem.

   Maximalizujeme $\pi\, r^2\, h$, bez újmy na obecnosti

   $$f(r,h) = r^2\, h\,,$$

   za podmínky $g(r,h) = 0$, kde

   $$g(r,h) = r^2 + (\frac{h}{2})^2 - 1$$

   a $r > 0$, $h > 0$;

   $$f'(r,h) = (2\, r\, h, r^2)\,,$$
   $$g'(r,h) = (2\, r, \frac{h}{2})\,.$$

   Podmínky pro stacionární body Lagrangeovy funkce $L(r,h,\lambda) = f(r,h) + \lambda\, g(r,h)$ jsou

   $$0 = \frac{\partial}{\partial r} L(r,h,\lambda) = 2\, r\, h + 2\, \lambda\, r = 2\, r\, \underbrace{(h + \lambda)}_{0}\,,$$
   $$0 = \frac{\partial}{\partial h} L(r,h,\lambda) = r^2 + \lambda \frac{h}{2},$$

   tedy

   $$\lambda = -h\,,$$
   $$r^2 = \frac{1}{2}\, h^2\,,$$
   $$r = \frac{1}{\sqrt{2}}\, h\,.$$

   Z omezující podmínky

   $$1 = r^2 + (\frac{h}{2})^2 = \frac{3}{4}\, h^2$$

   dostáváme řešení

   $$h = \frac{2}{\sqrt{3}}\,, \qquad r = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\,,$$

   což odpovídá jedinému maximu s hodnotou $f(r,h) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$, objemem $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

2. (4 b) Prokládáme data $(x_1, y_1), \ldots, (x_{60}, y_{60}) \in \mathbb{R}^2$ regresní funkcí $f(x) = a + bx^2 + c \ln x$ s neznámými parametry $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, aby kritérium $\sum_{i=1}^{60} |y_i - f(x_i)|$ bylo minimalizováno. Napište účelovou funkci v maticové podobě a formulujte tuto úlohu jako lineární program.

   Značení: vektory $\mathbf{x} = (a, b, c)$, $\mathbf{b} = (y_1, \ldots, y_{60})$, matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{60\times 3}$ s řádky $(1, x_i^2, \ln x_i)$. Potom

   $$\sum_{i=1}^{60} |y_i - f(x_i)| = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_1.$$

   Formulace lineárního programu: zavedeme 60 nových proměnných $z_1, \ldots, z_{60}$. Minimalizujeme funkci $\sum_{i=1}^{60} z_i$ za podmínek $-z_i \le y_i - a - bx_i^2 - c \ln x_i \le z_i$, kde $i = 1, \ldots, 60$. To je LP s neomezenými reálnými proměnnými $a, b, c, z_1, \ldots, z_{60}$.

OPT midterm 17.5.2023 | Příjmení: Jméno: | 000

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.
ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.
(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

000

	1
a	
b	
c	
d	
e	

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. (6 b) Do koule o jednotkovém poloměru vepište pravidelný čtyřboký hranol o stranách a, a, h tak, aby měl co největší povrch bez podstav.

   Maximalizujeme $4\,a\,h$, bez újmy na obecnosti $f(a,h) = a\,h$, za podmínky $g(a,h) = 0$, kde

   $$g(a,h) = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2 + (\frac{h}{2})^2 - 1$$

   a $a > 0$, $h > 0$;

   $$f'(a,h) = (h,a)\,,$$
   $$g'(a,h) = (a, \frac{h}{2})\,.$$

   Podmínky pro stacionární body Lagrangeovy funkce $L(a,h,\lambda) = f(a,h) + \lambda\, g(a,h)$ jsou

   $$0 = \frac{\partial}{\partial a} L(a,h,\lambda) = h + \lambda\, a\,,$$
   $$0 = \frac{\partial}{\partial h} L(a,h,\lambda) = a + \frac{\lambda}{2} h,$$

   tedy

   $$h = -\lambda\, a\,,$$
   $$0 = a - \frac{\lambda^2}{2}\, a = a\, \underbrace{(1 - \frac{\lambda^2}{2})}_{0}\,.$$

   Jelikož $a > 0$, $h > 0$, musí být $\lambda < 0$, tedy $\lambda = -\sqrt{2}$, $h = \sqrt{2}\, a$. Z omezující podmínky $1 = \frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{4} = a^2\,(\frac{1}{2} + \frac{2}{4}) = a^2$ dostáváme řešení $a = 1\,, h = \sqrt{2}$, což odpovídá jedinému maximu s hodnotou $f(a,h) = \sqrt{2}$, povrchem $4\,\sqrt{2}$.

2. (4 b) Prokládáme data $(x_1, y_1), \ldots, (x_{100}, y_{100}) \in \mathbb{R}^2$ regresní funkcí $f(x) = a + bx + c \sin x$ s neznámými parametry $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak aby, kritérium $\max_{i=1}^{100} |y_i - f(x_i)|$ bylo minimalizováno. Napište účelovou funkci v maticové podobě a formulujte tuto úlohu jako lineární program.

   Značení: vektory $\mathbf{x} = (a,b,c)$, $\mathbf{b} = (y_1, \ldots, y_{100})$, matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{100\times 3}$ s řádky $(1, x_i, \sin x_i)$. Potom

   $$\max_{i=1}^{100} |y_i - f(x_i)| = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty.$$

   Formulace lineárního programu: zavedeme 1 novou reálnou proměnnou z. Minimalizujeme lineární funkci z za podmínek $-z \le y_i - a - bx_i - c \sin x_i \le z$, kde $i = 1, \ldots, 100$. To je LP s neomezenými reálnými proměnnými a, b, c, z.

OPT midterm 17.5.2023 | Příjmení: Jméno: | 000

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.
ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.
(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

000

	1
a	
b	
c	
d	
e	

ODPOVĚĎ (a) JE VŽDY SPRÁVNÁ.

1. Rozhodněte, co je pravdivé tvrzení.
   (a) Neplatí žádné z uvedených tvrzení.
   (b) Soustava lineárních nerovnic $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ má vždy alespoň jedno řešení.
   (c) Každý konvexní polyedr má alespoň jeden extremální bod (vrchol).
   (d) Každá lineární funkce 2 proměnných má minimum na množině dané podmínkami $x_1, x_2 \geq 0$ a $x_1 + x_2 \geq 1$.
fl (e) Optimální řešení úlohy lineárního programování vždy existuje a leží ve vrcholu množiny přípustných řešení.

2. Nechť X je množina všech nulových bodů funkce $g(x, y) = (\max(|x|, |y|))^2 - 1$. Které body množiny X jsou regulární body zobrazení g?
   (a) Všechny kromě $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$.
   (b) Všechny.
   (c) $\{(x, 1) \mid -1 < x < 1\} \cup \{(1, y) \mid -1 < y < 1\}$.
   (d) Žádné.
fl (e) Neplatí žádné z uvedených tvrzení.

3. Řešíme úlohu na vázaný extrém; ve stacionárním bodě $(\mathbf{x}, \lambda)$ Lagrangeovy funkce je její Hessova matice indefinitní. Co z následujících výroků lze s jistotou říci?
   (a) Neplatí žádné z uvedených tvrzení.
   (b) V $\mathbf{x}$ není minimum.
   (c) V $\mathbf{x}$ není maximum.
   (d) V $\mathbf{x}$ je extrém.
fl (e) V $\mathbf{x}$ je inflexní bod.

4. Řešíme úlohu na vázaný extrém; ve stacionárním bodě $(\mathbf{x}, \lambda)$ Lagrangeovy funkce je její Hessova matice pozitivně definitní. Co z následujících výroků lze s jistotou říci?
   (a) V $\mathbf{x}$ je minimum.
   (b) Neplatí žádné z uvedených tvrzení.
   (c) V $\mathbf{x}$ je maximum.
   (d) V $\mathbf{x}$ není extrém.
fl (e) V $\mathbf{x}$ může, ale nemusí být minimum.

5. Které body z uzavřeného intervalu $[-1, 1]$ jsou regulárními body zobrazení $g(x) = x^2 - 1$?
   (a) Body -1 a 1.
   (b) Žádné.
   (c) Všechny.
   (d) Bod 0.
   (e) Bod 0 a 1.

6. Pro funkci $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 + 1)^2$ v bodě $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ je směr $\mathbf{v} = (1, 1, -2)$:
   (a) Klesající.
   (b) Rostoucí.
   (c) Tečný k vrstevnici.
   (d) Nelze rozhodnout.

fl (e) Nic z uvedeného.

7. V $\mathbb{R}^3$ je dána množina $X = \{(t, 2\,t + 1, t^2) \mid 0 \leq t \leq 2\}$ a bod $\mathbf{x} = (1, 3, 1)$.
   (a) Bod $\mathbf{x}$ je hraniční bod množiny X.
   (b) Bod $\mathbf{x}$ je vnitřní bod množiny X.
   (c) Bod $\mathbf{x}$ je vnitřní bod množiny $\mathbb{R}^3 \setminus X$.
   (d) Bod $\mathbf{x}$ nepatří do množiny X.
fl (e) Neplatí žádné z uvedených tvrzení.

8. Víme, že afinní funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d$ nabývá minima v bodě $\mathbf{x}^*$ při omezení $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$. Co z toho plyne?
   (a) Platí $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ pro všechna $\mathbf{x}$ splňující $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.
   (b) Bod $\mathbf{x}^*$ je vrcholem konvexního polyedru, který je definován nerovnicemi $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.
   (c) Platí $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$.
   (d) Bod $\mathbf{x}^*$ je konvexní kombinací dvou různých vrcholů množiny přípůstných řešení.
fl (e) Nic z uvedeného.

9. Uvažujme bod $\mathbf{x} = \alpha(-1, 1, 0) + \beta(0, \frac{1}{2}, -1) + (1 - \alpha - \beta)(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 0)$ pro nějaká $\alpha, \beta \geq 0$ splňující $\alpha + \beta \leq 1$. Platí:
   (a) $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1$.
   (b) Bod $\mathbf{x}$ má třetí souřadnici kladnou.
   (c) $\mathbf{x} \neq (-1, 1, 0)$.
   (d) Bod $\mathbf{x}$ leží na úsečce s krajními body $(-1, 1, 0)$ a $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 0)$.
   (e) Nic z uvedeného.

10. Lineární program $\min\{c_1x_1 + c_2x_2 | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + 2x_2 \geq 1\}$ má optimum v bodě $(0, \frac{1}{2})$, pokud platí:
    (a) $c_1 = 1$ a $c_2 = 1$.
    (b) $c_1 = 0$ a $c_2 = 1$.
    (c) $c_2 > 0$.
    (d) $c_1 = -1$ a $c_2 = -1$.
    (e) Nic z uvedeného.