Optimalizace **Zkouškový test** 10. 6. 2024

Příjmení a jméno: _____

Úloha	1	2	3	4	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	40
Počet bodů					

1. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení (ano/ne) a každou odpověď zdůvodněte.
   (a) (2 b) Každá konvexní funkce má na neprázdné konvexní množině globální minimum.
   (b) (2 b) Směr $\mathbf{v} = (2, -1)$ je pro funkci $f(x_1, x_2) = f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2$ v bodě $(0, 1)$ sestupný.
   (c) (2 b) V lineárním prostoru $\mathbb{R}^3$ lze najít ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 10}$ je libovolná matice.
   (d) (2 b) Ortogonální projektor $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ na lineární podprostor X dimenze 3 je pozitivně definitní matice.
   (e) (2 b) Problém max $\|\mathbf{x}\|_2^2$ za podmínek $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ je konvexní úloha.

Řešení:

(a) Ne. Protipříklad: lineární funkce na $\mathbb{R}$, exponenciální funkce na $\mathbb{R}$ atp.

(b) Ano. Platí totiž $\nabla f(0, 1)^T \mathbf{v} = -2 < 0$.

(c) Ano, podle věty o spektrálním rozkladu reálné symetrické matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$.

(d) Ne. Vektory ortogonálního doplňku prostoru X se zobrazí na nulový vektor. Jiný argument: matice $\mathbf{P}$ má nulové vlastní číslo.

(e) Ne. Účelová funkce je konvexní, množina přípustných řešení je také konvexní, ale je to úloha maximalizace.

2. Firma vyrábí dva druhy produktů. První se prodává za 40 a druhý za 60. K výrobě každého výrobku se používají tři vstupní suroviny, kterých je k dispozici 70, 40 a 90 jednotek. K výrobě prvního produktu je potřeba 1 jednotka druhé i třetí suroviny a 2 jednotky první suroviny, druhý produkt potřebuje po jedné jednotce první a druhé suroviny a 3 jednotky třetí suroviny. Firma chce maximalizovat tržby z vyráběných produktů.
   (a) (2 b) Formulujte optimalizační úlohu (podmínky celočíselnosti zanedbejte).
   (b) (4 b) Napište duální úlohu.
   (c) (4 b) Formulujte podmínky komplementarity pro úlohu z bodu (a).

Řešení:

(a) Jedná se o lineární program $\max 40x_1 + 60x_2$ z.p. $2x_1 + x_2 \leq 70$, $x_1 + x_2 \leq 40$, $x_1 + 3x_2 \leq 90$, $x_1, x_2 \geq 0$.

(b) Duál: $\min 70y_1 + 40y_2 + 90y_3$ z.p. $2y_1 + y_2 + y_3 \geq 40$, $y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 60$, kde $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

(c) Podmínky komplementarity: v optimu primáru $\mathbf{x}$ a duálu $\mathbf{y}$ musí platit $2x_1 + x_2 = 70$ nebo $y_1 = 0$, $x_1 + x_2 = 40$ nebo $y_2 = 0$, $x_1 + 3x_2 = 90$ nebo $y_3 = 0$ a dále $x_1 = 0$ nebo $2y_1 + y_2 + y_3 = 40$, $x_2 = 0$ nebo $y_1 + y_2 + 3y_3 = 60$.

3. (10 b) Hledáme přibližné řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= y\,, \\ x - 2y &= 0\,, \end{aligned}$$

optimální podle kritéria nejmenších čtverců. Popište (a) Gaussovu-Newtonovu metodu, (b) Newtonovu metodu a udělejte jimi 1 krok z počátečního odhadu $(0, 1)$. Vyhodnoťte kritérium před a po 1. kroku.

Řešení:

Zobrazení a jeho derivace:

$$\mathbf{g}(x,y) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^x - y \\ x - 2y \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g}'(x,y) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^x & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$
$$g_1''(x,y) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad g_1''(x,y) = \mathbf{0}\,,$$

Kritérium:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \|\mathbf{g}(x,y)\|^2 = \mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x + x^2 - 4xy + 5y^2\,, \\ f'(x,y) &= (2\mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x + 2x - 4y\,,\ -2\mathrm{e}^x - 4x + 10y)^\mathsf{T}\,, \\ f''(x,y) &= \begin{bmatrix} 4\mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x + 2 & -2\mathrm{e}^x - 4 \\ -2\mathrm{e}^x - 4 & 10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pro $x_0 = 0$, $y_0 = 1$:

$$\mathbf{g}(0,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g}'(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$
$$g_1''(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad g_1''(0,1) = \mathbf{0}\,,$$

Kritérium:

$$\begin{aligned} f(0,1) &= \mathbf{4}\,, \\ f'(0,1) &= (-4\,,\ 8)^{\mathsf{T}}\,, \\ f''(0,1) &= \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}, \\ (f''(0,1))^{-1} &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Gaussova-Newtonova metoda:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \left(\mathbf{g}'(x_0,y_0)^{\mathsf{T}}\,\mathbf{g}'(x_0,y_0)\right)^{-1}\mathbf{g}'(x_0,y_0)^{\mathsf{T}}\,\mathbf{g}(x_0,y_0) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$f(-2,-1) \doteq \mathbf{1.289}$.

Pseudoinverze:

$$\left(\mathbf{g}'(x_0,y_0)^{\mathsf{T}}\,\mathbf{g}'(x_0,y_0)\right)^{-1}\mathbf{g}'(x_0,y_0)^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Newtonova metoda:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - (f''(x_0,y_0))^{-1}\,f'(x_0,y_0)^{\mathsf{T}} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$f(-2,-1) \doteq \mathbf{1.289}$.

4. Je dán lineární podprostor $X = \operatorname{span}\{(1,0,2,1),(1,2,1,1),(0,1,2,1),(2,1,1,1)\}$ v prostoru $\mathbb{R}^4$. Dále uvažujte bod $\mathbf{z} = (1,1,1,1)$.
   (a) (2 b) Najděte bázi $X^\perp$ a $\dim X$, $\dim X^\perp$.
   (b) (4 b) Najděte bod $\mathbf{x} \in X$, který je nejblíže bodu $\mathbf{z}$, a určete vzdálenost bodu $\mathbf{z}$ od podprostoru X.
   (c) (4 b) Najděte bod $\mathbf{y} \in X^\perp$, který je nejblíže bodu $\mathbf{z}$, a určete vzdálenost bodu $\mathbf{z}$ od podprostoru $X^\perp$.

Řešení:

(a) Označme $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vidíme, že $\operatorname{rank} \mathbf{A} = 3$, takže $\dim X = 3$ a $\dim X^\perp = 1$.

Řešením lineární soustavy $\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ je například vektor $(1, 1, 2, -5)$, takže tento vektor tvoří bázi $X^\perp$.

(b,c) Matice $\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{31}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ má ve sloupci ortonormální bázi podprostoru $X^\perp$. Matici $\mathbf{U}$, ktará má ve sloupcích ortonormální bázi podprostoru X, nemusíme počítat.

Je $\mathbf{y} = \mathbf{V}\mathbf{V}^T\mathbf{z} = -\frac{1}{31}(1, 1, 2, -5)$, dále je $\mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{y} = \frac{1}{31}(32, 32, 33, 26)$. Vzdálenost bodu $\mathbf{z}$ od X je $||\mathbf{y}|| = 1/\sqrt{31}$. Vzdálenost bodu $\mathbf{z}$ od $X^\perp$ je $\sqrt{||\mathbf{z}||^2 - ||\mathbf{y}||^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{31}} = \sqrt{123/31} \doteq 1{,}9919$. Tato vzdálenost je také rovna $||\mathbf{x}||$, ale Pythagorova věta nám umožní jednodušší výpočet, protože se asi nikomu nechce zpaměti počítat $2 \cdot 32^2 + 33^2 + 26^2$.